

RYSZARD GRYBÓŚ

STATECZNOŚĆ
WIRUJĄCEJ POWŁOKI WALCOWEJ CIENKOŚCIENNEJ

Streszczenie: Rozważono stateczność cienkościennej powłoki walcowej obciążonej odśrodkowymi siłami bezwładności, wywołanymi obrotem powłoki dokoła jej osi geometrycznej. Powłoka zamknięta jest z obu stron sprężystymi tarczami. Zagadnienie to wiąże się ściśle z wyznaczaniem obrotów krytycznych wirnika typu bębnowego.

Badanie stateczności przeprowadzono w oparciu o metodę małych wymuszeń. Otrzymano wzór (7.2.1) na obliczenie krytycznej prędkości kątowej, przy czym współczynnik ξ_I można wyznaczyć z wykresu na rys.2, względnie obliczyć przybliżonym wzorem (9.7).

Podano warunki ograniczające ważność wyprowadzonych wzorów, wynikające z istnienia efektu brzegowego oraz założonej liniowości (fizykalnej i geometrycznej) zagadnienia.

1. Przedmiotem rozważań jest cienkościenna powłoka walcowa o długości L , średnim promieniu R i grubości h (małej w stosunku do R) wirująca ze stałą prędkością kątową ω wokół osi symetrii. Powłoka zamknięta jest z obu stron sprężystymi tarczami, które dla brzegów powłoki realizują warunki przegubowego podparcia. Zakłada się, że na skutek odpowiedniego oprofilowania tarcz brzegowych zachodzi równość odkształceń promieniowych tarczy i powłoki w miejscu ich złączenia.

Wobec tego jedyne obciążenie powłoki stanowią odśrodkowe siły bezwładności o natężeniu powierzchniowym

$$Z_0 = \rho \omega^2 h R (1 + c^2) \cong \rho \omega^2 h R \quad (1.1)$$

gdzie:

ρ - gęstość materiału powłoki, $c^2 = h^2/12 R^2 \ll 1$.

Siła ta powoduje rozciąganie powłoki siłami obwodowymi

$$T_{20} = \rho \omega^2 R^2 h. \quad (1.2)$$

Związane z tym odkształcenie obwodowe ε_{20} określone jest przez przemieszczenie promieniowe W_0 następująco

$$\varepsilon_{20} = \frac{W_0}{R_0}, \quad (1.3)$$

R_0 promień powierzchni środkowej powłoki w spoczynku ($\omega = 0$).
Ponieważ

$$\varepsilon_{20} = \frac{T_{20}}{Eh}, \quad (1.3.1)$$

przeło na mocy (1.2) i (1.3) będzie

$$W_0 = \frac{\rho \omega^2}{E} R^2 R_0. \quad (1.4)$$

Wielkości R, R_0 i W_0 związane są zależnością

$$R = R_0 + W_0.$$

Podstawiając tu (1.4) dochodzi się do równania kwadratowego

$$\frac{\xi}{R_0} R^2 - R + R_0 = 0, \quad (\xi \equiv \frac{\rho \omega^2 R_0^2}{E})$$

z którego można znaleźć zależność R od ω . Jeżeli bowiem wyróżnik tego równania zastąpimy trzema pierwszymi wyrazami rozwinięcia

$$\sqrt{1 - 4\xi} = 1 - 2\xi - \frac{1}{2}\xi^2 \dots$$

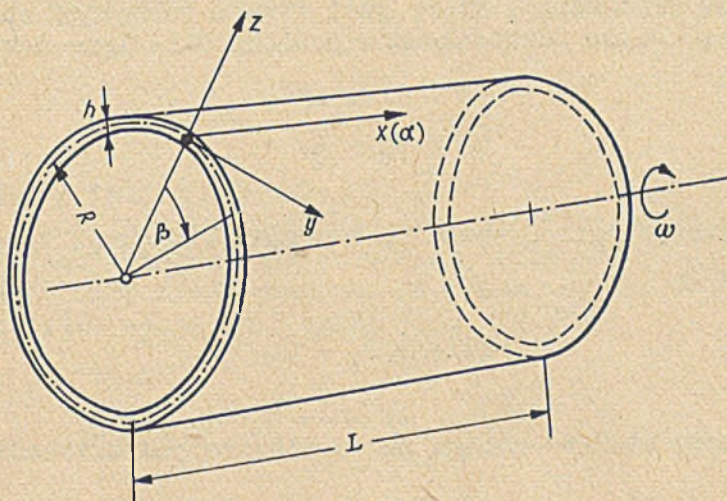
to otrzymamy

$$R = R_0(1 + \xi). \quad (1.5)$$

Dla materiałów o małym module sprężystości (np. duraluminium) utożsamianie R z R_0 może zatem prowadzić do pewnych niedokładności.

2. Znane z praktyki eksploatacyjnej zjawisko obrotów krytycznych wirników bębnowych dowodzi, że przy pewnych prędkościach $\omega = \omega_{kr}$ pierwotna (tj. walcowa) postać powłoki stanowiącej płaszczyznę wirnika przestaje być stateczna. Odpowiada to osiągnięciu krytycznych wartości przez obwodowe siły rozciągające T_0 . W tym ujęciu zagadnienie obrotów krytycznych wirnika typu bębnowego sprowadza się do badania stateczności (statycznej) powłoki walcowej. Zagadnienie zostanie rozwiązane przy pomocy metody małych wymuszeń.

Frostokątny układ współrzędnych (rys.1) związany sztywno z powierzchnią środkową powłoki odkształconej już działaniem sił stanu podkrytycznego ($\omega \neq \omega_{kr}$).



Rys.1. Układ współrzędnych związany z powłoką

Niechaj odkształcenie powierzchni środkowej w tym stanie określa wektor $\bar{q}_0 = \bar{q}_0(\alpha, \beta)$, który winien spełniać równanie równowagi

$$\bar{L} \bar{q}_0 + \kappa \bar{P}_0 = \bar{0}. \quad (2.1)$$

Tutaj $\bar{L} = \|\|L_{ij}\|$ jest macierzą symetryczną, której elementami L_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) są liniowe operatory różniczkowe, znane ze zgięciowej teorii powłok walcowych [5].

Siłę zewnętrzną \bar{P}_0 o składowych X_0, Y_0, Z_0 traktujemy tu jako macierz jednokolumnową

$$\bar{P}_0 = \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ -Z_0 \end{Bmatrix}; \quad (2.2)$$

$$\kappa \equiv \frac{1 - \nu^2}{Eh} R^2, \quad \nu - \text{ułamek Poissona.}$$

W stanie krytycznym, który jest stanem równowagi obojętnej możliwe jest także odkształcenie powłoki określone wektorem

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_0 + \bar{q}, \quad (2.3)$$

który również powinien spełniać równanie równowagi typu (2.1), a mianowicie

$$\bar{L} \bar{q}_1 + \kappa \bar{P}_1 = \bar{0}. \quad (2.4)$$

Jednakże nowy stan równowagi ma tu miejsce pod działaniem siły

$$\bar{P}_1 = \bar{P}_0 + \bar{P}, \quad (2.5)$$

przy czym

$$\begin{aligned}\bar{q} &= u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}, \\ \bar{P} &= X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}\end{aligned}$$

oznaczają wariacje przemieszczenia i siły masowej. Odjęcie równania (2.4) od (2.1) daje, po uwzględnieniu zależności (2.3) i (2.5)

$$\bar{L} \bar{q} + \alpha \bar{P} = \bar{O}. \quad (2.6)$$

Otrzymane równanie macierzowe w wariacjach będzie stanowiło punkt wyjściowy dla rozwiązania zagadnienia stateczności powłoki wirującej.

3. Przystępując do określenia wariacji wektora \bar{P} zajmiemy się najpierw jego składową promieniową Z , która zgodnie z (2.5) i (2.2) jest

$$Z = (-Z_1) - (-Z_0) = Z_0 - Z_1. \quad (3.1)$$

Składnik Z_0 określono na wstępie wzorem (1.1). Dla stanu "wymuszonego" będzie odpowiednio

$$Z_{\omega 1} = g \omega^2 h (R + w). \quad (3.2)$$

W związku z istnieniem siły obwodowej T_{20} (1.2), która sprawia, że w momencie osiągnięcia prędkości krytycznej powłoka znajduje się w stanie naprężenia wstępnego, składową Z_1 należy rozumieć jako siłę zredukowaną na kierunek osi z . Wobec tego trzeba dodatkowo uwzględnić człon ([5] str.30)

$$Z_{\text{red } 1} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\left(v - \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) T_{20} \right],$$

wynikający z warunku równowagi sił rzutowanych na kierunek promieniowy.

Celem wyeliminowania przemieszczenia v przyjmiemy tymczasowe założenie [4], że dodatkowe odkształcenie obwodowe ϵ_2 w sta-

nie wymuszonym jest małe w porównaniu z ε_{20} ; można zatem napisać

$$\varepsilon_2 \equiv \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right) = 0,$$

skąd

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} = -w.$$

Korzystając z tej zależności otrzymuje się

$$Z_{\text{red } 1} = \frac{T_{20}}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right). \quad (3.3)$$

Ostatecznie, po podstawieniu (1.1), (1.2), (3.2) i (3.3) do (3.1) i zredukowaniu znajdujemy

$$Z = Z_0 - (Z_{w1} + Z_{\text{red } 1}) = -g\omega^2 h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + 2w \right). \quad (3.4)$$

4. Celem określenia składowych stycznych X, Y siły \bar{P} skorzystamy z warunków równowagi elementu o powierzchni $AB \, dx \, dy$ wyciętego z powłoki w kierunkach krzywizn głównych. Współczynniki A, B formy kwadratowej powiązane są z długością ds łuku na powierzchni środkowej następującą zależnością

$$ds^2 = A^2 dx^2 + B^2 dy^2.$$

W stanie wymuszonym powierzchnia ta doznaje odkształceń jednostkowych $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ na skutek czego forma kwadratowa przyjmuje postać

$$ds^2 = A^2(1+\varepsilon_1)^2 dx^2 + B^2(1+\varepsilon_2)^2 dy^2.$$

A zatem w równaniach równowagi wypisanych dla stanu wymuszonego współczynniki A, B należy zastąpić przez $A(1+\varepsilon_1)$ i $B(1+\varepsilon_2)$. Wobec tego dla powłoki walcowej ($A = B = R$) jest

$$T_{20} \frac{\partial}{\partial \alpha} [R(1+\varepsilon_2)] - R^2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(X_0+X) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} [R(1+\varepsilon_1) T_{20}] + R^2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(Y_0+Y) = 0,$$

skąd, po odrzuceniu wielkości małych wyższego rzędu (typu ε^2 , εX itp) oraz uwzględniając, że $X_0 = Y_0 \equiv 0$, otrzymujemy

$$X = \frac{T_{20}}{R} \cdot \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha}, \quad Y = -\frac{T_{20}}{R} \cdot \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta}. \quad (4.1)$$

Podstawiając dalej znane zależności

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right)$$

oraz (1.2), znajdujemy ostatecznie

$$X = g\omega^2 h \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right), \quad (4.2)$$

$$Y = -g\omega^2 h \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}. \quad (4.3)$$

5. Operatory różniczkowe L_{ij} w przypadku powłoki walcowej mają postać ([5] tabl.11 str.257)

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2},$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta},$$

$$L_{13} = L_{31} = v \frac{\partial}{\partial \alpha} - c^2 \cdot \left(\frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} - \frac{1-v}{2} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right),$$

$$L_{22} = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1-v}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \quad (5.1 \div 6)$$

$$L_{23} = L_{32} = \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{3-v}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta},$$

$$L_{33} = c^2 \left(\nabla^4 + 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) + 1,$$

gdzie

$$\nabla^4 \equiv \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}.$$

W dalszym ciągu należy operatory powyższe podstawić do równania macierzowego (2.6), wzgl. równoważnego mu układu trzech równań skalarowych, uwzględniając przy tym związki (3.4) oraz (4.2) i (4.3). W rezultacie otrzymuje się następujący podstawowy układ jednorodnych równań różniczkowych:

$$u'' + \frac{1-v}{2} u'' + \frac{1+v}{2} v'' + v w' - c^2 \cdot \left(w''' - \frac{1-v}{2} w''' \right) + \Omega (v'' + w') = 0,$$

$$\frac{1+v}{2} \cdot u'' + v'' + \frac{1-v}{2} \cdot v'' + w' - c^2 \frac{3-v}{2} \cdot w''' - \Omega u'' = 0, \quad (5.7 \div 9)$$

$$v u' - c^2 \left(u''' - \frac{1-v}{2} u''' \right) + v' - c^2 \frac{3-v}{2} v''' + c^2 (w'' + 2w''' + w'''' + 2w'' + w) +$$

$$+ w + \Omega (w'' + 2w) = 0,$$

gdzie:

$$\Omega \equiv \frac{1-v^2}{E} \rho \omega^2 R^2; \quad (5.10)$$

przecinkiem i kropką oznaczono różniczkowanie podług współrzędnych walcowych α i β .

6. Układ (5.7 ÷ 9) rozwiązuje się przez podstawienie ([1] 22.34, także [2] 9)

$$u = U \cdot \cos \lambda_m \alpha \cdot \cos n\beta,$$

$$v = V \sin \lambda_m \alpha \cdot \sin n\beta, \quad (6 \cdot 1 \div 3)$$

$$w = W \sin \lambda_m \alpha \cdot \cos n\beta,$$

$$\lambda_m = m\pi R/L$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots$$

spełniające zarówno warunek okresowości dla współrzędnej β , jak i jednorodne warunki brzegowe zadane dla $\alpha = 0$ i $\alpha = L/R$:

$$v = w = T_1 = M_1 = 0. \quad (6.4)$$

Należy podkreślić, że warunki te dotyczą wariacji przemieszczeń wzgl. sił i momentów, występujących w stanie wymuszonym.

W rezultacie podstawienia funkcji (6.1 ÷ 3) do (5.7 ÷ 9) otrzymuje się następujący układ trzech równań algebraicznych:

$$-U \left[\lambda_m^2 + \frac{1-v}{2} n^2 \right] + V \left[\frac{1+v}{2} \lambda_m n + \lambda_m n \Omega \right] + W \left[v \lambda_m + \lambda_m \Omega + c^2 (\lambda_m^3 - \frac{1-v}{2} \lambda_m n^2) \right] =$$

$$U \left[\frac{1+v}{2} \lambda_m n - \lambda_m n \Omega \right] - V \left[n^2 + \frac{1-v}{2} \lambda_m^2 \right] - W \left[n + c^2 \frac{3-v}{2} \lambda_m^2 n \right] = 0,$$

(6.5÷7)

$$-U \left[v \lambda_m + c^2 (\lambda_m^3 - \frac{1-v}{2} \lambda_m n^2) \right] + V \left[n + c^2 \frac{3-v}{2} \lambda_m^2 n \right] +$$

$$+ W \left[1 - (n^2 - 2) \Omega + c^2 (\lambda_m^2 + n^2)^2 - c^2 (2n^2 - 1) \right] = 0.$$

Niezerowe rozwiązanie tego układu, dla niewiadomych stałych U, V, W istnieje wówczas, gdy wyznacznik główny Δ układu zeruje się. Warunek ten prowadzi do równania trzeciego stopnia

$$\Delta \equiv -a_3 \Omega^3 + a_2 \Omega^2 - a_1 \Omega + a_0 = 0, \quad (6.8)$$

które posiada jeden pierwiastek rzeczywisty i dodatni. Wynika stąd, że układ (5.7 + 9) posiada niezerowe rozwiązania tylko dla szczególnych wartości parametru $\Omega = \Omega_{kr}$. Ponieważ parametr ten zależy m.in. od ω (por. (5.10)), przeto okazuje się, że stan odkształcenia powłoki określony wektorem \vec{q} możliwy jest tylko przy szczególnych wartościach $\omega = \omega_{kr}$, odpowiadających prędkościom krytycznym.

Współczynniki równania (6.8), po odrzuceniu małych wyższego rzędu (tzn. proporcjonalnych do c^4 i c^6) są

$$a_3 = \lambda_m^2 n^2 (n^2 - 2),$$

$$a_2 = c^2 \cdot \lambda_m^2 n^2 \left[(\lambda_m^2 + n^2)^2 - 2n^2 - \frac{3-\nu}{2} \cdot \lambda_m^2 + 1 \right],$$

$$a_1 = a_{10} + c^2 a_{1c},$$

$$a_{10} = \frac{1-\nu}{2} (n^2 - 2) (\lambda_m^2 + n^2)^2 + \frac{1-\nu}{2} \cdot \lambda_m^2 (\nu \lambda_m^2 - n^2),$$

$$a_{1c} = \lambda_m^2 \cdot n^2 (\lambda_m \cdot n - 2) \cdot \left(\frac{1-\nu}{2} n^2 - \lambda_m^2 \right) + \lambda_m^4 \left(\frac{1-\nu}{2} \cdot \lambda_m^2 - n^2 \right);$$

(6.9+17)

$$a_c = a_{00} + c^2 \cdot a_{0c},$$

$$a_{00} = \frac{1-\nu}{2} \cdot (\lambda_m^2 + n^2)^2 - n^2 \left(\lambda_m^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) + \frac{\nu \lambda_m^2}{2} (2n^2 - \nu \lambda_m^2),$$

$$a_{0c} = \frac{1-\nu}{2} (\lambda_m^2 + n^2) \cdot \left[(\lambda_m^2 + n^2)^2 - 2n^2 + 1 \right] - \\ - (1-\nu) \lambda_m^4 \cdot (2n^2 + \nu \lambda_m^2) - \frac{5 + 4\nu - \nu^2}{4} \cdot \lambda_m^2 \cdot n^4.$$

7. Poszukiwanie ω_{kr} wymaga zasadniczo rozwiązania równania algebraicznego trzeciego stopnia (6.8). Celem ominięcia tej trudności zauważmy, że bezwymiarowy parametr $\Omega \ll 1$, z uwagi na to, iż jest on proporcjonalny do bardzo małego czynnika ρ/E (który np. dla stali jest rzędu 10^{-9} sec²/cm²). Jeżeli zatem w równaniu (6.8) pominiemy dwa pierwsze wyrazy, jako bardzo małe w porównaniu z pozostałymi, to otrzymamy wprost

$$\Omega = \frac{a_0}{a_1} \quad (7.1)$$

Ostatecznie, na podstawie (5.10) znajdujemy przybliżony wzór na krytyczną prędkość kątową

$$\omega_{kr}^2 = \frac{a_0}{a_1} \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{R^2} \quad (7.2)$$

względnie

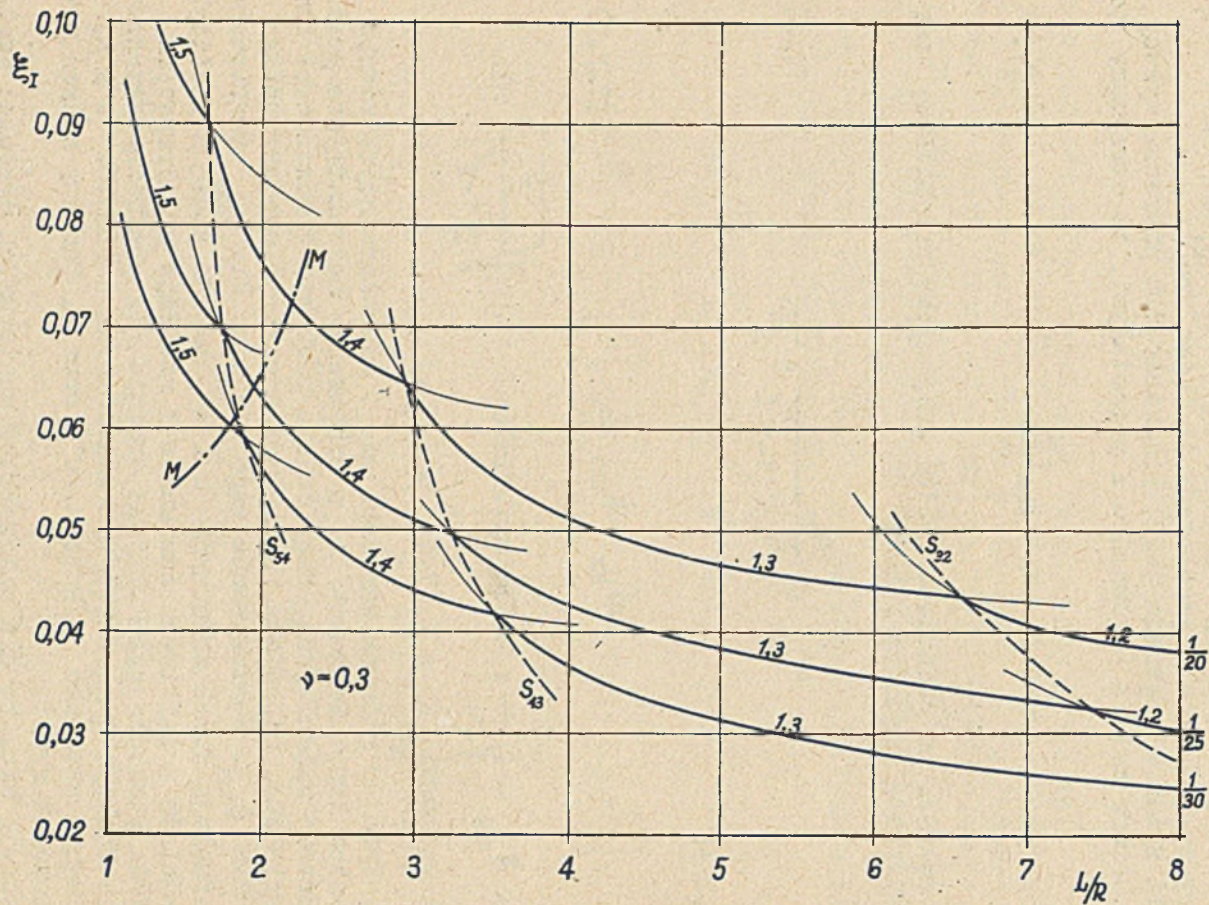
$$\omega_{kr} = \xi_{mn} \frac{K}{R}, \quad (7.2.1)$$

gdzie $\xi_{mn} = \sqrt{\frac{a_0}{a_1}}$; stała materiałowa $K = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$, dla

stali stopowej $K = 5,17 \cdot 10^5$ cm/sek.

8. Spośród różnych wartości ω_{kr} , odpowiadających różnym wariantom liczb falowych m, n znaczenie najważniejsze posiada wartość najmniejsza, określająca pierwsze (podstawowe) obroty krytyczne. Odpowiada im minimalna wartość współczynnika $\xi_I = \min \xi_{mn}$. Poszukiwanie tego minimum, dla ξ_{mn} traktowanego jako funkcja dwóch zmiennych m i n - metodą znaną z analizy prowadzi do uciążliwych rachunków i nie daje przejrzystych wyników. Znacznie wygodniejsze okazuje się graficzne przedstawienie funkcji $\xi_{mn} = \xi(L/R)$ dla różnych wariantów m i n , przy danym stosunku h/R (tzn. c^z) oraz ν . Odnośny wykres przedstawiono na rys.2.

Okazuje się, że dla najczęściej spotykanych długości względnych ($L/R < 7$) pierwsze obroty krytyczne następują przy jednej połowie fali w kierunku osiowym ($m = 1$). Ilość fal na obwodzie

Rys. 2. Wykres $\mu_T = f(L/R)$

walca zależy od długości oraz grubości względnej bębna. Jak widać z wykresu najczęściej występują wartości $n = 3, 4, 5$, przy czym bębnom krótszym odpowiadają większe liczby n . Dla bębnow dłuższych i dostatecznie grubych w grę może także wchodzić $n = 2$.

Na wykresie wrysowane są również linie $S_{i,i+1}$ ($i=2,3,4$), będące miejscem geometrycznym punktów przecięcia się krzywych, odpowiadających różnym wartościom n . Linie te odznaczają zatem obszary różnych postaci utraty stateczności.

Wpływ grubości powłoki (wyrażony współczynnikiem c^2) na prędkość krytyczną jest dość znaczny; na ogół grubszym powłokom odpowiadają mniejsze liczby falowe n .

9. Uproszczony wzór dla wyznaczania podstawowej prędkości krytycznej można uzyskać także na innej drodze. Mianowicie analizując wartości poszczególnych stałych a_{ij} (wzory 6.8÷16) można się przekonać, iż składowe styczne X, Y siły \bar{P} wywierają nieznaczny wpływ na wielkość ω_{kr}^I . Można zatem przyjąć $X \equiv Y = 0$, co jest równoznaczne z założeniem (por. (4.1))

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} = 0.$$

Wówczas, jak wiadomo [5], podstawowy układ trzech równań różniczkowych powłoki walcowej można zastąpić jednym równaniem ósmego rzędu dla funkcji potencjalnej $\Phi(\alpha, \beta)$

$$c_*^2 (\nabla^2 + 1)^2 \nabla^4 \Phi - 2c_*^2 (1-\nu) \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \right) \nabla^2 \Phi + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} - \frac{R^2}{Eh} Z = 0, \quad (9.1)$$

$$\text{gdzie} \quad c_*^2 = \frac{c^2}{1-\nu^2} = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}. \quad (9.2)$$

Obciążenie Z (3.4) obecnie określa wzór

$$Z = -\rho \omega^2 h \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 2 \right) \nabla^4 \Phi, \quad (9.3)$$

który podstawiony do (9.1) daje ostatecznie

$$c_*^2 (\nabla^2 + 1)^2 \nabla^4 \Phi - 2c_*^2 (1-\nu) \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \right) \nabla^2 \Phi + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \\ + \Omega^* \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 2 \right) \nabla^4 \Phi = 0, \quad (9.4)$$

gdzie

$$\Omega^* = \frac{\Omega}{1-\nu^2} = \frac{\rho \omega^2 R^2}{E}. \quad (9.5)$$

Warunki brzegowe (6.4) sprowadzają się do żądania, aby dla $\alpha = 0$, $\alpha = L/R$ było

$$\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \alpha^6} = 0;$$

ponadto musi być oczywiście

$$\Phi(\alpha_0, \beta_0) = \Phi(\alpha_0, \beta_0 + 2\pi).$$

Można zatem przyjąć

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \lambda_m \alpha \cdot \sin n \beta \quad (9.6)$$

A_{mn} - stałe dowolne.

Podstawienie do (9.4) daje równanie

$$c_*^2 (\lambda_m^2 + n^2 - 1)^2 \cdot (\lambda_m^2 + n^2)^2 + 2c_*^2 \cdot (1-\nu) (\lambda_m^2 - n^2) \cdot \\ \cdot (\lambda_m^2 + n^2) \cdot \lambda_m^2 + \lambda_m^4 - (n^2 - 2) (\lambda_m^2 + n^2) \Omega^* = 0,$$

które spełnione jest tylko dla szczególnych wartości parametru $\Omega^* = \Omega_{kr}^*$. Wprowadzając dla skrócenia zapisu współczynnik

$$\xi_{mn}^{*2} = \frac{c^2}{n^2 - 2} \left[(\lambda_m^2 + n^2)^2 - 2(\lambda_m^2 + n^2) + 1 + 2(1-\nu)\lambda_m^2 \frac{\lambda_m^2 - n^2}{\lambda_m^2 + n^2} + \frac{(1-\nu^2)\lambda_m^4}{c^2(\lambda_m^2 + n^2)^2} \right], \quad (9.7)$$

można wzorowi ostatecznemu nadać postać podobną do (7.2.1)

$$\omega_{kr} = \xi_{mn}^* \frac{K}{R}, \quad (9.8)$$

gdzie $\xi_{mn}^* = \min \xi_{mn}^*$. Wzór powyższy, ze względu na obecność w mianowniku wyrażenia $(n^2 - 2)$ daje wartości $\xi_{mn}^* > 0$ tylko dla $n \geq 2$. Ograniczenie to nie jest istotne, albowiem w świetle wyników paragrafu poprzedniego przypadek $n=1$ nie posiada znaczenia praktycznego.

10. Rozważania powyższe są słuszne dopóty, dopóki naprężenia obwodowe przy prędkości ω_{kr} nie przekroczą granicy plastyczności (ściślej granicy proporcjonalności)

$$\sigma_{2kr} \leq R_{pl}. \quad (10.1)$$

Korzystając ze wzorów (1.2), (1.3.1) i (7.2.1) znajdujemy

$$\sigma_{2kr} = \rho \omega_{kr}^2 R^2 = \rho \xi_{mn}^2 K^2 = \xi_{mn}^2 \frac{E}{1-\nu^2}, \quad (10.2)$$

wobec czego warunek (10.1) sprowadza się do żądania

$$\xi_{mn}^2 \leq (1-\nu^2) \frac{R_{pl}}{E}. \quad (10.3)$$

Jeżeli dla stali stopowych przyjmimy $R_{pl} = 4000 \text{ kg/cm}^2$, $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, to otrzymamy $\xi_T \leq 0,043$; jest to wartość ograniczająca zakres stosowalności wzorów (7.2.1), (9.8) wzgl. wykresu na rys.2.

11. Dalsze ograniczenia wynikają z możliwości wystąpienia efektu brzegowego w powłoce wirującej, zamkniętej z obu stron tarczami. Na wstępie niniejszych rozważań przyjęliśmy założenie dotyczące równości promieniowych odkształceń brzegów powłoki oraz tarcz. Na ogół jednak warunek ten nie jest spełniony; tak np. dla tarczy stalowej o stałej szerokości, złączonej z powłoką o grubości względnej $h/R = 1/20$, odkształcenie tej ostatniej jest 6,15 razy większe niż odkształcenia tarczy.

Wskutek tego jeszcze w stanie podkrytycznym w pobliżu brzegów powłoki pojawiają się dodatkowe siły i momenty, które niewątpliwie wywierają pewien wpływ na wartość ω_{kr} . Jest on dość istotny zwłaszcza w przypadku bębnow krótkich (tzn. o małej wartości stosunku L/R).

Zauważmy bowiem, że dodatkowe ugięcia powłoki (a tym samym siły i momenty) spowodowane efektem brzegowym mają charakter szybko zanikającej fali. Jej długość określona jest wzorem znanym z teorii efektu brzegowego

$$L_f = \frac{2\pi\sqrt{hR}}{4\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (11.1)$$

I tak np. ugięcie promieniowe powłoki w przekroju odległym od brzegu o połowę długości fali jest $e^{\pi} = 23,4$ razy mniejsze niż na samym brzegu. Wynika stąd, że już w tej odległości wspomniany efekt ma znikomy wpływ na stan naprężenia powłoki.

Ze względu na obustronne zamknięcie powłoki tarczami można zatem przyjąć, że graniczną długością L_g bębna z uwagi na efekt brzegowy jest podwójna długość fali L_f .⁸ Dla powłoki stalowej ($\nu = 0,3$) jest

$$L_g = 9,8 \sqrt{hR} \quad (11.2)$$

Jeżeli do rozważań wprowadzimy stosunek długości

$$\lambda = \frac{L}{L} = 9,8 \frac{\sqrt{h/R}}{L/R}, \quad (11.3)$$

to należy stwierdzić, że wyniki rozważań zawarte w niniejszej pracy są dostatecznie dokładne jedynie dla tych bębnow, dla których $\lambda < 1$. Na rys.2 wkreślona jest linia graniczna M, wyznaczona wg równania $\lambda = 1$. Bębny, dla których $\lambda > 1$ będziemy nazywać krótkimi. Odpowiadające im punkty na wykresie są położone na lewo od linii M.

Ze wzoru (11.3) wynika, że o zakwalifikowaniu danego bębna do kategorii długich, wzgl, krótkich decyduje nie tylko długość, ale także grubość względna powłoki.

Otrzymano 20 stycznia 1962 r.

LITERATURA

- [1] W.W. B o ł o t i n - Dinamiczeskaja ustojcziwost' uprugich sistem Moskwa 1956
- [2] Z. B r z o s k a - Obroty krytyczne krótkich bębnow "Techn. Lotn." Nr 5 - 1953.
- [3] J. F l ũ g g e - Statik und Dynamik der Schallen - Berlin 1941.
- [4] O.D. O n i a s z w i l i - Niekotoryje dinamiczeskije zadaci teoriii obołoczek - Moskwa 1957.
- [5] W.Z. W ł a s o w - Obszczaja teorija obołoczek - Moskwa 1949.

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОСТЕННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ОБОЛОЧКИ

Резюме

Рассматривается устойчивость тонкостенной цилиндрической оболочки нагруженной центробежными инерционными силами, вызванными вращением оболочки вокруг её геометрической оси. Оболочка замкнута с обеих сторон упругими дисками.

Этот вопрос тесно связан с определением критического количества оборотов ротора барабанного типа.

Исследование устойчивости провели по методу малых вынуждений. Получено уравнение (7.2.1) для расчета критической угловой скорости, при чем коэффициент ξ_1 определяется по диаграмму 2, или же может быть рассчитан по приближенной формуле (9.7).

Даются условия ограничивающие верность выведенных формул, следующие из существования краевого эффекта и из принятой (физической и геометрической) линейности вопроса.

STABILITY OF THE SPINNING THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELL

Summary

A stability of the thin-walled cylindrical shell charged with centrifugal forces of inertia caused by a rotation of a shell round its geometrical axis has been considered. The shell was closed on both sides by elastic shields.

This problem is strictly connected with the determination of critical speeds of a drum type rotor.

The stability tests were carried out on the basis of constant input functions. A formula was received (7.2.1.) for computation of a critical angle speed. The coefficient may be determined from the diagram of the drawing 2, or it may be computed by means of an approximate formula (9.7).

The conditions limiting the validity of derived formulae, resulting from the existence of edge effect and the assumed physical and geometrical linear shape of the problem, have been given.