ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 63 Mechanika z.13 1962

JÓZEF WOJNAROWSKI, JULIAN ZIELIŃSKI

PŁASKIE SKRĘCANIE PRZEGUBU GUMOWEGO

Streszczenie: W pracy przeprowadzono obliczenia dla przegubu gumowego obciążonego statycznie momentem skręcającym M.
Kontrawarianty tensor naprężenia, spełniający równania równowagi (4.1) oraz warunki brzegowe (4.3) wyrażono przez pochodne potencjału sprężystego względem odpowiednich współrzędnych tensora odkształcenia.
Potencjał sprężysty dla materiałów kauczuko-podobnych w przypadku dowolnego odkształcenia wyraża się przez dwa niezmienniki stanu odkształcenia (4.6).
Stosując podaną postać potencjału sprężystego wyznaczono współrzędne fizyczne tensora naprężenia oraz kąt skręcenia jako funkcję momentu M.

1. W S T Ę P

W budowie maszyn mają zastosowanie przeguby gumowe pracujące na skręcanie płaskie i przestrzenne. Najczęściej spotykane są przeguby pracujące na skręcanie płaskie. Przegub taki przedstawia wydrążony walec gumowy przywulkanizowany na powierzchniach tworzących do tulei stalowych. Wydrążony walec gumowy umożliwia ruch względny tulei zewnętrznej, do której przyłożony jest moment skręcający, względem tulei wewnętrznej, która jest nieruchoma.

W niniejszej pracy przeprowadzono obliczenia dla przegubu gumowego przy obciążeniu statycznym. Przyjmując, że guma jest materiałem nieściśliwym izotropowym, wyrażono potencjał sprężystości gumy przez trzy stałe materiałowe C_1, C_2, C_3 [2] .

2. STAN ODKSZTAŁCENIA

Wydrążony walec gumowy posiada w stanie nieodkształconym długość L, promień wewnętrzny r_1 i zewnętrzny r_2. Powierzchnie czołowe są płaskie. Punkty leżące na powierzchni zewnętrznej doznają skończonego przemieszczenia w płaszczyznach normalnych do osi walca, względem nieruchomej powierzchni wewnętrznej. Jeżeli długość L jest duża w porównaniu z grubością $r_2 - r_1$, to przemieszczenia punktów w kierunku osi walca są małe i można je pominąć.

Odkształcony walec pozostaje w równowadze poddziałaniem naprężeń stycznych rozłożonych równomiernie na powierzchniach tworzących walca. Przyjęto układ współrzędnych kartezjańskich z początkiem układu w p. O. Współrzędne kartezjańskie punktu P w stanie odkształconym są:

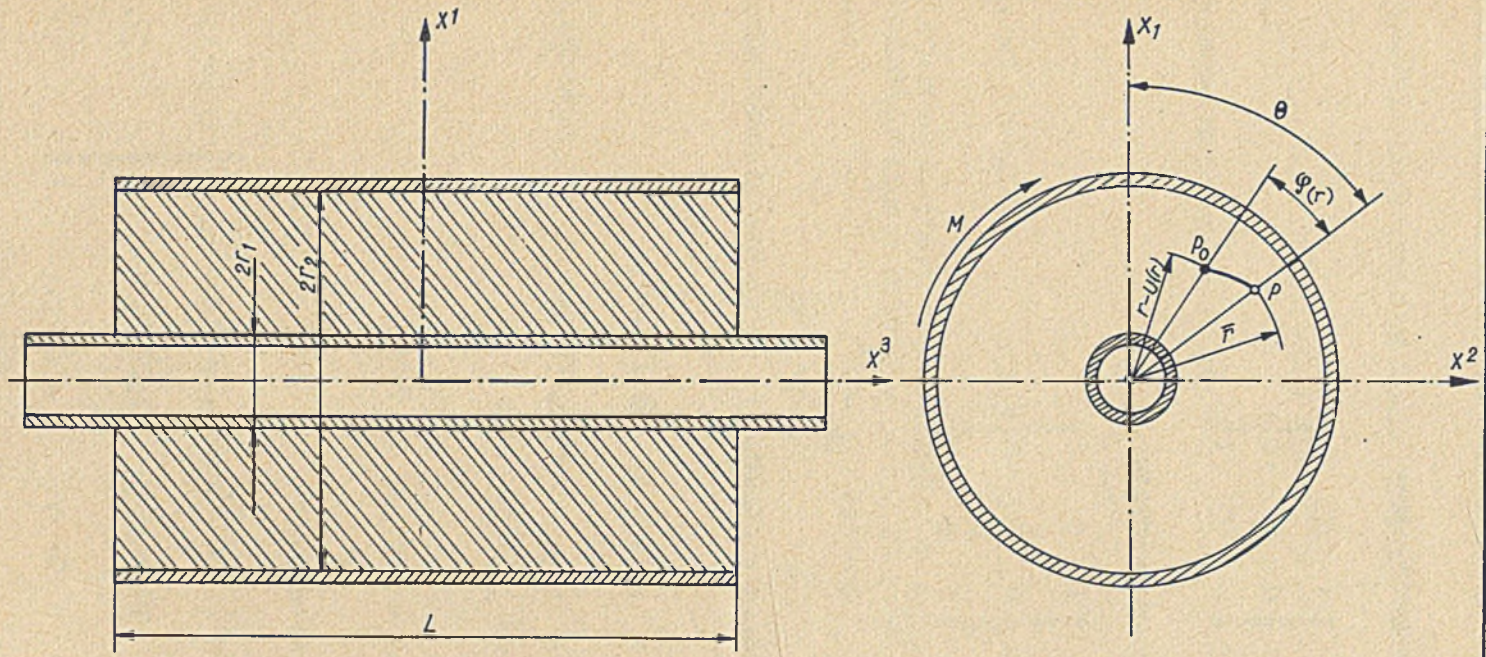
$$y^1, y^2, y^3.$$

W stanie nieodkształconym punkt P przemieści się do P_o i jego współrzędne kartezjańskie będą:

$$x^1, x^2, x^3.$$

Wyrażając współrzędne kartezjańskie przez r, θ, z, które są współrzędnymi układu walcowego, związanego z ciałem, otrzymamy:

$$\begin{aligned} y^1 &= r \cos \theta, \\ y^2 &= r \sin \theta, \\ y^3 &= z. \end{aligned} \tag{2.1}$$



Rys.1. Układ współrzędnych związany z powłoką

Kowariantny tensor metryczny

$$G_{ik} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{2.2}$$

Kontrawariantny tensor metryczny

$$G^{ik} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \tag{2.3}$$

$$G = \det G_{ik} = r^2. \tag{2.4}$$

Współrzędne kartezjańskie punktu P_o w stanie nieodkształconym są

$$\begin{aligned} x^1 &= (r - u) \cos (\theta - \varphi), \\ x^2 &= (r - u) \sin (\theta - \varphi), \\ x^3 &= z, \end{aligned} \tag{2.5}$$

gdzie $\quad u = u(r); \quad \varphi = \varphi(r).$

Kowariantny tensor metryczny

$$g_{ik} = \begin{Vmatrix} (1-u') + \varphi'^2(r-u)^2, & -\varphi'(r-u)^2, & 0 \\ -\varphi'(r-u)^2, & (r-u)^2, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}, \tag{2.6}$$

$$g = \det g_{ik} = (1 - u')^2 (r-u)^2. \tag{2.7}$$

Uwzględniając warunek nieściśliwości $\frac{G}{g} = 1$, otrzymamy

$$(1-u')^2 \, (r-u)^2 = r^2. \tag{2.8}$$

Rozwiązaniem równania (2.8) jest

$$u = r \pm (r^2 + c)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.9}$$

Warunki brzegowe: $u(r_1) = u(r_2) = 0.$

Dla spełnienia powyższych warunków brzegowych funkcja $u(r) \equiv 0$. Kowariantny tensor metryczny przyjmie postać

$$g_{ik} = \begin{Vmatrix} 1 + \varphi'^2 r^2, & -r^2\varphi', & 0 \\ -r^2 \varphi', & r^2, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}. \tag{2.10}$$

Kontrawiantny tensor metryczny

$$g^{ik} = \begin{Vmatrix} 1, & \varphi', & 0 \\ \varphi', & \frac{1}{r^2} + \varphi'^2, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}; \tag{2.11}$$

$$g = \det g_{ik} = r^2. \tag{2.12}$$

Niezmienniki stanu odkształcenia są

$$\begin{aligned} I_1 &= g^{rs} G_{rs} = 3 + r^2 \varphi'^2, \\ I_2 &= G^{rs} g_{rs} \; I_3 = 3 + r^2 \varphi'^2, \\ I_3 &= \frac{G}{g} = 1, \qquad (r,s = 1,2,3) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Tensor pomocniczy

$$B^{ik} = I_1 g^{ik} - g^{ir} g^{ks} G_{rs}, \tag{2.14}$$

$$B^{ik} = \begin{Vmatrix} 2, & \varphi', & 0 \\ \varphi', & \frac{2}{r^2} + \varphi'^2, & 0 \\ 0, & 0, & 2 + r^2\varphi'^2 \end{Vmatrix}. \tag{2.15}$$

3. ZWIĄZEK POMIĘDZY NAPRĘŻENIEM I ODKSZTAŁCENIEM

Dla ciał gumopodobnych potencjał sprężystości W można wyrazić jako funkcję dwóch niezmienników stanu odkształcenia

$$W = W(I_1, I_2), \tag{3.1}$$

wówczas [1]

$$\tau^{ik} = \Phi g^{ik} + \Psi B^{ik} + p\, G^{ik}, \tag{3.2}$$

gdzie:

$$\Phi = 2\, I_3^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial W}{\partial J_1},$$

$$\Psi = 2\, I_3^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial W}{\partial J_2}, \tag{3.3}$$

$$p = 2\, I_3^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial W}{\partial I_3}.$$

Uwzględniając (2.3), (2.11), (2.15) otrzymamy:

$$\tau^{11} = \Phi + 2\Psi + p,$$

$$\tau^{22} = \Phi\left(\frac{1}{r^2} + \varphi'^2\right) + \Psi\left(\frac{2}{r^2} + \varphi'^3\right) + p\,\frac{1}{r^2}, \tag{3.4}$$

$$\tau^{33} = \Phi + \Psi(2 + r^2 \varphi'^2) + p,$$

$$\tau^{12} = \tau^{21} = (\Phi + \Psi)\varphi', \tag{3.4}$$

$$\tau^{13} = \tau^{23} = 0.$$

4. RÓWNANIA RÓWNOWAGI

Tensor naprężeń τ^{ik} spełnia równania równowagi, które, przy pominięciu sił masowych, przyjmują postać

$$\tau^{ik}\|_i = 0, \tag{4.1}$$

$$\tau^{ik}{}_{,i} + \Gamma^{i}_{ir}\tau^{rk} + \Gamma^{k}_{ir}\tau^{ir} = 0 \tag{4.2}$$

i warunki brzegowe

$$\tau^{ik} n_k = P^i \quad (i,k,r = 1,2,3) \tag{4.3}$$

gdzie: $\|$ - oznacza pochodną kowariantną w odniesieniu do ciała odkształconego,

Γ^{m}_{ns} - symbole CHRISTOFFELa drugiego rodzaju,

P^i - kontrawariantne składowe sił powierzchniowych,

n_k - kowariantne składowe wektora jednostkowego.

Dla przyjętego układu współrzędnych unoszonych, symbole CHRISTOFFELa wynoszą:

$$\Gamma^{1}_{22} = -r, \quad \Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = \frac{1}{r}. \tag{4.4}$$

Wstawiając (3.4) i (4.4) do (4.2) otrzymuje się następujący układ równań

$$\frac{d}{dr}(\Phi+2\Psi+p) + \frac{1}{r}(\Phi+2\Psi+p) - r\left[\Phi\left(\frac{1}{r^2}+\varphi'^2\right)+\psi\left(\frac{2}{r^2}+\varphi'^2\right)+p\frac{1}{r^2}\right] = 0,$$

$$\frac{d}{dr}\left[(\Phi+\Psi)\varphi'\right]+\frac{3}{r}(\Phi+\Psi)\varphi' = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \Theta} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Rozwiązanie układu równań (4.5) przeprowadzono dla potencjału sprężystości przyjętego w postaci [2]:

$$W = C_1(I_1-3) + C_2(I_2-3) + C_3(I_1^2-9), \tag{4.6}$$

gdzie: C_1, C_2, C_3 - stałe materiałowe.

Dla tak przyjętego potencjału sprężystości drugie równanie układu równań (4.5) sprowadza się do równania trzeciego stopnia ze względu na φ'

$$\varphi'^3 + \frac{B}{r^2}\varphi' - \frac{B_1}{r^5} = 0, \tag{4.7}$$

gdzie:

A - stała całkowania,

$$B = \frac{C_1 + C_2 + 3C_3}{C_3},$$

$$B_1 = \frac{A}{2C_3}.$$

Aby rozwiązać równanie (4.7) należy rozpatrzyć znak wyróżnika tego równania. Wartość dodatnia, lub ujemna wyróżnika zależy od stałych materiałowych C_1, C_2, C_3. Stałe C_1 i C_2 są zawsze dodatnie, natomiast stała C_3 może przyjmować wartości dodatnie, lub ujemne, zależnie od gatunku gumy. Ponadto $|C_3| < \frac{C_1 + C_2}{3}$ [4].

W dalszym ciągu rozpatrzono przypadek gdy $C_3 > 0$.
Wtedy $B > 0$, $B_1 > 0$ i $\Delta > 0$. Równanie (4.7) posiada wówczas jeden pierwiastek rzeczywisty

$$\varphi' = \frac{2}{r}\left(\frac{B}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh}\frac{\beta}{3}, \tag{4.8}$$

gdzie

$$\operatorname{sh}\beta = \frac{B_1}{2\,r^2}\left(\frac{27}{B^3}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.9}$$

Rozwiązując równanie różniczkowe (4.8) otrzymamy:

$$\varphi(\beta) = -\frac{3a}{2}\operatorname{sh}\frac{\beta}{3} + a\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arc\,tg}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh}\frac{\beta}{3}\right] + F, \tag{4.10}$$

gdzie

$$a = 2\left(\frac{B}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$b = \frac{3\,B_1}{2\,B}\left(\frac{3}{B}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta = \operatorname{ar\,sh}\frac{b}{r^2},$$

F - stała całkowania.

We wzorach na współrzędne tensora naprężenia (3.4) występuje funkcja p. Z trzeciego równania (4.5) wynika, że $p = p(r)$. Funkcję $p(r)$ wyznaczymy z pierwszego równania (4.5), które można sprowadzić do następującej postaci

$$\frac{dp}{dr} + \frac{d}{dr}(\Phi + 2\Psi) - r(\Phi + \Psi)\,\varphi'^2 = 0. \tag{4.11}$$

Wykorzystując związki (3.3) i (4.6) oraz drugie równanie układu równań (4.5), otrzymamy:

$$\frac{d}{dr}(p+\Phi) - \frac{A}{r^2}\varphi' = 0. \tag{4.12}$$

Po uwzględnieniu (4.8) i (4.9), równanie (4.12) można przekształcić do następującej postaci

$$\frac{d(p+\Phi)}{d\,\mathrm{sh}\,\beta} - D\,\mathrm{sh}\,\frac{\beta}{3} = 0. \tag{4.13}$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$p = \frac{9}{8}D\left(\mathrm{sh}\,\frac{\beta}{3}\,\mathrm{sh}\,\beta - \frac{1}{3}\,\mathrm{ch}\,\frac{\beta}{3}\,\mathrm{ch}\beta\right) - \frac{8}{3}BC_3\,\mathrm{sh}^2\,\frac{\beta}{3} - D_1 + p_o, \tag{4.14}$$

gdzie $D = -\frac{2\,A\,B^2}{9\,B_1} = -\frac{2}{9\,C_3}(C_1 + C_2 + 3\,C_3)^2,$

$D_1 = 2\,(C_1 + 3\,C_3),$

p_o - stała całkowania.

Współrzędne kontrawariantne tensora naprężenia są

$$\tau^{11} = 4\,C_2 + \frac{9}{8}D\left(\mathrm{sh}\,\frac{\beta}{3}\,\mathrm{sh}\,\beta - \frac{1}{3}\,\mathrm{ch}\,\frac{\beta}{3}\,\mathrm{ch}\beta\right) + p_o,$$

$$r^2\tau^{22} = \frac{8\,B^2}{9\,B_1}\left(\frac{B}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(D_1 + \frac{4}{3}B\,\mathrm{sh}^2\,\frac{\beta}{3}\right)\mathrm{sh}\beta\,\mathrm{sh}^2\,\frac{\beta}{3} + \frac{8}{3}\frac{C_2B}{B_1}\left(\frac{B}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{2B}{3}\,\mathrm{sh}^2\frac{\beta}{3}\right)\mathrm{sh}\beta$$

$$+ \frac{2B}{3\,B_1}\left(\frac{B}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{9}{8}D\left(\mathrm{sh}\,\frac{\beta}{3}\,\mathrm{sh}\beta - \frac{1}{3}\,\mathrm{ch}\,\frac{\beta}{3}\,\mathrm{ch}\beta\right) + p_o\right]\mathrm{sh}\,\beta, \tag{4.15}$$

$$\tau^{33} = 4\,C_2 + \frac{8}{3}\,B\,C_2\,\mathrm{sh}^2\frac{\beta}{3} + \frac{9}{8}\,D\left(\mathrm{sh}\frac{\beta}{3}\,\mathrm{sh}\,\beta - \frac{1}{3}\,\mathrm{ch}\frac{\beta}{3}\,\mathrm{ch}\beta\right) + p_o,$$

$$\tau^{12} = \tau^{21} = Ar^{-3},$$

$$\tau^{13} = \tau^{23} = 0.$$

5. WARUNKI BRZEGOWE

Na zewnętrznej powierzchni tworzącej walca, działają siły powierzchniowe $\overline{P}$, wywołane momentem skręcającym $\overline{M}$. Jeżeli wyrazimy siły powierzchniowe przez ich współrzędne kontrawariantne P^j, to warunki brzegowe można przedstawić następująco

$$\tau^{ji}\,n_i = P^j. \tag{5.1}$$

Jednostkowy wektor normalny do powierzchni zewnętrznej będzie

$$\overline{n} = \frac{\overline{G}^1}{\sqrt{G^{11}}}. \tag{5.2}$$

Współrzędne kowariantne wektora jednostkowego wynoszą

$$n_1 = (G^{11})^{-\frac{1}{2}} = 1, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 0. \tag{5.3}$$

Współrzędne kontrawariantne sił powierzchniowych wyznaczymy z zależności

$$P^j = \overline{P}\,.\,\overline{G}^j. \tag{5.4}$$

Wektor $\overline{P}$ można przedstawić w postaci

$$\overline{P} = P^{(i)}\,\overline{G}_i\,(G_{ii})^{-\frac{1}{2}}, \tag{5.5}$$

gdzie $P^{(i)}$ - współrzędne fizyczne; wtedy współrzędne kontrawariantne wektora P będą

$$P^j = P^{(i)} \bar{G}_i (G_{ii})^{-\frac{1}{2}} \bar{G}^j = P^{(i)} (G_{ii})^{-\frac{1}{2}} \delta^j_i = P^{(j)} (G_{jj})^{-\frac{1}{2}} . \tag{5.6}$$

Podstawiając (5.6) do (5.1) otrzymamy

$$\tau^{ji} n_i (G_{jj})^{\frac{1}{2}} = P^{(j)} . \tag{5.7}$$

Współrzędne fizyczne $P^{(j)}$ mają wartość

$$P^{(1)} = 0, \quad P^{(2)} = \frac{M}{2\pi r_2^2 l}, \quad P^{(3)} = 0. \tag{5.8}$$

Po uwzględnieniu (4.15), (5.3) i (5.8), stała całkowania wynosi:

$$A = \frac{M}{2\pi l} . \tag{5.9}$$

6. WSPÓŁRZĘDNE FIZYCZNE TENSORA NAPRĘŻENIA

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \tau^{11} (G_{11} G_{11})^{\frac{1}{2}} = \tau^{11}, \\ \sigma_o &= \tau^{22} (G_{22} G_{22})^{\frac{1}{2}} = r^2 \tau^{22}, \\ \sigma_z &= \tau^{33} (G_{33} G_{33})^{\frac{1}{2}} = \tau^{33}, \\ \sigma_{ro} &= \tau^{12} (G_{11} G_{22})^{\frac{1}{2}} = r\tau^{12}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\sigma_r = 4\,C_2 + \frac{9}{8}\,D\left(\operatorname{sh}\frac{\beta}{3}\operatorname{sh}\beta - \frac{1}{3}\operatorname{ch}\frac{\beta}{3}\operatorname{ch}\beta\right) + p_o,$$

$$\sigma_o = \sigma_r + \left(C_2 + D_1 + \frac{4}{3}\,B\,\operatorname{sh}^2\frac{\beta}{3}\right)\frac{8}{3}\operatorname{sh}^2\frac{\beta}{3},$$

$$\sigma_z = \sigma_r + \frac{8}{3}\,B\,C_2\,\operatorname{sh}^2\frac{\beta}{3}, \tag{6.2}$$

$$\sigma_{ro} = \frac{M}{2\pi l}\,\frac{1}{r^2}.$$

Z warunku $\int_{r_1}^{r_2} \sigma_z\, r\, dr = 0$, który musi być spełniony na powierzchniach czołowych przegubu gumowego, wyznaczamy stałą całkowania p_o

$$p_o = \frac{2}{r_1^2 - r_2^2}\int_{r_1}^{r_2} \sigma_z^* r\,dr, \tag{6.3}$$

$$\sigma_z^* = \sigma_z - p_o.$$

W przypadku, gdy stała materiałowa $C_3 < 0$, znak wyróżnika równania (4.7) zależy dodatkowo od wielkości przyłożonego momentu skręcającego. Rozwiązanie tego przypadku uwarunkowane jest danymi eksperymentalnymi, co będzie przedmiotem osobnej pracy.

Otrzymano 15 lutego 1962 r.

LITERATURA

[1] A.E. Green, W. Zerna - Theoretical elasticity, Oxford 1954.

[2] S. Zahorski - A form of the elastic potential for rubber-like materials. Arch.Mech.Stos.5.XI.1959.

[3] L. Treloar - Fizika uprugosti kauczuka. Moskwa 1953.

[4] S. Zahorski - Pewne doświadczalne badania własności mechanicznych gumy. Konferencja Naukowa Olsztyn 1961.

[5] S.D. Ponomarew i inni - Rasczety na procznost w maszinostroeni. Moskwa 1958.

[6] N.E. Koczin - Wektornoe isczislenie i naczała tensornogo isczislenia. I.A.N. 1961.

ПЛОСКОЕ КРУЧЕНИЕ РЕЗИНО-МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ШАРНИРА

Резюме

В работе приводится решение для резино-металлического шарнира, нагруженного статически коаксиальным крутящим моментом M.

Контравариантный тензор напряжения (3.2) удовлетворяющий уравнениям равновесия (4.1) и граничным условиям (4.3) выражен через частные производные упругого потенциала относительно соответствующих координат тензора деформации.

Применено более общую формулу для упругого потенциала для резино-подобных материалов, зависящего от трех коэффициентов, характеризующих упругое свойства материяла [2].

Применяя метод А. Е. Грина [1] и более общий вид потенциала упругости для резино-подобных материалов, получены физические координаты напряжения (6.2), а также угол кручения в функции крутящего момента M (4.10).

PLANE TORSION OF RUBBER BUSHING WITH INNER AND OUTER METAL SLEEVES

Summary

In the paper a computation was carried out for a rubber bushing with inner and outer metal sleeves with a static load coaxial to the torsional moment M.

Contravariant stress tensor (3.2), which satisfies equilibrium conditions (4.1) and the boundary conditions (4.3) have been expressed by a partial derivative of the elastic potential towards corresponding deformation tensor coordinates.

A more general form of the elastic potential for rubber-like materials depending on the three material constants has been used [2].

Using A. E. GREEN's method [1] and using a more general form of the elastic potential, physical coordinates of the stress tensor by (6.2) and angle of torsion by (4.10) as of function torsional moment M were determined.