

RYSZARD GRYBOŚ  
Katedra Mechaniki Technicznej

STATECZNOŚĆ DŁGIEJ POWŁOKI WALCOWEJ  
PODDANEJ DZIAŁANIU CIŚNIENIA ZEWNĘTRZNEGO

Streszczenie: Omówiono aktualny stan wiedzy dotyczącej zagadnienia stateczności powłoki walcowej nieuzębrowanej, poddanej działaniu ciśnienia zewnętrznego. Wartości ciśnienia krytycznego, obliczone w oparciu o liniową teorię małych odkształceń powłok cienkich wykazują duże rozbieżności z danymi doświadczalnymi. Nieliniowa teoria dużych odkształceń tłumaczy te rozbieżności na gruncie analizy stanu odkształcenia powłoki przy obciążeniu nadkrytycznym. Zachodzi przy tym konieczność wprowadzenia górnej i dolnej wartości ciśnienia krytycznego. Zagadnienie nieliniowe rozwiązano przy pomocy metody Ritza. W zakończeniu omówiono pewne osobliwości, występujące przy analitycznym badaniu stateczności powłoki o dużej długości względnej.

1. PODZIAŁ ANALITYCZNYCH METOD BADANIA  
STATECZNOŚCI POWŁOK

Powłoka walcowa poddana działaniu ciśnienia zewnętrznego przy pewnej, tzw. krytycznej wartości tego ciśnienia może utracić stateczność. Oznacza to, iż pierwotna postać powłoki przestaje być stateczna, natomiast charakter taki przyjmuje postać inna, odkształcona. Odkształcenia te mają kształt kilku symetrycznie rozłożonych zagłębień. Jednakże postać ta nie gwarantuje już bezpiecznych warunków pracy konstrukcji, nie mówiąc o tym, że samo przejście do nowej formy równowagi ma zazwyczaj charakter awaryjny.



W zależności od rozmiarów względnych wgłębienia, jak też zasięgu, jakim odkształcenie obejmuje powłokę, mówimy o utracie stateczności lokalnej lub też ogólnej (integralnej). Z matematycznego punktu widzenia różnica polega przede wszystkim na tym, iż badanie stateczności lokalnej prowadzi się w oparciu o uproszczoną teorię powłok walcowych małowyniosłych, czego nie można uczynić w przypadku badania stateczności ogólnej.

Zagadnienie to wiąże się także z charakterem równań opisujących stan odkształcenia powłoki. Jeżeli bowiem założymy, iż odkształcenia są duże (ściślej mówiąc - skończone), to otrzymamy równania nieliniowe. Natomiast rozpatrując odkształcenia nieskończenie małe dochodzimy do równań liniowych, które zresztą można otrzymać z poprzednich, odrzucając jedynie wyrazy nieliniowe. Z tego punktu widzenia będziemy mówić o stateczności w ujęciu liniowym lub nieliniowym.

Na podstawie powyższych uwag nie trudno zrozumieć, że ustrój sprężysty, stateczny w ujęciu nieliniowym jest również stateczny w ujęciu liniowym. Natomiast twierdzenie przeciwne nie jest prawdziwe, albowiem ustrój stateczny w sensie liniowym może się okazać niestateczny, jeżeli badania prowadzić będziemy w oparciu o równania nieliniowe.

Z utratą stateczności ogólnej związane są małe odkształcenia (jakkolwiek przemieszczenia mogą być duże), wobec czego w tym przypadku możemy posługiwać się równaniami liniowymi.

Natomiast przy lokalnej utracie stateczności na powierzchni powłoki pojawiają się zagłębienia małych rozmiarów względnych, czemu towarzyszą duże odkształcenia właściwe. Dlatego ten typ stateczności bada się wyłącznie w ujęciu nieliniowym.

Mimo, że operacje matematyczne są wtedy znacznie bardziej skomplikowane, a dokładność obliczeń na ogół mniejsza, aniżeli w przypadku równań liniowych, to jednak tylko na tej drodze można wyjaśnić pewne zjawiska typowe dla stateczności powłok, a obserwowane w doświadczeniach lub w praktyce eksploatacyjnej.

Z pomocą teorii liniowej można jedynie wyznaczyć wartość ciśnienia krytycznego powłoki o kształcie idealnym (w danym przypadku walcowym), natomiast nie można nic wnioskować o jej odkształceniach w zakresie nadkrytycznym. Co gorsza, ciśnienia krytyczne wyznaczone w ten



sposób są prawie zawsze znacznie większe od tych, jakie obserwujemy w doświadczeniach. Rozbieżności są przy tym tak wielkie i systematyczne, że nie dadzą się wytłumaczyć niedokładnością obliczeń lub przypadkowym zaburzeniem warunków eksperymentu. Przyczyny muszą tkwić w błędnych założeniach teorii.

Narazie przeto konstruktorzy samolotów i okrętów posługiwali się wzorami empirycznymi.

Dopiero w 1934 roku L.H. Donnel [1], a następnie T. Karman i H.S. Tsien [2] wyprowadzili nieliniowe równania powłok cienkich, uwzględniając równocześnie wstępne odkształcenia. W rzeczy samej okazało się, iż nieznaczące nawet defekty natury geometrycznej wywierają istotny wpływ na zachowanie się powłoki obciążonej ciśnieniem zewnętrznym.

Szerszym omówieniem tych zagadnień zajmiemy się w punkcie następnym.

## 2. WYZNACZENIE CAŁKOWITEJ ENERGII POWŁOKI ODKSZTAŁCONEJ

Celem badania stateczności w ogóle jest wyznaczenie obciążenia krytycznego, tzn. takiego, przy którym pierwotna postać równowagi elementu, wzgl. całego ustroju sprężystego staje się nietrwała (chwiejna).

W rozpatrywanym przypadku będzie to ciśnienie krytyczne, przy którym walcowy kształt powłoki przestaje być stateczny. Natomiast możliwe jest wówczas pojawienie się innych form równowagi trwałej, przy których powłoka doznaje pewnych odkształceń (sprężystych lub sprężysto-plastycznych).

O ile jednak powyższe określenie ciśnienia krytycznego jest wystarczające w odniesieniu do powłoki o kształcie idealnym, o tyle w realnych warunkach, kiedy mamy zawsze do czynienia z pewnymi odstępstwami od kształtu idealnego pojęcie ciśnienia krytycznego będzie musiało ulec pewnemu rozszerzeniu.

Weźmy pod uwagę powłokę walcową o profilu zamkniętym, długości  $L$ , średnim promieniu  $R$  i grubości  $h$ , poddaną działaniu ciśnienia zewnętrznego. Dla opisanego stanu odkształcenia powłoki zwiążemy prostokątny układ współrzędnych  $Oxyz$  z jej powierzchnią środkową w stanie nie-



odkształconym w ten sposób, że oś  $x$  będzie pokrywała się z jedną z tworzących, zaś oś  $z$  skierujemy do środka krzywizny, czyli do osi geometrycznej powłoki. Początek układu umieścimy w dowolnym punkcie na brzegu.

Istnienie defektów natury geometrycznej sprawia, że powłoka znajduje się w stanie wstępnego odkształcenia, przy czym zakłada się, iż jest to stan beznaprężeniowy. Ugięcia te mogą być wynikiem bądź błędów wykonania, bądź też np. działania ciężaru własnego powłoki (o ile pracuje ona w położeniu poziomym)<sup>x)</sup>. Pewną rolę może tu także odgrywać niejednorodność materiału.

Niechaj przeto ugięcia wstępne określa znana funkcja  $w(x,y)$ . Ugięcia te traktujemy jako dodatnie, o ile skierowane są do środka krzywizny.

Obciążenie powłoki wywołuje jej dalsze odkształcenie. Niechaj składową promieniową przemieszczenia powierzchni środkowej (tzn. w kierunku osi  $z$ ) określa funkcja  $w(x,y)$ .

Podstawowe równania zagadnienia można wyprowadzić w oparciu o zasadę prac przygotowanych. Podejście to okaże się korzystne z uwagi na dalsze rozważania. W tym celu obliczamy najpierw całkowitą energię  $E_c$  układu. Składa się na nią potencjał  $V_z$  sił zewnętrznych, który jest liczbowo równy ujemnej<sup>z</sup> pracy tych sił na odpowiednich przemieszczeniach ( $V_z = -A_z$ ) oraz energia potencjalna  $U$  odkształcenia sprężystego. Tę ostatnią zaś, jak wiadomo, można rozdzielić na energię  $U_s$  odkształcenia powierzchni środkowej oraz energię  $U_g$  zginania powłoki. A zatem

$$E_c = U_s + U_g - A_z . \quad (1)$$

Wzory określające każdy składnik powyższego wyrażenia są ogólnie znane w teorii powłok cienkich (np. [6], [7]). Nie wdając się w szczegółowe rozważania na ten temat zauważymy jedynie, że energię  $U_s$  wyznacza pewna kwadratowa

---

<sup>x)</sup> W tym przypadku pojawiają się wprawdzie pewne naprężenia wstępne, jednakże na ogół są one bardzo małe w porównaniu z naprężeniami występującymi w stanie krytycznym.



forma różniczkowa funkcji naprężeń Airy'ego  $\phi(x,y)$ , która z kolei określa składowe płaskiego stanu naprężenia

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

Natomiast energię zginania  $U$  oblicza się podobną co  $U$  formą, jednakże za pośrednictwem funkcji ugięcia  $w(x,y)$ .

Praca sił zewnętrznych (na jednostkę powierzchni środkowej) wynosi

$$\frac{dA}{dF} = p w(x,y).$$

Jeżeli dla skrócenia zapisu wprowadzimy nieliniowy operator różniczkowy

$$L(A,B) \equiv \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \quad (3)$$

to energię całkowitą rozpatrywanej powłoki przedstawia następujące wyrażenie

$$E_c = \iint_F \left\{ \frac{D}{2} \left[ (\nabla^2 w)^2 - (1-\nu) L(w+w_0, w) \right] - \right. \\ \left. - \frac{h}{2E} \left[ (\nabla^2 \phi)^2 - (1+\nu) L(\phi, \phi) \right] - \frac{h}{2} \phi L(w+w_0, w) - p w \right\} dx dy, \quad (4)$$

gdzie

$$D \equiv \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} - \text{płytowa sztywność zginania, } E - \text{moduł}$$

Younga,  $\nu$  - ułamek Poissona,  $\nabla^2$  - dwuwymiarowy operator Laplace'a.



## 3. PODSTAWOWY UKŁAD RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZAGADNIENIA

Stany równowagi powłoki odkształconej można określić za pośrednictwem zasady prac przygotowanych, zgodnie z którą energia całkowita powłoki ma wówczas wartości stacjonarne, tzn.  $\delta E_c = 0$ .

Jeżeli wyrażenie (4) poddamy wariacji tylko względem funkcji  $w$ , to uwzględniając, że na brzegach krzywoliniowych jest  $\delta w = 0$ , otrzymamy po licznych przekształceniach

$$\delta_w E_c = \iint_F \left[ \frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w - L(w+w_0, \phi) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{p}{h} \right] \delta w \, dx dy.$$

Ponieważ  $\delta_w E_c = 0$ , zaś wariacja  $\delta w$  poza brzegami może przyjmować wartości dowolne, przeto

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = L(w+w_0, \phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{p}{h}. \quad (5)$$

Jeżeli zaś energię całkowitą powłoki poddamy wariacji tylko względem funkcji  $\phi$ , to otrzymamy

$$\delta_\phi E_c = \iint_F \left[ \frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \phi + \frac{1}{2} L(w+2w_0, w) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta \phi \, dx \, dy,$$

skąd na podstawie analogicznych rozważań wynika

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \phi = -\frac{1}{2} L(w+2w_0, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Równania (5) i (6) tworzą podstawowy układ nieliniowych równań różniczkowych zagadnienia. Można je otrzymać także na innej drodze. Mianowicie równanie (5) jest warunkiem równowagi elementu powłoki, natomiast (6) wynika z warunku zwartości wewnętrznej.



## 4. BADANIE STATECZNOŚCI W UJĘCIU LINIOWYM

Jeżeli założymy, że odkształcenia powłoki są małe, to otrzymamy równania liniowe, które wynikają także wprost z równań (5) i (6) po odrzuceniu w nich nieliniowych operatorów  $L$ .

Nie trudno zauważyć, że tym samym eliminujemy wówczas z rozważań wstępne odkształcenia  $w_0$ . A zatem stojąc na gruncie teorii liniowej nie mamy możliwości uwzględnienia wpływu defektów geometrycznych na stateczność powłoki.

Jednakże w tym przypadku układ równań liniowych można dalej uprościć. Eliminując np. funkcję naprężeń otrzymuje się jedno równanie ósmego rzędu względem funkcji ugięć

$$D \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + pR \nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (7)$$

Założmy dla prostoty, że na brzegach powłoki istnieją warunki przegubowego podparcia. Wówczas rozwiązanie równania (7) można przyjąć w postaci

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n f_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{R}. \quad (8)$$

Stałe  $m, n = 1, 2, 3, \dots$  oznaczają odpowiednio ilość półfal w kierunku osiowym oraz ilość fal w przekroju poprzecznym (na obwodzie).

Podstawiając funkcję (8) do równania (7) dochodzimy do wniosku, że stan odkształcenia powłoki opisany tym równaniem możliwy jest przy pewnych szczególnych wartościach parametru  $p = p_{mn}^*$ , mianowicie gdy

$$p_{mn}^* = \frac{Eh^2}{R^2} \left[ \frac{(1 + \nu^2)\eta}{12(1 - \nu^2)} + \frac{\nu^4}{(1 + \nu^2)\eta} \right], \quad (9)$$

gdzie

$$\nu \equiv \frac{m}{nL} R, \quad \eta \equiv \frac{n^2 h}{R}. \quad (10)$$

Są to tzw. wartości własne równania (7) przy wymienionych powyżej warunkach brzegowych.



Istotne znaczenie przedstawia dla nas oczywiście taka para liczb falowych  $m, n$ , która daje najmniejszą wartość własną, określającą ciśnienie krytyczne ( $\min p_{mn}^* = p_{kr}^*$ ).

Jest rzeczą charakterystyczną, że  $\min p_{mn}^*$ , wynikające ze wzoru (9) występuje przy  $m=1$  i to niezależnie od długości i grubości względnej powłoki. Fakt ten znalazł potwierdzenie w licznych doświadczeniach, które wykazały, że odkształcenia występujące przy utracie stateczności mają zawsze postać wgłębień obejmujących swym zasięgiem całą długość powłoki. Należy jednak zauważyć, że doświadczenia te były wykonywane wyłącznie na próbkach o małej lub średniej długości względnej, dla których  $L/R < 10$ .

Liczba fal na obwodzie, jaką najczęściej rejestrowano wynosiła  $n=6$ , rzadziej 5 lub 7.

Jeżeli chodzi o samą wartość ciśnienia krytycznego, to już pierwsze eksperymenty, przeprowadzone w roku 1934 przez Ebnera, Windenbruga i Trillinga<sup>x)</sup> wykazywały znaczne rozbieżności z wynikami, jakie daje wzór (9). Utratę stateczności powłoki przejawiającą się w gwałtownym przeskoku do nowej postaci równowagi obserwowano z reguły przy ciśnieniach znacznie niższych, stanowiących zaledwie 45-60% wartości  $p_{kr}^*$ . W przypadku powłok krótkich i wykonanych szczególnie starannie osiągnano wprawdzie ciśnienia dochodzące nawet do 105% wartości  $p_{kr}^*$ . Należy to jednak tłumaczyć odmiennością faktycznych warunków brzegowych od tych, jakie mieliśmy na względzie przyjmując rozwiązanie (8).

Dziś wiemy, że przyczyną tych rozbieżności są nieznaczne nawet, tym niemniej nieuniknione defekty natury geometrycznej.

<sup>x)</sup> Trans. ASME 56, 1934 str. 819-825.



## 5. BADANIE STATECZNOŚCI W UJĘCIU NIELINIOWYM

Zarówno obniżenie rzeczywistej wartości ciśnienia krytycznego w stosunku do obliczeniowej, jak i zjawisko przeskoku można wytłumaczyć na drodze teoretycznej, jeżeli zachowanie się powłoki w stanie nadkrytycznym będziemy analizować z pozycji teorii dużych odkształceń.

W tym celu za punkt wyjścia należy obrać nieliniowe równania (5) i (6). Ponieważ jednak równania te nie dają się scałkować w postaci zamkniętej, przeto zadawałamy się rozwiązaniami przybliżonymi. Najczęściej korzysta się w tym przypadku z metod wariacyjnych Bubnowa-Galerkina lub Ritza.

W literaturze można znaleźć rozwiązania oparte na innych metodach, np. kolejnych przybliżeń ([7] § 11, także interesująca praca S.A. Aleksiejewa opisana w [11] rozdz. XVIII § 9), lub małego parametru [10].

Można również przeprowadzić bezpośrednio całkowanie wymienionych równań, posługując się rachunkiem różnic skończonych. Sposób ten posiada nawet tę przewagę nad metodami wariacyjnymi, że nie wymaga intuicyjnego poszukiwania funkcji ugięć. Jednakże pierwsze przybliżenie daje w tym przypadku wyniki zbliżone do uzyskanych np. metodą Ritza, natomiast dalsze przybliżenia wymagają już bardzo uciążliwych rachunków<sup>x</sup>.

W dalszym ciągu postaramy się pokrótce przedstawić tok rozwiązania analizowanego zagadnienia nieliniowego w oparciu o metodę Ritza.

Założmy, że odkształcenie wstępne powłoki opisuje funkcja

$$w_0(x,y) = f_0(\sin\alpha x \sin\beta y + \psi \sin^2\alpha x), \quad (f_0, \psi - \text{const}) \quad (11)$$

gdzie

$$\alpha = m\pi/L, \quad \beta = n/R.$$

<sup>x</sup>) Obszerny przegląd metod rozwiązywania zagadnień nieliniowych można znaleźć w monografii L. Collatza - Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Berlin 1959.



Doświadczenia wykazały, że wpływ ugięć początkowych jest najsilniejszy wówczas, gdy ich forma odpowiada charakterowi deformacji powłoki w momencie utraty stateczności. W związku z tym dla funkcji ugięcia przyjmujemy za licznymi autorami [3] [8] wyrażenie analogiczne jak (11)

$$w(x,y) = f_1(\sin\alpha x \sin\beta y + \psi \sin^2\alpha x). \quad (f_1 - \text{const}) \quad (12)$$

Wprawdzie funkcja ta nie spełnia wszystkich warunków (geometrycznych i statycznych) przegubowego podparcia brzegów, jednakże w metodzie Ritza nie ma to istotnego znaczenia.

Celem określenia funkcji naprężeń podstawiamy wyrażenia (11) i (12) do warunku zwartości wewnętrznej (6). Z otrzymanego w ten sposób równania znajdujemy po scałkowaniu

$$\begin{aligned} \frac{1}{E}\phi = & r_1 \cos 2\alpha x + r_2 \cos 2\beta y + r_3 \sin\alpha x \sin\beta y + \\ & + r_4 \sin 3\alpha x \sin\beta y - \frac{pR}{Eh} \cdot \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Tutaj  $r_1, \dots, r_4$  są pewnymi stałymi, zawierającymi parametry  $\alpha, \beta, f_0, f_1, \psi$ .

Obecnie możemy już wyznaczyć energię całkowitą powłoki. W tym celu należy podstawić funkcje (11), (12) i (13) do wzoru (4) i przeprowadzić całkowanie. Jeżeli wprowadzimy wielkości bezwymiarowe

$$\begin{aligned} \bar{E}_c = E_c \frac{R}{\alpha E h^3 L}, \quad \bar{p} = \frac{p}{E} \left(\frac{R}{h}\right)^2, \quad (14) \\ \zeta \equiv f_1/h, \quad \zeta_0 \equiv f_0/h, \end{aligned}$$

a ponadto

$$K = 1 + 2 \frac{\zeta_0}{\zeta},$$



to otrzymamy ostatecznie [7]

$$\begin{aligned} \bar{E}_c = \frac{1}{2} k^2 c_1 \xi^4 + k^2 c_2 \xi^4 \psi^2 - k c_3 \xi^3 \psi + c_4 \xi^2 + \\ + c_5 \xi^2 \psi^2 - k c_6 \xi^2 \cdot \bar{p} - \bar{p}^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Tutaj

$$\begin{aligned} c_1 = \frac{\pi^4}{64} \frac{1+\nu^4}{\nu^4} \gamma^2, \quad c_2 = \frac{\pi^4}{4} \left[ \frac{1}{(1+\nu^2)^2} + \frac{1}{(1+9\nu^2)^2} \right] \gamma^2, \\ c_3 = \frac{\pi^2}{16} \frac{1}{\nu^2} \left[ 1 + \frac{8\nu^4}{(1+\nu^2)^2} \right] \gamma, \\ c_4 = \frac{1}{4} \frac{\nu^4}{(1+\nu^2)^2} + \frac{\pi^4}{48(1-\nu^2)} \cdot \frac{(1+\nu^2)^2}{\nu^4} \gamma, \\ c_5 = \frac{\pi^4}{6(1-\nu^2)} \gamma^2 + \frac{1}{8}, \quad c_6 = \frac{\pi^2}{4} \frac{\gamma}{\nu^2}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\gamma = R h m^2 / L^2. \quad (17)$$

Zgodnie z metodą Ritza piszemy

$$\delta \bar{E}_c = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \bar{E}_c}{\partial f_i} \delta f_i = 0,$$

przy czym z uwagi na dowolność wariacji  $\delta f$  musi być

$$\frac{\partial \bar{E}_c}{\partial f_i} = 0.$$

Parametrami  $f_i$  są w naszym przypadku:  $f_1$  wzgl.  $\xi$ , dalej  $\psi$ , a także współczynniki  $\nu$  i  $\gamma$ , z uwagi na występujące w nich liczby falowe  $m$  i  $n$  (por. (10) i (17)).



A zatem mamy zasadniczo do dyspozycji cztery równania

$$\frac{\partial \bar{E}_c}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \bar{E}_c}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial \bar{E}_c}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial \bar{E}_c}{\partial \gamma} = 0. \quad (18)$$

Pierwsze z nich daje

$$C_6 \bar{p} = (C_1 + 2C_2 \psi^2)(\xi + 2\xi_0)\xi - C_3 \psi \frac{\xi(3\xi + 4\xi_0)}{2(\xi + \xi_0)} + \\ + (C_4 + C_5 \psi^2) \frac{\xi}{\xi + \xi_0}. \quad (19)$$

Z drugiego wyniku następujący związek pomiędzy  $\xi$  i  $\psi$ :

$$\psi = \frac{C_3(\xi + 2\xi_0)}{2C_2(\xi + 2\xi_0)^2 + 2C_5}. \quad (20)$$

Eliminując za pomocą powyższego wzoru parametr  $\psi$  w równaniu (19) uzyskujemy zależność  $\bar{p}(\xi)$ . Minimum minimum tej funkcji, odpowiadające pewnej kombinacji liczb  $m$  i  $n$  określa ciśnienie krytyczne. W ten sposób zagadnienie zostało rozwiązane w pierwszym przybliżeniu.

W dalszym ciągu można jeszcze przeprowadzić dodatkowo wariację energii  $\bar{E}$  podług  $n$ , czyli wykorzystać trzecie spośród równań (18). Ponieważ liczba  $n$  występuje tylko we współczynnikach  $C_i$  (za pośrednictwem parametru  $\nu^2$ ), przeto wspomniane równanie przyjmuje postać

$$\bar{p} \frac{\partial C_6}{\partial \nu^2} = \xi K \left( \frac{1}{2} \frac{\partial C_1}{\partial \nu^2} + \psi^2 \frac{\partial C_2}{\partial \nu^2} \right) - \xi \psi \frac{\partial C_3}{\partial \nu^2} + \frac{\xi}{K} \frac{\partial C_4}{\partial \nu^2}. \quad (21)$$

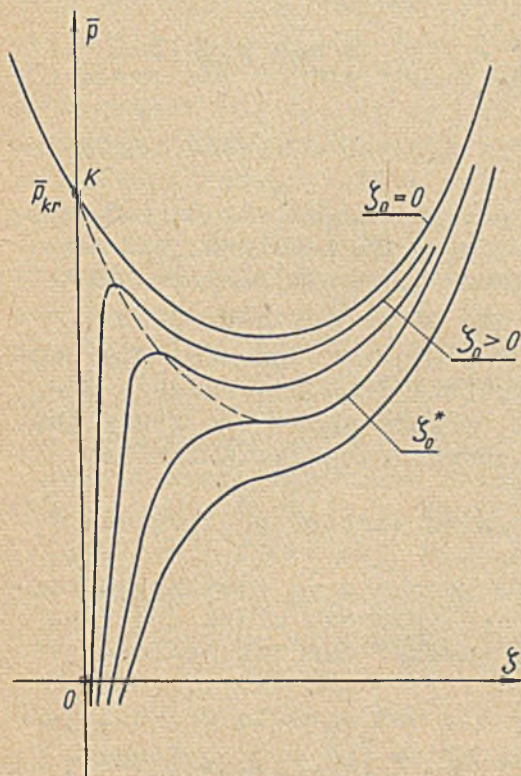
Jest to drugie, obok (19), niezależne równanie na  $\bar{p}$ . Jeżeli teraz wyznaczmy krzywą  $\bar{p}(\xi)$ , jako miejsce geometryczne punktów przecięcia się krzywych (19) i (21) dla różnych wartości  $\nu$  i  $\gamma$ , to minimum tej krzywej określi nam ciśnienie krytyczne w drugim przybliżeniu.



Najczęściej poprzestajemy na tym przybliżeniu, tym-  
bardziej, że równanie  $\partial \bar{E}_c / \partial \gamma = 0$  niezmiernie komplikuje  
rachunki, a nie wnosi istotnej poprawki. Omijamy prze-  
to powyższe równanie, przyjmując dla  $m$  kilka najmniej-  
szych liczb całkowitych, tzn.  $m = 1, 2, 3$ .

## 6. ANALIZA WYNIKÓW TEORII NIELINIOWEJ

Na rys.1 przedstawiono zależności  $\bar{p}(\xi)$  dla kilku  
wartości  $\xi_0$ . Krzywe te obrazują zachowanie się powłok o  
różnych odkształceniach początkowych  
w miarę narastania  
obciążenia; w dalszym  
ciągu będziemy je na-  
zywać krzywymi od-  
kształceń. Analiza  
kształtu tych krzy-  
wych zmusza przede  
wszystkim do zrewido-  
wania definicji ciś-  
nienia krytycznego.  
Pamiętamy, że w teo-  
rii liniowej ciśnie-  
nie to określała  
najmniejsza wartość  
własna jednorodnego  
równania różniczko-  
wego (7). Tymczasem  
w ujęciu nieliniowym  
- jak widać - nie  
formuluje się w ogóle  
zagadnienia wartości  
własnych, albowiem  
z uwagi na istnienie  
funkcji w odnośne  
równania różniczkowe  
są niejednorodne.



Rys.1

Natomiast teoria  
nieliniowa dostarcza  
nam informacji co do  
zachowania się powłok-



ki w stanie nadkrytycznym, informacji, których nie mogła dać teoria małych odkształceń. Z przebiegu krzywych  $\bar{p}(\xi)$  wynika m.in., że na ogół istnieją dwie wartości ciśnienia, które można uznać za "krytyczne" w sensie zmiany charakteru zależności odkształcenie - obciążenie. Krzywe te posiadają bowiem ekstrema, których w zależności od wartości  $\xi_0$  może być dwa (maksimum i minimum), lub jedno (punkt przegięcia lub minimum dla  $\xi_0 = 0$ ).

W związku z powyższym za krytyczne będziemy uważać te wartości ciśnienia, przy których funkcja  $\bar{p}(\xi)$  (dla  $\xi_0 \neq 0$ ) osiąga maksimum lub minimum. Odpowiednio do tego mówić będziemy o górnej ( $p_{kr}^g$ ) i dolnej ( $p_{kr}^d$ ) wartości ciśnienia krytycznego, przy czym

$$p_{kr}^g = \max p(\xi), \quad p_{kr}^d = \min p(\xi).$$

Ważną rolę w tym względzie odgrywa wielkość odkształcenia wstępnego  $\xi_0$ .

Omówimy jednak najpierw przypadek powłoki o kształcie idealnym ( $\xi_0 = 0$ ). Odnośna krzywa odkształceń posiada wprawdzie tylko jedno ekstremum (minimum), które określa  $p_{kr}^d$ , lecz ponadto przecina ona oś rzędnych w punkcie, który na rys.1 oznaczono przez K. Ponieważ w stanie podkrytycznym zachowanie się powłoki idealnej określa odciinek OK (brak odkształceń), przeto punkt ten zwany jest w teorii stateczności [4] punktem rozgałęzienia form równowagi<sup>x)</sup>.

W naszym przypadku określa on wartość  $p_{kr}^g$  powłoki o kształcie idealnie walcowym.

Powstaje pytanie, w jakim stosunku do powyższych rozważań pozostają wyniki teorii liniowej, która - jak pamiętamy - dotyczyła również powłoki bez odkształceń wstępnych?

Okazuje się, że wzór (9) dla  $m=1$  określa właśnie górne ciśnienie krytyczne, tzn.  $p_{kr}^* = [p_{kr}^g]_{\xi_0=0}$ . Równość ta nie jest przypadkowa, lecz jest przejawem ogólniejszej

x) Poincare nazwał go punktem bifurkacji.



reguły, dotyczącej obciążeń krytycznych wszelkich ustrojów sprężystych<sup>x)</sup>. Ścisłej mówiąc ma ona miejsce tylko wówczas, gdy wartości własne zagadnienia liniowego są proste, lub mają nieparzystą krotność [9]. W zagadnieniach technicznych mamy do czynienia wyłącznie z takimi przypadkami.

Jednakże osiągnięcie w doświadczeniu ciśnienia  $p_{kr}^*$  jest praktycznie niemożliwe, albowiem nawet niewielkie odkształcenie początkowe znacznie obniża górną wartość krytyczną, co widoczne jest także z rys.1. Fakt ten tłumaczy wspomniane na wstępie rozbieżności pomiędzy wynikami teorii liniowej, a danymi doświadczalnymi. W miarę przechodzenia od próbek o mniejszej do coraz większej krzywizny początkowej obserwujemy zmniejszanie się różnicy pomiędzy wartościami  $p_{kr}^e$  i  $p_{kr}^d$ . Wreszcie dla pewnej krzywizny  $\xi_0 = \xi_0^*$  maksimum i minimum krzywej odkształcenia zlewa się w jeden punkt przegięcia, w którym styczna ma kierunek równoległy do osi odciętych. Począwszy od tej wartości odkształcenia wstępnego, tzn. dla  $\xi_0 \geq \xi_0^*$  krzywe odkształceń posiadają już tylko jedno ekstremum, które jest punktem przegięcia. Oznacza to, iż przy dostatecznie dużym odkształceniu początkowym nie da się wogóle zaobserwować ciśnienia krytycznego w sensie zdefiniowanym powyżej.

Rozpatrzmy z kolei zagadnienie stateczności form równowagi na poszczególnych odcinkach krzywej odkształcenia. Rozwiązanie tego zagadnienia wynika ze znanego twierdzenia Lejeune-Dirichleta, które mówi, że statecznym postaciom równowagi odpowiada minimum energii całkowitej układu, tzn.  $\delta^2 \bar{E} > 0$ . Mając na uwadze, iż  $\bar{E}_c = \bar{E}_c(\bar{p}, \xi)$  piszemy  $\partial^2 E_c / \partial \xi^2 > 0$ . Ponieważ zaś pochodna  $\partial \bar{E}_c / \partial \xi$  określa (z dokładnością do stałej dodatniej  $C_6$ ) ciśnienie  $\bar{p}$ , co łatwo zauważyć ze wzoru (19), przeto waru-

x) Na ten temat istniało do niedawna wiele nieporozumień. Np. jeszcze E.L. Nikołai (zm. w 1950 r.) uważał, że teoria liniowa daje w ogóle tylko przybliżoną wartość obciążeń krytycznych, zaś dla większej dokładności należałoby oprzeć się na równaniach nieliniowych.



nek stateczności równowagi powłoki w stanie odkształceniowym przyjmuje postać

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \delta} > 0. \quad (22)$$

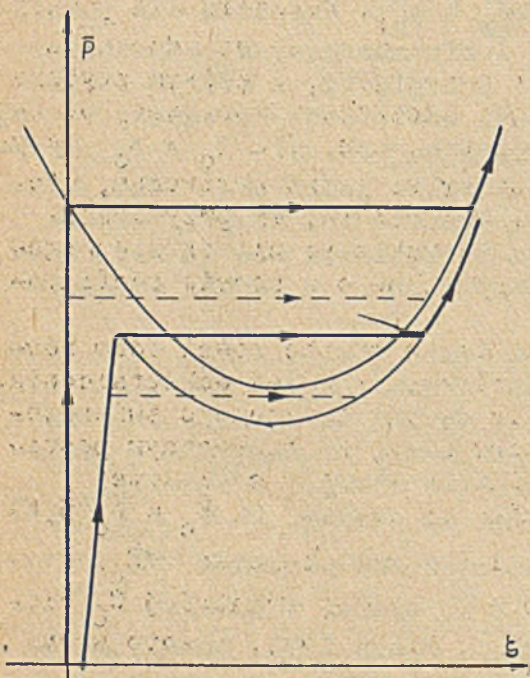
Jak z tego wynika odcinek krzywej odkształcenia, leżący pomiędzy ekstremalnymi punktami tej krzywej odpowiada niestatecznym postaciom równowagi. Stan odkształcenia, jaki zaistniałby wówczas, odznaczałby się bowiem wyższym poziomem energetycznym, aniżeli ten, jaki posiada powłoka w punktach leżących na pozostałych gałęziach krzywej.

Dlatego powłoka walcowa, obciążana stopniowo narastającym ciśnieniem zewnętrznym będzie odkształcała się tak, jak to przedstawiają na rys.2 linie cięgle pogrubione.

Po osiągnięciu górnej wartości ciśnienia krytycznego nastąpi przeskok na drugą stateczną gałąź krzywej odkształcenia, czemu towarzyszy gwałtowna zmiana postaci, tzn.

pojawienie się wspomnianych uprzednio wgłębień.

Jeżeli w trakcie obciążenia udzielimy próbkę dodatkowego impulsu energii z zewnątrz, to przeskok może nastąpić jeszcze przed osiągnięciem ciśnienia  $p_{kr}^S$ , odpo-



Rys.2



wiadającego danej wartości  $\xi_0$ ; przypadek ten na rys.2 ilustrują linie przerywane.

Przedstawione tu pokrótce wyniki badań teoretycznych nad statecznością powłoki walcowej tłumaczą dobrze zarówno od strony jakościowej, jak i ilościowej zjawiska obserwowane w doświadczeniach wykonanych na próbkach stalowych i duraluminiowych, poddanych wszechstronnemu równomiernemu ściskaniu. Należy tu dodać, że siła osiowa, występująca przy tego rodzaju obciążeniach tylko nieznacznie obniża wartość ciśnień krytycznych; stwierdzenie to, wynikające z rozważań teoretycznych potwierdziły także liczne doświadczenia.

## 7. OSOBLIWOŚCI OBLICZEŃ POWŁOK DŁUGICH

Na zakończenie omówimy jeszcze pewne osobliwości występujące przy badaniu stateczności długich powłok walcowych, dla których względna długość:  $L/R > 10$ , a które mimo tego nie są uźebrowane. Powłoki takie, jakkolwiek rzadko, spotykane są jednak w praktyce inżynierskiej, np. jako płaszcze autoklawów. Jeżeli wspomniane urządzenie ma pracować przy podciśnieniu, to zachodzi konieczność badania jego stateczności przy obciążeniu będącym wszechstronnym równomiernym ściskaniem.

Wspomnieliśmy uprzednio, że w stanie nadkrytycznym powłoka tak obciążona doznaje odkształceń w postaci kilku ( $n=5,6,7$ ) zagłębień, rozciągających się na całej długości powłoki, tzn.  $m = 1$ . Ta ostatnia liczba falowa istotnie odpowiada minimalnej wartości ciśnień krytycznych, wynikających zarówno z teorii liniowej, jak i nieliniowej, jednakże tylko dla powłok o średniej lub małej długości względnej.

Okazuje się bowiem, że dla bardzo długich i nieuźebrowanych powłok minimum  $\bar{p}$  może wystąpić dla  $m > 1$ . Na tę dość istotną osobliwość nie zwrócono dotychczas uwagi w obszernej literaturze zagadnienia, prawdopodobnie ze względu na rzadkość występowania takich przypadków.

Fakt ten dostrzeżony został na konkretnym przykładzie wykonanej powłoki autoklawu, której względna długość  $L/R = 41,3$ , zaś względna grubość  $h/R=1/84$ . Ponadto bezpośrednie pomiary wykazały istnienie odkształcenia wstępnego, którego strzałka  $f = 7,5$  mm ( $\xi_0 = 0,575$ ).



Można by nie bez racji sądzić, iż przy tak dużej smukłości powłoki, niezależnie od badania stateczności lokalnej w ujęciu nieliniowym, należałoby także zbadać jej stateczność ogólną w sensie Eulera, traktując zagadnienie jako ściskanie smukłego słupa.

Z uwagi na sposób realizacji siły osiowej należałoby przy tym rozważyć przypadek tzw. obciążenia śledzącego (por. np. [5] rozdz. II). Na ogół jednak powłoki tego typu są wielokrotnie podparte na swej długości, dzięki czemu ten typ utraty stateczności nie stanowi bezpośredniego niebezpieczeństwa dla konstrukcji. Tak też jest w rozpatrywanym przypadku autoklawu, który spoczywa na jednym stałym i trzynastu przesuwnych łożyskach.

Obliczenia przeprowadzono na cyfrowej maszynie liczącej<sup>x)</sup>. Wykazały one, iż dolne ciśnienie krytyczne występuje w tym przypadku przy  $m=3$  (oraz  $n=5$ ), a zatem spodziewane odkształcenie miałyby postać pięciu wgłębień rozciągających się na  $1/3$  długości powłoki.

#### LITERATURA

- [1] L.H. Donnel: A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending, Trans. ASME 56 nr 11, 1934.
- [2] Th. Karman and H.S. Tsien: The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. J. of the Aeron. Sci. 8 nr 8, 1941.
- [3] W. Nash: Effect of large deflections and initial imperfections on the buckling of cylindrical shells. J. Aeron. Sci. 4/1955.

---

x) Programowanie oraz obliczenia wykonał mgr J. Dębowy z Ośrodka Obliczeniowego Maszyn Matematycznych przy Wrocławskich Zakładach Elektronicznych "Elwro".



- [4] В.В. Болотин: Нелинейная теория упругости и устойчивость "в большом", Расчеты на прочность, 3, 1958.
- [5] В.В. Болотин: Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, Москва 1961.
- [6] В.З. Власов: Общая теория оболочек, Москва 1949.
- [7] А.С. Вольмир: Гибкие пластинки и оболочки, Москва 1956.
- [8] Ф.С. Исанбаева: Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при всестороннем сжати, Изв.Каз. ф-ла АН ССР 7, 1955.
- [9] М.А. Красносельский: Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Москва 1956.
- [10] П.Я. Полубаринова - Кочина - К вопросу об устойчивости пластинки, ИММ 3 № 1/1936.
- [11] С.Д. Понамарев и др. - Расчеты на прочность в машиностроении, т. III. rozdz. XVII.

## УСТОЙЧИВОСТЬ ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

### Р е з ю м е

В работе дано обсуждение состояния вопроса устойчивости цилиндрической нерёбристой оболочки при действии внешнего давления. Критическое давление, определённое из линейной теории малых деформации тонких оболочек проявляют большие расхождения с данными опыта. Нелинейная теория больших прогибов объясняет эти расхождения посредством анализа деформаций оболочки в послекритической стадии. При этом является необходимым ввести понятие верхнего и нижнего критического дав-



ления. Нелинейная задача разрешается по методу Ритца. В заключении дано обсуждение некоторых особенностей, появляющихся при аналитическом исследовании устойчивости оболочки большой относительной длины.

STABILITY OF THE LONG CYLLINDRICAL SHELL, SUBJECTED  
TO THE WORKING OF OUTSIDE PRESSURE

S u m m a r y

The actual state of knowledge concerning the problem of stability of unribbed cyllindrical shell, subjected to the working of outside pressure was discussed. The values of critical pressure, calculated on the ground of a linear theory of small deformation of thin shells, point to big divergences with the experimental data. Unlinear theory of big deformations explains these divergences on the ground of the coat deformation state at the supercritical load. There is a necessity of introducing the upper and lower critical pressure values. The unlinear question was solved by means of Ritz method. Finally some peculiarities turning up at the analytical examination of the shell stability with a big relative length have been discussed.