Jahrgang XVI. 1910. No. 3.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe** und **Friedrich Pietzker**,
von diesem geleitet bis 1909, zurzeit herausgegeben von
Prof. Dr. **A. Thaer**,
Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentore in Hamburg.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Dir. Thaer, Hamburg 36, erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (5 Mk. Jahresbeitrag) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts

Tagesordnung der XIX. Hauptversammlung zu Posen, Pfingsten 1910.

Montag, 16. Mai, 8 Uhr abends: Begrüßung der Teilnehmer in Mylius' Hotel, Wilhelmstraße. (Der Weg vom Bahnhof führt an dem Bureau [Königl. Akademie] vorbei.)

Dienstag, 17. Mai, 8 Uhr: Rundfahrt durch die Stadt (siehe Bemerkungen).

10 Uhr: Eröffnungssitzung im Auditorium maximum der Königlichen Akademie. Ansprachen und geschäftliche Mitteilungen. Anschließend Vorträge.
Prof. Dr. Poske-Berlin: Die humanistischen Elemente im realistischen Unterricht.
Prof. Dr. Spies-Posen: Führung durch das Akademiegebäude; mit physikalischen Demonstrationen.
Prof. Dr. Witting-Dresden: Bericht über die Tätigkeit der internationalen mathematischen Unterrichtskommission. — Mathematik in den oberen Klassen der Gymnasien; mit anschließender Diskussion.

1—3 Uhr: Mittagspause.

3 Uhr: Naturwissenschaftliche Abteilung.
Prof. Dr. v. Hanstein-Berlin: Ueber die Bedeutung der Exkursionen für den naturwissenschaftlichen Unterricht; mit anschließender Diskussion.

Mathematische Abteilung.
Prof. Dr. Gebhardt-Dresden: Das Geschichtliche im mathematischen Unterricht.
Oberlehrer Brücher-Biebrich: Die Anschauung in der Algebra.

4 Uhr: Geheimer Medizinalrat Prof. Dr. Wernicke-Posen: Die Wasserversorgung der Großstädte. Anschließend: Besichtigung der städtischen Wasserwerke.

7 1/2 Uhr: Festmahl im Hotel de Rome.
(Preis des trockenen Gedeckes 3 M. Anzug: Ueberrock.)

Mittwoch, 18. Mai, 9 Uhr: Vorträge.
Prof. Dr. Lummer-Breslau: Ueber das Sehen im Hellen und Dunklen.
Medizinalrat Prof. Dr. Busse: Ueber Schilddrüse und Nebennieren; mit Demonstrationen.
$10^3/_4$—11 Uhr: Frühstückspause.
11 Uhr: Prof. Dr. Mendelsohn-Posen: Die Perioden der Gebirgsbildung.
12 Uhr: Geschäftliche Sitzung: Kassenbericht. — Wahl von drei Vorstandsmitgliedern an Stelle von Presler, Schotten und Thaer. — Bestimmung des Ortes der nächstjährigen Hauptversammlung. — Antrag des Vereinsvorstandes auf Festsetzung der Ablösungssumme des Vereinsbeitrages auf 50 M. — Antrag des Vereinsvorstandes auf Erhöhung des Beitrages für das Vereinsorgan auf 2,50 M für das Mitglied und Vermehrung der jährlich erscheinenden Hefte von 6 auf 8. — Bericht über den deutschen Ausschuß für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. — Bericht über die auf der Brüsseler Weltausstellung geplanten besonderen Veranstaltungen der Unterrichtsverwaltungen deutscher Staaten. — Erledigung sonstiger geschäftlicher Anträge.
3 Uhr: Prof. Grimsehl-Hamburg: Physikalische Unterrichtsversuche.
Dr. Jansen-Hamburg: Stabilität der Flugmaschinen.
Prof. Dr. Schülke-Königsberg: Ueber neuere Geometrie.
5 Uhr: Besichtigung der naturkundlichen Sammlungen des Kaiser-Friedrich-Museums und des Pflanzengartens des Königlichen Mariengymnasiums.
Führer: Prof. Dr. Pfuhl.
8 Uhr: Auf Einladung der städtischen Behörden: Untersuchung von Ungarweinen in den Kellereien von Goldenring (alter Markt).

Donnerstag, 19. Mai, $8^1/_2$—$9^1/_4$ Uhr: Geh. Bergrat Prof. Dr. Jentzsch: Die Geologie im Schulunterricht.
A. $9^1/_2$ Uhr: Aufbruch von der Endstation der Posener Straßenbahn am Gerberdamm aus zur geologischen Exkursion. Wanderung bis zu den Kiesgruben am Schilling (etwa 25 Minuten). Darauf Fahrt nach Golenhofen (Wagen sind gütigst zur Verfügung gestellt worden). Weg am Fort vorüber nach der Wolfsmühle (Frühstück). Dann nach Neudorf, Morasko, Suchylas, Zlotnik. Grundmoränenlandschaft, Endmoränen, Alluvium, Diluvium, Tertiär.
Führer: Geh. Bergrat Prof. Dr. Jentzsch-Berlin.
B. 10 Uhr: Aufbruch von der Königl. Akademie aus zur zoologischen Exkursion nach dem Eichwalde bei Posen.
Führer: Prof. Schulz-Posen.
Fahrt nach Golenhofen ab Bahnhof Posen 2^{35}.
A. und B. Mittagessen in Golenhofen. Sodann Besichtigung des Ansiedelungsdorfes Golenhofen unter Führung eines Herrn von der Königlichen Ansiedelungskommission. Ankunft in Posen abends 6^{50}.
(Zug nach Berlin über Kreuz geht ab um 7 Uhr, Ankunft in Berlin abends 11^{49}.)

Bemerkungen: Das Bureau befindet sich in der Königl. Akademie (Erdgeschoß) und ist geöffnet am Montag, den 16. Mai, von 12—9 Uhr; an den folgenden Tagen von $7^1/_2$—$1^1/_2$ und von $2^1/_2$—7 Uhr.

Die Teilnehmerkarte kostet 3 M und berechtigt zum Besuche aller Veranstaltungen; ferner zur Fahrt auf allen Linien der Posener Straßenbahn in der Zeit vom 16. bis zum 19. Mai einschließlich.

Zur Rundfahrt sind für die Auswärtigen von Posener Bürgern Wagen kostenlos zur Verfügung gestellt, für die Einheimischen nur, soweit der Platz reicht.

Versammlung zur Rundfahrt $7^3/_4$—8 Uhr vor dem Lehrgebäude der Königl. Akademie (vor dem Berliner Tor).

Ort der Vorträge: Königliche Akademie; etwaige Ausnahmen werden durch Aushang in der Eintrittshalle der Akademie mitgeteilt.

Für die Damen, die am Nachmittage des 18. Mai den Vorträgen nicht mehr beiwohnen wollen, ist ein Ausflug nach den Seen bei Ludwigshöhe in Aussicht genommen.

Empfehlenswerte Gasthöfe: Mylius Hotel, Wilhelmstraße 23, Fernsprecher 16. Hotel de Rome, Wilhelmsplatz 1, Fernsprecher 572. Hotel Monopol, Viktoriastraße 21, Fernsprecher 422. Hotel Deutsches Haus, St. Martinstraße 40, Fernsprecher 480. Christliches Hospiz, Vor dem Berliner Tor 18/19 (gegenüber der Akademie), Fernsprecher 2395.

1 Zimmer mit 1 Bett einschließlich Frühstück . . . . 3,25 bis 3,50 M
1 Zimmer mit 2 Betten einschließlich Frühstück . . . . 6,50 „ 7,00 „

Anmeldungen zur Teilnahme an der Versammlung, zu dem Festessen und zur Rundfahrt werden an den Unterzeichneten, Prof. Dr. Spies, erbeten.

Professor Dr. Thaer,
Vorsitzender des Vereins.

Professor Dr. Spies,
Vorsitzender des Ausschusses.

Im Anschluß an die Tagung veranstaltet die Königliche Akademie am 20. und 21. Mai einen technischen Kursus und zwar:

I. Physikalisch-technische Uebungen in der Werkstätte (Prof. Dr. Spies und Mechaniker der Akademie O. Naumann).

II. Biologisch-mikroskopischer Kursus (Prof. Dr. Pfuhl).

Diese beiden Uebungskurse gehen nebeneinander her; es kann also kein Teilnehmer beide zugleich besuchen. Zugelassen werden zu jedem Kursus bis zu acht Teilnehmern. Die Teilnahme ist unentgeltlich. Anmeldung durch das Königliche Provinzial-Schulkollegium.

Zur Posener Hauptversammlung.

Aus schwerer Sorge um das Gelingen der XIX. Hauptversammlung ist der Vereinsvorstand durch das folgende Schreiben befreit worden:

Der Minister
der geistlichen, Unterrichts- und
Medizinal-Angelegenheiten.
U II Nr. 886 II u. III

Berlin W 8, den 27. April 1910.

Mit Rücksicht darauf, daß ich bereits unter dem 23. Februar dieses Jahres — U I T Nr. 20280 U II — genehmigt habe, im Anschluß an die zu Pfingsten dieses Jahres in Posen stattfindende XIX. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts einen naturwissenschaftlichen Uebungskursus für Oberlehrer bei der Königlichen Akademie in Posen abzuhalten, will ich das Königliche Provinzial-Schulkollegium ausnahmsweise ermächtigen, die Direktoren der höheren Lehranstalten Seines Aufsichtsbezirkes anzuweisen, daß sie den ihnen unterstellten Lehrern, welche an den vorbezeichneten Veranstaltungen sich beteiligen wollen, den zu diesem Zwecke etwa nötigen Urlaub bewilligen, sofern dies ohne Nachteil für die betreffende Lehranstalt geschehen kann.

(Unterschrift.)

An die Königlichen Provinzial-Schulkollegien.

Abschrift teile ich Euerer Hochwohlgeboren auf die Eingabe vom 21. April dieses Jahres zur Kenntnisnahme mit.

Der Königlich Preußische Minister
der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten
gez. v. Trott zu Solz.

An
den Vorsitzenden des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts, Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentore, Herrn Dr. A. Thaer, Hochwohlgeboren, in Hamburg.

Im Namen des Vorstandes erlaube ich mir nun, an die hochgeehrten Vereinsmitglieder die herzliche Bitte zu richten, durch recht zahlreiches Erscheinen in Posen das Interesse an unserer gemeinsamen Sache der Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts zu beweisen. Den warmen Worten der Empfehlung, die Herr Direktor Bode in dem vorigen Heft der Unterrichtsblätter an ihre Leser gerichtet hat, brauche ich wohl nichts hinzuzufügen.

A. Thaer.

Zur Einführung in die Integralrechnung.

Von A. Thaer (Hamburg).
(Fortsetzung aus XVI, 1).

II.

Fundamental-Integrale.

Aus der Differentialrechnung sind die Ableitungen der folgenden einfachen Funktionen bekannt:

1. $y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$	$n \gtrless 0$
2. $y = e^x$	$y' = e^x$	
3. $y = l\,x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x > 0$
4. $y = a^x$	$y' = a^x\, l\, a$	
5. $y = \sin x$	$y' = \cos x$	
6. $y = \cos x$	$y' = -\sin x$	
7. $y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \gtrless \frac{\pi}{2} + n\pi$
8. $y = \operatorname{ctg} x$	$y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \gtrless 0 + n\pi.$

Zu diesen Funktionen y' kennt man also eine zugehörige Stammfunktion y und erhält alle in der Form $y + C$. Um für die Ableitungen noch einfachere Formen, wenn auch auf Kosten der Einfachheit der Stammfunktion zu gewinnen, fügt man einigen der Stammfunktionen geeignete Koeffizienten, z. B. -1 bei 6 und 8 hinzu, ersetzt in 1. n durch $m+1$ und differenziert

1. $y = \frac{x^{m+1}}{m+1}$	$y' = x^m$	$m \gtrless 1$
4. $y = \frac{a^x}{l\,a}$	$y' = a^x$	
6. $y = -\cos x$	$y' = \sin x$	
8. $y = -\operatorname{ctg} x$	$y' = \frac{1}{\sin^2 x}.$	

Hieraus ergeben sich folgende Integralformeln:

1. $\int x^n\,dx \;=\; \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \gtreqless 1$

2. $\int e^x\,dx \;=\; e^x + C$

3. $\int \frac{dx}{x} \;=\; l\,x + C \qquad x \gtreqless 0$

4. $\int a^x\,dx \;=\; \frac{a^x}{l\,a} + C \qquad a \gtreqless 1$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad x \gtreqless \frac{\pi}{2} + n\pi$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C \qquad x \gtreqless 0 + n\pi.$

III.

Integration der ganzen Funktionen.

1. Es sei

$$y' = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

eine ganze Funktion, d. h. die a seien endliche Konstanten, n eine endliche natürliche Zahl. Dann ist nach der Definition in XVI, 1

$$\int y'\,dx = y + C,$$

wo y eine Stammfunktion von y', oder was dasselbe ist, y' die Ableitung von y ist.

Man setze versuchsweise

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m \qquad m > n$$

so ist

$$y' = b_1 + 2 b_2 x + 3 b_3 x^2 + \cdots + m b_m x^{m-1}.$$

Identifiziert man die Koeffizienten entsprechender Potenzen beider Werte von y', so ergibt sich

$$b_1 = a_0,\ b_2 = \frac{a_1}{2},\ b_3 = \frac{a_2}{3} \cdots b_n = \frac{a_{n-1}}{n},\ b_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}.$$

b_0 bleibt unbestimmt und werde durch C ersetzt.

Hieraus ergibt sich

$$y = C + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \cdot \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

und es ist also

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)\,dx =$$
$$= C + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

2. Ist z eine Funktion von x und z' ihre Ableitung, so ist

$$\int z'\,dx = z + C \text{ und } a \int z'\,dx = a\,z + a\,C.$$

Aus $y = a\,z$ und $y' = a\,z'$ folgt $\int a\,z'\,dx = a\,z + C'$. Da die beiden Werte sich nur um eine Konstante $a\,C - C'$ unterscheiden und diese neben einem Integralzeichen beliebig fortgelassen und zugesetzt werden kann, ist

$$\int a\,z'\,dx = a \int z'\,dx,$$

d. h. statt den Integranden zu multiplizieren, kann man das Integral multiplizieren. Insbesondere ist

$$\int (-z')\,dx = -\int z'\,dx.$$

3. Sind u, v, w Funktionen von x; u', v', w' ihre Ableitungen, so ist

$$\int u'\,dx = u + C',\quad \int v'\,dx = v + C'',\quad \int w'\,dx = w + C'''.$$

Ist $y = u + v - w$, also $y' = u' + v' - w'$, so ist

$$\int (u' + v' - w')\,dx = u + v - w + C = \int u'\,dx +$$
$$+ \int v'\,dx - \int w'\,dx,$$

d. h. das Integral einer Summe ist gleich der Summe der Integrale.

4. Ist $y = u\,v$, so ist $y' = u\,v' + v\,u'$, folglich

$$\int u\,v'\,dx + \int v\,u'\,dx = \int (u\,v' + v\,u')\,dx = \int y'\,dx =$$
$$= y + C = u\,v + C$$

oder

$$\int u\,v'\,dx = u\,v - \int v\,u'\,dx,$$

wenn man die beliebige Konstante fortläßt.

Diese Formel findet zur sogenannten „teilweisen Integration" von Produkten Verwendung, wenn das zweite Integral einfacher als das erste oder ihm gleich ist, z. B. abgesehen von einem konstanten Faktor

$$J = \int (a + b x + c x^2)^n (b + 2 c x)\,dx = \int u\,v'\,dx.$$

Man setze

$$u = (a + b x + c x^2)^n$$
$$\therefore u' = n (a + b x + c x^2)^{n-1} (b + 2 c x),$$
$$v' = b + 2 c x \ \therefore\ v = C + b x + c x^2$$

oder, wenn man $C = a$ setzt $v = a + b x + c x^2$.

$$J = u\,v - \int v\,u'\,dx = (a + b x + c x^2)^{n+1}$$
$$- n \int (a + b x + c x^2)^n (b + 2 c x)\,dx = (a + b x + c x^2)^{n+1}$$
$$- n J \ \therefore\ (n + 1) J = (a + b x + c x^2)^{n+1}.$$

5. Allgemein ist, wenn z eine Funktion von x ist,

$$\int z^n \cdot z'\,dx = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C,$$

denn setzt man $u = z^n$ und $v' = z'$, so ist $u' = u z^{n-1}$ und $v = z$, abgesehen von einer Konstanten, also

$$\int z^n \cdot z'\,dx = u\,v - \int v\,u'\,dx = z^{n+1} - n \int z^n z'\,dx.$$

Ist der Integrand das Produkt aus der Potenz einer ganzen Funktion und ihrer Ableitung, so ist das Integral die um eins erhöhte Potenz, dividiert durch den neuen Exponenten, abgesehen von einer Konstanten.

In anderen Fällen wird man Produkte oder Potenzen von Funktionen im Integranden vor der Integration mit Hilfe des binomischen oder polynomischen Lehrsatzes auflösen.

IV.

Integration der gebrochenen Funktionen.

1. $\int \frac{dx}{x} = l x + C$ (II, 3).

Beispiel:

$$\int \frac{n\,dx}{x} = n \int \frac{dx}{x} \text{(III, 2)} = n\,l x + C = l x^n + l c = l\,c x^n.$$

2. $\int \frac{z'}{z}\,dx = l z + C.$

Aus der Differentialrechnung ist bekannt, daß $d\,l z = \frac{z'}{z}\,dx$, wo z irgend eine eindeutige stetige Funktion von x sein kann unter Beschränkung auf das Gebiet, in dem z endlich und positiv ist.

Beispiel:

$$\int \frac{dx}{n x + m} = \frac{1}{n} \int \frac{n\,dx}{n x + m} = \frac{1}{n}\,l\,(n x + m) + C = l\,c \sqrt[n]{n x + m}.$$

Ist der Zähler eines gebrochenen Integranden die Ableitung des Nenners (oder kann er in diese überführt werden), so ist das Integral gleich dem Logarithmus des Nenners (unter Hinzutritt von konstanten Koeffizienten und Summanden).

3. $\int \frac{dx}{x^n} = \int x^{-n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C \qquad n > 1.$

Die Formel II, 1 gilt auch für negativ n.

4. $\int \frac{z'}{z^n}\,dx = \frac{z^{-n+1}}{-n+1} + C \qquad n > 1.$

Der Beweis wird durch Differenzieren geführt.

Beispiel:

$$\int \frac{b+2cx}{(a+bx+cx^2)^2}\,dx = -\frac{1}{a+bx+cx^2}+C.$$

Ist der Nenner eine Potenz einer Funktion, so setze man die Basis gleich z, bilde z' und suche den Zähler in dies überzuführen.

5. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{ar\,tg} x + C.$

Man setze $x=\operatorname{tg} z$, so ist $dx=(1+\operatorname{tg}^2 z)\,dz$

$$\int\frac{dx}{x^2+1}=\int\frac{1+\operatorname{tg}^2 z}{1+\operatorname{tg}^2 z}\,dz=\int dz = z+C,$$

z ist ein Arcus, der zugehörige Winkel sei φ^0, dann ist $z=\operatorname{ar}\varphi^0$, wenn $\operatorname{tg}\varphi^0=x$, dies schreibt man abgekürzt

$$z=\operatorname{ar}\varphi^0\,(\operatorname{tg}\varphi^0=x)=\operatorname{ar}(\operatorname{tg}=x)=\operatorname{ar\,tg} x.$$

Bei bestimmten Integralen sind die Grenzen entsprechend zu ändern.

Beispiel: $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\int_0^a\frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}.$

Man setze $\frac{x}{a}=\operatorname{tg} z$, so ist $dx=a\,(1+\operatorname{tg}^2 z)\,dz$.

Für $x=0$ ist $\operatorname{tg} z=0$, also $z=0$; für $x=a$ ist $\operatorname{tg} z=1$, also $z=\frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^a\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\int_0^{\pi/4}\frac{1+\operatorname{tg}^2 z}{\operatorname{tg}^2 z+1}\,dz=\frac{1}{a}\Big[z\Big]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4a}.$$

6. $\int\frac{z'}{z^2+1}\,dx=\operatorname{ar\,tg} z+C.$

Es ist

$z'\,dx=dz$ also $\int\frac{z'}{z^2+1}\,dx=\int\frac{dz}{z^2+1}=\operatorname{ar\,tg} z+C$ (nach 5).

Ist z eine lineare Funktion von x, so kann man stets erreichen, daß der Zähler die Form z' annimmt.

7. $\int\frac{dx}{x^2+2px+q}=\frac{1}{\sqrt{q-p^2}}\operatorname{ar\,tg}\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}+C;\ p^2-q<1.$

Es ist

$$x^2+2px+q=(x+p)^2+(q-p^2)=(x+p)^2+r^2=$$
$$=r^2\left[\left(\frac{x+p}{r}\right)^2+1\right].$$

Man setze $\frac{x+p}{r}=\operatorname{tg} z \therefore dx=r\,(1+\operatorname{tg}^2 z)\,dz$

$$\int\frac{dx}{x^2+2px+q}=\frac{1}{r^2}\int\frac{r\,(1+\operatorname{tg}^2 z)}{\operatorname{tg}^2 z+1}\,dz=\frac{1}{r}\int dz=$$
$$=\frac{z}{r}+C=\frac{1}{r}\operatorname{ar\,tg}\frac{x+p}{r}+C.$$

Ist der Zähler eine lineare Funktion von x, so sondert man das Glied mit x nach 4 ab

$$\int\frac{mx+n}{x^2+2px+q}\,dx=\frac{m}{2}\int\frac{2x+2p-2p+\frac{2n}{m}}{x^2+2px+q}\,dx=$$
$$=\frac{m}{2}\,l\,(x^2+2px+q)+(n-pm)\int\frac{dx}{x^2+2px+q}.$$

8. $\int\frac{mx+n}{x^2+2px+q}\,dx \qquad r'^2=p^2-q>1.$

Es ist

$$x^2+2px+q=(x+p)^2-(p^2-q)=(x+p)^2-r'^2=$$
$$=(x+p+r')(x+p-r').$$

Man zerlege den Integranden in zwei Teilbrüche mit linearem Nenner

$$\frac{mx+n}{x^2+2px+q}=\frac{a}{x+p+r'}+\frac{b}{x+p-r'}=$$
$$=\frac{ax+bx+a(p-r')+b(p+r')}{(x+p+r')(x+p-r')}$$

und berechne a und b durch Koeffizienten-Identifizierung

$$a+b=m \qquad a(p-r')+b(p+r')=n$$

$$\int\frac{mx+n}{x^2+2px+q}\,dx=a\int\frac{dx}{x+p+r'}+b\int\frac{dx}{x+p-r'}=$$
$$=a\,l\,(x+p+r')+b\,l\,(x+p-r')+C.$$

Beispiel: $\int\frac{2x-22}{x^2+2x-35}\,dx$

$$x^2+2x-35=(x+1)^2-36=(x+7)(x-5)$$
$$\frac{2x-22}{x^2+2x-35}=\frac{a}{x+7}+\frac{b}{x-5}\therefore a+b=2,$$
$$-5a+7b=-22 \therefore a=3,\ b=-1,$$
$$\int\frac{2x-22}{x^2+2x-35}\,dx=3\int\frac{dx}{x+7}-\int\frac{dx}{x-5}=$$
$$=3\,l\,(x+7)-l\,(x-5)+l\,c=l\,c\,\frac{(x+7)^3}{x-5}.$$

9. $\int\frac{a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0}{b_2 x^2+b_1 x+b_0}\,dx.$

Man dividiere den Zähler durch den Nenner bis eine lineare Funktion als Rest bleibt. Der Quotient besteht aus einer ganzen Funktion, die nach III integrierbar ist und einem Bruch, der nach Entfernung von b_2 auf die Form $\frac{mx+n}{x^2+2px+q}$ gebracht werden kann und dann, je nachdem $p^2-q\gtreqless 1$ ist, nach 7 oder 8 zu behandeln ist.

10. $\int\frac{a_2 x^2+a_1 x+a_0}{x^3+b_2 x^2+b_1 x+b_0}\,dx.$

Man löse die Gleichung $x^3+b_2 x^2+b_1 x+b_0=0$. Sind drei reelle Wurzeln vorhanden (x_1, x_2, x_3), so setze man den Integranden gleich

$$\frac{a}{x-x_1}+\frac{b}{x-x_2}+\frac{c}{x-x_3}$$

und berechne a, b, c durch Koeffizientenvergleichung. Ist nur eine reelle Wurzel vorhanden und ist

$$(x^3+b_2 x^2+b_1 x+b_0):(x-x_1)=x^2+2px+q,$$

so zerlege man den Integranden in

$$\frac{a}{x-x_1}+\frac{bx+c}{x^2+2px+q}.$$

Die Teile lassen sich nach 2. und 7. integrieren.

Beispiel: $\int\frac{6x^2-8x-22}{x^3-19x+30}\,dx,$

$$\frac{6x^2-8x-22}{x^3-19x+30}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{x+5}=$$
$$=\frac{ax^2+2ax-15a+bx^2+3bx-10b+cx^2-5+x+bc.}{(x-2)(x-3)(x+5)}$$

Durch Gleichsetzung der Koeffizienten erhält man:

$$a=2,\ b=1,\ c=3,$$
$$J=2\,l\,(x-2)+l\,(x-3)+3\,l\,(x+5)+l\,c=$$
$$=l\,c\,(x-2)^2(x-3)(x+5)^3.$$

Anmerkung. Sind zwei Wurzeln gleich etwa $x_2=x_3$, so zerlegt man in

$$\frac{a}{x-x_1}+\frac{b}{x-x_2}+\frac{c}{(x-x_2)^2}.$$

V.

Integration irrationaler Funktionen.

1. $$\int \sqrt[n]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{n}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + C = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}} + C.$$

Die Formel II, 1 gilt auch für gebrochene Exponenten.

2. Fläche der Parabel $y^2 = 2px$ $\quad F = \frac{2}{3}x_1 \cdot y_1$.

Nach XVI, 1 muß die Kurve als eine abgeleitete aufgefaßt werden, d. h. als Ordinate wäre y' zu setzen. Da die Kurve eindeutig sein soll, darf man nur den einen Ast in Betracht ziehen, indem man $y' = +\sqrt{2px}$ setzt. Man integriere zwischen $x=0$ und $x=x_1$, so wird die Fläche dargestellt sein

$$\int_0^{x_1}\sqrt{2px}\,dx = \sqrt{2p}\int_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2p}\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{x_1} = \frac{2}{3} x_1\sqrt{2px_1}.$$

Setzt man die zu x_1 gehörige Ordinate gleich y_1 (unter Fortlassung der Striche) so erhält man $\frac{2}{3}x_1\cdot y_1$.

3. $$\int \sqrt[n]{z}\cdot z'\,dx = \frac{z^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}+C = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{z^{n+1}}+C.$$

Der Beweis läßt sich durch Differenzieren führen.

Beispiel: $$\int \sqrt[3]{(a+bx)^2}\,dx = \int (a+bx)^{\frac{2}{3}}dx = \frac{1}{b}\int(a+bx)^{\frac{2}{3}}\cdot b\,dx = \frac{3}{5b}(a+bx)\sqrt[3]{(a+bx)^2}+C.$$

4. $$\int \frac{z'}{\sqrt[n]{z}}dx = \int z^{-\frac{1}{n}} z'\,dx = \frac{z^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}+C = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{z}{\sqrt[n]{z}}+C.$$

Der Beweis wird durch Differentiation erbracht.

Beispiel: $$\int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{a}\int\frac{a\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{a}(ax+b)^{1-\frac{1}{2}}+C = \frac{1}{a}\sqrt{ax+b}+C.$$

5. $$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{ar}\sin x + C.$$

Man setze $x=\sin z$, so ist $dx=\cos z\,dz$, $\sqrt{1-x^2}=\cos z$,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\frac{\cos z}{\cos z}dz = \int dz = z + C.$$

z ist der Arcus des Winkels von φ^0, dessen sinus gleich x ist. Das schreibt man abgekürzt (vgl. IV, 5) $z = \text{ar}\,\varphi^0\,(\sin\varphi^0 = x) = \text{ar}\,(\sin = x) = \text{ar}\sin x$.

Beispiel: $$\int_{1/2}^{1/2\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ersetzt man x durch $\sin z$, so ist für $x=\frac{1}{2}$, $\sin z = \sin\varphi^0 = \frac{1}{2} \therefore \varphi = 30^0, z = \frac{\pi}{6}$, für $x=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist $\sin z = \sin\varphi^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \therefore \varphi = 60^0, z=\frac{\pi}{3}$.

$$\int_{1/2}^{1/2\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi/6}^{\pi/3}dz = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}.$$

6. $$\int\frac{z'}{\sqrt{1-z^2}}dx = \text{ar}\sin z + C.$$

Ist z eine lineare Funktion von x, so kann man stets bewirken, daß im Zähler z' auftritt. In anderen Fällen gelingt öfter eine teilweise Integration.

Beispiel:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{\frac{1}{a}\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \text{ar}\sin\frac{x}{a} + C.$$

7. $$\int\frac{dx}{\sqrt{q+2px-x^2}} = \text{ar}\sin\frac{x-p}{\sqrt{q+p^2}}+C;\ q+p^2>0.$$

Es ist $q+2px-x^2 = q+p^2-p^2+2px-x^2 = q+p^2-(x-p)^2$.

Da $q+p^2>0$, darf man $q+p^2=r^2$ setzen und erhält

$$\int\frac{dx}{\sqrt{q+2px-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{r^2-(x-p)^2}} = \int\frac{\frac{1}{r}\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-p}{r}\right)^2}} = \text{ar}\sin\frac{x-p}{r}+C.$$

8. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2px+q}} = lc\,(p+x+\sqrt{x^2+2xp+q}).$$

Beweis: Man setze $\sqrt{x^2+2px+q} = z-x$, so ist $2px+q = z^2-2zx$ und differenziere diese Gleichung

$$2p\,dx = 2z\,dz - 2z\,dx - 2x\,dz$$

$$\therefore (p+z)\,dx = (z-x)\,dz \therefore dx = \frac{z-x}{p+z}dz,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2px+q}} = \int\frac{1}{z-x}\cdot\frac{z-x}{p+z}dz = \int\frac{dz}{p+z} = l(p+z)+C.$$

Beispiel: $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Es sei $\sqrt{x^2-a^2} = z-x \quad \therefore \quad -a^2 = z^2-2zx$

$$0 = 2z\,dz - 2z\,dx - 2x\,dz \quad \therefore \quad dz = \frac{z-x}{z}.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int\frac{dz}{z} = lz + C = lc\,(x+\sqrt{x^2-a^2})$$

9. $$\int\frac{mx^2+nx+k}{\sqrt{x^2+2px+q}}dx = (ax+b)R + c\int\frac{dx}{R}.$$

Hierbei ist

$R=\sqrt{x^2+2px+q} \therefore R' = \frac{x+p}{R}$ und $RR' = x+p$.

Differenziert man auf beiden Seiten, so erhält man

$$\frac{mx^2+nx+k}{R} = aR+(ax+b)R'+\frac{c}{R} = \frac{aR^2+(ax+b)RR'+c}{R}.$$

Da die Nenner gleich sind, kann man die Zähler identifizieren

$$mx^2 + nx + k = a(x^2 + 2px + q) + (ax + b)(x + p) + c =$$
$$= 2ax^2 + (3ap + b)x + aq + bp + c.$$
$$m = 2a,\quad n = 3ap + b,\quad k = aq + bp + c.$$

Es ergibt sich $a = \frac{1}{2}m, \quad b = n - \frac{3}{2}mp,$

$$c = k - \frac{1}{2}qm - np + \frac{3}{2}mp^2.$$

Da a, b, c bestimmt sind und das $\int\frac{dx}{R}$ nach 7 oder 8 berechenbar ist, so ist die Aufgabe gelöst.

Ist der Zähler $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, so ist rechts $(b_0 + b_1x + \cdots b_{n-1}x^{n-1})R$ zu setzen.

Ist x^2 im Nenner mit einem Faktor versehen, so ist dieser vor das Integralzeichen zu setzen.

Um die gesuchten Koeffizienten nicht mit gegebenen zu verwechseln, benutzt man vielfach die großen Buchstaben A, B, C.

10. Fläche der Ellipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ ist πab.

Man berechnet den vierten Teil der Ellipse, indem man von 0 bis a integriert. Es ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, also die Fläche

$$\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Das unbestimmte Integral $\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ wird in die Form 8 übergeführt, indem man mit $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$ erweitert

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx =$$
$$= (px + q)\sqrt{a^2 - x^2} + r\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Differenziert man auf beiden Seiten und bringt rechts auf einen Nenner, so erhält man

$$\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{p(a^2 - x^2) + (px + q)(-x) + r}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \therefore$$
$$p = \frac{1}{2},\quad q = 0,\quad r = \frac{a^2}{2},$$
$$\int\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Ferner ist $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ nach 6 $\operatorname{ar}\sin\frac{x}{a}$,

$$\therefore \frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$$
$$= \frac{b}{2a}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\cdot\operatorname{ar}\sin\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{\pi ab}{4}.$$

$\operatorname{ar}\sin\frac{x}{a}$ für $x = a$ ist $\operatorname{ar}(\sin = 1) = \frac{\pi}{2}$,

$\operatorname{ar}\sin\frac{x}{a}$ für $x = 0$ ist $\operatorname{ar}(\sin = 0) = 0$.

11. Fläche des Segments der Hyperbel $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ ist $x_1y_1 - ab\cdot l\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)$.

Nur die Hälfte des einen Astes der Hyperbel werde in Betracht gezogen zwischen den zu den Abszissen a und x_1 gehörenden Ordinaten

$$F = \int_a^{x_1}\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx.$$

Das unbestimmte Integral wird nach Absonderung von $\frac{b}{a}$ erweitert

$$\int\sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \int\frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx =$$
$$= (px + q)\sqrt{x^2 - a^2} + r\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Man differenziert und identifiziert die entsprechenden Koeffizienten, das ergibt $p = \frac{1}{2}$, $q = 0$, $r = -\frac{a^2}{2}$, folglich ist

$$\int\sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\,l\,(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

Für die Grenze x_1 erhält man

$$\frac{x_1}{2}\sqrt{x_1^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\,l\,(x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}).$$

Für die Grenze a erhält man $-\frac{a^2}{2}\,l\,a$. Da $\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2} = y_1$ ist, wird

$$\frac{b}{a}\int_a^{x_1}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx =$$
$$= \frac{b}{2a}\left[x_1\sqrt{x_1^2 - a^2} - a^2\,l\,(x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}) + a^2\,l\,a\right],$$
$$= \frac{x_1}{2}\cdot\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2} - \frac{ab}{2}\,l\left(\frac{x_1}{a} + \frac{\sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}\right),$$
$$= \frac{x_1y_1}{2} - \frac{ab}{2}\,l\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right).$$

Das Segment ist doppelt so groß, wie die hier berechnete Fläche.

12. Das Oval der Strophoide

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a - x}{a + x}} \text{ ist } \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)a^2,$$
$$\int_0^a x\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}\,dx = \int_0^a\frac{ax - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx =$$
$$= \left[(x + q)\sqrt{a^2 - x^2} + r\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right]_0^a.$$

Es ist

$$ax - x^2 = p(a^2 - x^2) + (px + q)(-x) + r$$
$$\therefore p = \frac{1}{2},\quad q = -a,\quad r = -\frac{a^2}{2};$$
$$\int_0^a x\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}\,dx = \left[\left(\frac{x}{2} - a\right)\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{ar}\sin\frac{x}{a}\right]_0^a.$$

Für die Grenze a erhält man

$$-\frac{a^2}{2}\operatorname{ar}\sin 1 = -\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

für die Grenze 0 erhält man $-a^2$

$$\int_0^a\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}\,dx = a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Dies ist das halbe Oval, da nur das positive Vorzeichen der Wurzel berücksichtigt war.

VI.

Integration transzendenter Funktionen.

1. $\int e^x\,dx = e^x + C$ (II, 2)

$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{la} + C$ (II, 4)

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C \quad (\text{II}, 5)$$
$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C \quad (\text{II}, 6)$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C \quad (\text{II}, 7)$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C \quad (\text{II}, 8)$$
$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \operatorname{tg} x - x + C$$
$$\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

Die beiden letzten Integrale folgen aus den Gleichungen

$d \operatorname{tg} x = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\, dx$ und $d \operatorname{ctg} x = (-1 - \operatorname{ctg}^2 x)\, dx.$

Es ist

$C + \operatorname{tg} x = x + \int \operatorname{tg}^2 x dx$ und $C + \operatorname{ctg} x = -x - \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$

2. Aus diesen Fundamental-Integralen lassen sich dadurch neue Integrale ableiten, daß man x durch eine Funktion z von x ersetzt, so ist

$$\int e^z \cdot z'\, dx = e^z + C, \quad \int \cos z \cdot z'\, dx = \sin z + C,$$
$$\int \operatorname{tg}^2 z \cdot z'\, dx = \operatorname{tg} z - z + C.$$

Dies Verfahren sucht man anzuwenden, wenn als Argument einer transzendenten Funktion eine zweite Funktion auftritt. Es führt stets zum Ziel, wenn diese Funktion linear ist.

Beispiel: $\int \sin (a + b x)\, dx.$

Man setze $a + b x = z \therefore dx = \frac{1}{b} dz \quad \int \sin (a + b x)\, dx$

$$= \frac{1}{b} \int \sin z \cdot dz = -\frac{1}{b} \cos z + C$$
$$= -\frac{1}{b} \cos (a + b x) + C.$$

In anderen Fällen bewirkt das Verfahren oft wenigstens eine Vereinfachung.

3. Summen bezw. Differenzen transzendenter (und algebraischer) Funktionen zerlegt man in ihre Summanden

$$\int (u + v - w)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx - \int w\, dx.$$

Produkte vereinfachen sich häufig durch teilweise Integration

$$\int u v'\, dx = u v - \int v u'\, dx,$$

indem das neue Integral $\int v u'\, dx$ einfacher als das frühere oder diesem gleich ist, abgesehen von einem Faktor. Im letzteren Fall erhält man sogenannte Rekursionsformeln. Z. B.

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx \qquad u = \cos^2 x,\ v' = \cos x$$
$$= \cos^2 x \cdot (-\sin x) - \int (-\sin x) \cdot (-2 \cos x \cdot \sin x) dx$$
$$= -\cos^2 x \sin x - 2 \int \cos x \cdot \sin^2 x\, dx$$
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$
$$= -\cos^2 x \sin x - 2 \sin x + 2 \int \cos^3 x\, dx$$

Bringt man $2 \int \cos^3 x\, dx$ auf die andere Seite, so muß man rechts eine Konstante hinzufügen (die auch negativ sein kann)

$$\int \cos^3 x\, dx - 2 \int \cos^3 x\, dx = -\cos^2 x \cdot \sin x - 2 \sin x - C$$
$$\int \cos^2 x\, dx = \cos^2 x \cdot \sin x + 2 \sin x + C.$$

4. Auch für transzendente Funktionen z gelten die Gleichungen

$$\int z^n \cdot z'\, dx = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int \frac{z'\, dx}{z} = l z + C.$$

Z. B. $\quad \int \cos^2 x \cdot \sin x\, dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx =$$
$$= -l \cos x + C.$$

5. Transzendente Funktionen kann man als algebraische Funktionen einer Hilfsvariabeln t darstellen, die selbst eine transzendente Funktion des ursprünglichen Arguments x ist. Für die Integration hat diese Darstellung nur Zweck, wenn sich auch $d x$ durch t und $d t$ algebraisch ausdrücken läßt und das neue Integral lösbar ist.

Gute Dienste leistet ziemlich häufig die Substitution

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \therefore \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) dx = dt \quad \therefore \quad dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2}$$
$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1 - t^2},$$
$$\operatorname{ctg} x = \frac{1 - t^2}{2t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right),$$

z. B.

$$\frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{(1 + t^2)^2}{4 t^3} dt = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^3} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{4} \int t\, dt$$
$$= -\frac{1}{8} t^{-2} + \frac{1}{2} l t + \frac{1}{8} t^2 + C$$
$$= l \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \frac{1}{8}\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}\right) + C.$$

Anmerkung. Durch die umgekehrte Substitution $x = \operatorname{tg} \frac{z}{2}$ kann man algebraische Integranden in transzendente überführen, die bisweilen sehr viel einfacher zu integrieren sind. Z. B.

$$\int \frac{(1 - x^2)^2}{(1 + x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \int \cos^2 z\, dz.$$

6. Durch Integration der aus dem Moivreschen Lehrsatz

$$\cos n x + i \sin n x = (\cos x + i \sin x)^n$$

folgenden goniometrischen Gleichungen kann man Schritt für Schritt, indem man $n = 2, 3, 4 \cdots$ setzt, die Stammfunktionen der Potenzen von $\cos x$ und $\sin x$ finden. Die Substitution $\frac{\pi}{2} - x$ für x führt eine Funktion in ihre Kofunktion über. Z. B.

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$
$$\int \cos 2 x\, dx = 2 \int \cos^2 x\, dx - \int dx$$
$$C + \frac{1}{2} \sin 2 x = 2 \int \cos^2 x\, dx - x$$
$$\therefore \int \cos x^2\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{2} + C'$$

Es ist $\quad \cos 4 x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1.$

Integriert:

$$C + \frac{1}{4} \sin 4 x = 8 \int \cos^4 x\, dx - 8\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{2}\right) + x$$
$$\therefore \int \sin^4 x = \frac{1}{32} \sin 4 x - \frac{1}{4} \sin 2 x - \frac{3}{8} x + C'.$$

7. Allgemeine Regeln für die Substitution lassen sich nicht aufstellen. Die Integralrechnung setzt infolgedessen ein nicht ganz geringes Kombinationsvermögen voraus. Systematische Zusammenstellungen von Funktionen mit ihren Ableitungen können gute Dienste leisten.

Schlußbemerkung: Der vorstehend skizzierte Lehrgang einschließlich der zur Einübung nötigen Beispiele läßt sich in vier bis fünf Wochen bei fünfstündigem Unterricht erledigen. Die Beispiele werden zweckmäßig als bestimmte Integrale aus der Kurvenlehre und Mechanik geboten, soweit die zugehörigen Differentialgleichungen bekannt sind. Müssen diese erst abgeleitet werden, so stellt man sie besser an den

Schluß, damit die Uebersicht über die ja nicht ganz kleine Zahl von Substitutionen nicht verloren geht.

In den meisten für Schulen geschriebenen Einleitungen in die Integralrechnung wird das umgekehrte Verfahren eingeschlagen, d. h. man löst eine Reihe meist geometrischer Integrale und zeigt die bei ihnen anzuwendenden Kunstgriffe. Das Verfahren hat auch der Verfasser lange angewandt, aber gefunden, daß ohne eine systematische Darstellung der Integration der verschiedenen algebraischen Funktionen die Schüler in ein unsicheres Tasten nach Hilfsmitteln geraten und sich durch eine kleine Abweichung von der einen eingehend besprochenen Form verblüffen lassen.

Gewiß sind die Anwendungen ja das eigentlich Wertvolle und bei weitem Interessantere und i. a. wird man dem Schüler nicht zumuten dürfen, sich erst vollständig in die Theorie eines Abschnitts einzuarbeiten. Bei Primanern findet man aber Verständnis dafür, daß sie erst das volle Rüstzeug in einem kleinen eng begrenzten Gebiet haben müßten, um sich mit Erfolg an das Lösen von Aufgaben zu machen. Die selbständigen Anwendungen haben einen besonderen Reiz.

Der Abschnitt I in Unt.-Bl. XVI, 1 dürfte auch für Gymnasien brauchbar sein. Dann aber wird sich ein Lehrgang empfehlen, wie ihn Herr E. Hoppe in seiner höchst lesenswerten Programmabhandlung „Die Elemente der Differential- und Integralrechnung im Lehrplan des humanistischen Gymnasiums" (Pg. 1000, 1910, Wilhelm-Gymnasium, Hamburg) auf S. 26 f. gegeben hat. Hier wird auch gezeigt, wie man die Fläche der Ellipse und das Volum des Ellipsoids ohne Polarkoordinaten oder irrationale Integranden berechnen kann.

Was auf dem Realgymnasium geleistet werden kann, entzieht sich der persönlichen Erfahrung des Verfassers. R. Seeger ging schon vor einem Menschenalter in der Theorie der Integralrechnung weiter als oben skizziert ist. Die hier und da mitgeteilten Abiturientenaufgaben kann man meist durch einen besonderen Kunstgriff leicht lösen, so daß nur dieser bekannt zu sein braucht, nicht aber der systematische Weg bis zu Aufgaben entsprechender Schwierigkeit. Immerhin wäre es erwägenswert, ob man nicht unter Verzicht auf die Integration transzendenter Funktionen, auch auf dem Realgymnasium das vorgeschlagene Verfahren befolgen könnte.

Ein Beitrag zur Lehre von den arithmetischen Reihen höherer Ordnung.

Von Prof. Karl Dienger (Rastatt i. B.)

(Fortsetzung der Arbeit in Nr. 5. Jahrgang XV.)

VIII.

Wir bilden die Produkte der einzelnen Glieder der ersten Reihe in V und erhalten:

$$P_1 = a$$
$$P_2 = a^2 + a\,d$$
$$P_3 = a^3 + 3\,a^2\,d + 2\,a\,d^2$$
$$P_4 = a^4 + 6\,a^3\,d + 11\,a^2\,d^2 + 6\,a\,d^3$$
$$P_5 = a^5 + 10\,a^4\,d + 35\,a^3\,d^2 + 50\,a^2\,d^3 + 24\,a\,d^4$$
$$P_6 = a^6 + 15\,a^5\,d + 85\,a^4\,d^2 + 225\,a^3\,d^3 + 274\,a^2\,d^4 + 120\,a\,d^5$$
$$P_7 = a^7 + 21\,a^6\,d + 175\,a^5\,d^2 + 735\,a^4\,d^3 + 1624\,a^3\,d^4 + 1764\,a^2\,d^5 + 720\,a\,d^6$$
$$P_8 = a^8 + 28\,a^7\,d + 322\,a^6\,d^2 + 1960\,a^5\,d^3 + 6769\,a^4\,d^4 + 13132\,a^3\,d^5 + 13\,068\,a^2\,d^6 + 5\,040\,a\,d^7$$
$$P_9 = a^9 + 36\,a^8\,d + 546\,a^7\,d^2 + 4536\,a^6\,d^3 + 22449\,a^5\,d^4 + 67284\,a^4\,d^5 + 118\,124\,a^3\,d^6 + 109\,584\,a^2\,d^7 + 40\,320\,a\,d^8$$
$$P_{10} = a^{10} + 45\,a^9\,d + 870\,a^8\,d^2 + 9450\,a^7\,d^3 + 63273\,a^6\,d^4 + 269\,325\,a^5\,d^5 + 723\,680\,a^4\,d^6 + 1\,172\,700\,a^3\,d^7 + 1\,026\,576\,a^2\,d^8 + 362\,880\,a\,d^9$$
$$P_{11} = a^{11} + 55\,a^{10}\,d + 1320\,a^9\,d^2 + 18\,150\,a^8\,d^3 + 157\,773\,a^7\,d^4 + 902\,055\,a^6\,d^5 + 3\,416\,930\,a^5\,d^6 + 8\,409\,500\,a^4\,d^7 + 12\,753\,576\,a^3\,d^8 + 10\,628\,640\,a^2\,d^9 + 3\,628\,800\,a\,d^{10}$$

Das stellen die Produkte der einzelnen Glieder der Reihe vor

$$a,\ a + d,\ a + 2\,d,\ a + 3\,d,\ \cdots\cdots\ a + (n-1)\,d.$$

Das allgemeine Produkt wird lauten:

$$P_n = a^n + A_1\,a^{n-1}\,d + A_2\,a^{n-2}\,d^2 + A_3\,a^{n-3}\,d^3 + \cdots\cdots + A_{n-1}\,a\,d^{n-1}.$$

Wir wollen nun die einzelnen Koeffizienten $A_1\,A_2\,A_3 \cdots\cdot$ berechnen. Zu diesem Zwecke untersuchen wir die folgenden Reihen:

$$R_1 = 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ 36,\ 45,\ 55,\cdots\cdots$$
$$R_2 = 2,\ 11,\ 35,\ 85,\ 175,\ 322,\ 546,\ 870,\ 1320,\ \cdots\cdots$$
$$R_3 = 6,\ 225,\ 735,\ 1960,\ 4536,\ 9450,\ 18\,150,\ \cdots\cdots$$

und berücksichtigen jeweils, daß in P_1 kein Glied mit d, in P_2 kein Glied mit d^2, in P_3 kein Glied mit d^3 usw. vorkommt.

Die Reihe R_1 ist eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung. Ihr allgemeines Glied heißt, da $a = 1$, $d_1 = 2$ und $d_2 = 1$ ist:

$$1 + \frac{n-1}{1} \cdot 2 + \frac{(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot 1 = \frac{n\,(n+1)}{1 \cdot 2}.$$

Da aber in P_1 kein Glied mit d vorkommt, so müssen wir für n setzen $n - 1$ und erhalten:

$$A_1 = \frac{(n-1)\,n}{2}.$$

Die Reihe R_2 ist eine arithmetische Reihe vierter Ordnung, wie sich aus folgendem Schema ergibt:

a :	2	11	35	85	175	322	546	870	1320 .....
d_1 :	9	24	50	90	147	224	324	450	
d_2 :	15	26	40	57	77	100	126		
d_3 :	11	14	17	20	23	26			
d_4 :	3	3	3	3	3				

Das allgemeine Glied dieser Reihe lautet, da

$$a = 2,\quad d_1 = 9,\quad d_2 = 15,\quad d_3 = 11 \quad \text{und} \quad d_4 = 3$$

ist: $$2 + \frac{n-1}{1} 9 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot 15 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 11 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 3 =$$
$$= \frac{n}{4!}(3n^3 + 14n^2 + 21n + 10) = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+1,666\cdots)}{2 \cdot 4}.$$

Da aber in P_2 kein Glied mit d^2 vorkommt, so müssen wir für n setzen $n-2$ und erhalten:

$$A_2 = \frac{(n-2)(n-1)n(n-0{,}333\cdots)}{2 \cdot 4}.$$

Die Reihe R_3 ist eine arithmetische Reihe sechster Ordnung; denn wir können folgendes Schema anschreiben:

a :	6	50	225	735	1960	4536	9450	18150 .....
d_1 :	44	175	510	1225	2576	4914	8700	
d_2 :	131	335	715	1351	2338	3786		
d_3 :	204	380	636	987	1448			
d_4 :	176	256	351	461				
d_5 :	80	95	110					
d_6 :	15	15						

Das allgemeine Glied dieser Reihe lautet, da

$$a = 6,\quad d_1 = 44,\quad d_2 = 131,\quad d_3 = 204,\quad d_4 = 176,\quad d_5 = 80 \quad \text{und} \quad d_6 = 15 \quad \text{ist:}$$

$$6 + \frac{n-1}{1} 44 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot 131 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 204 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 176 +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 80 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 15 =$$
$$= \frac{5n}{6!}[3n^5 + 33n^4 + 141n^3 + 291n^2 + 288n + 105] = \frac{15n(n+1)(n+2)^2(n+3)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{n(n+1)(n+2)^2(n+3)^2}{2 \cdot 4 \cdot 6}.$$

Da aber in P_3 kein Glied mit d^3 vorkommt, so müssen wir für n setzen $n-3$ und erhalten:

$$A_3 = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)^2 n^2}{2 \cdot 4 \cdot 6}.$$

Die Reihe R_4 ist eine arithmetische Reihe achter Ordnung, wie aus folgendem ersichtlich ist:

a :	24	274	1624	6769	22449	63273	157773	357423	749463	1474473 ....
d_1 :	250	1350	5145	15680	40824	94500	199650	392040	725010	
d_2 :	1100	3795	10535	25144	53676	105150	192390	332970		
d_3 :	2695	6740	14609	28532	51474	87240	140580			
d_4 :	4045	7869	13923	22942	35766	53340				
d_5 :	3824	6054	9019	12824	17574					
d_6 :	2230	2965	3805	4750						
d_7 :	735	840	945							
d_8 :	105	105								

Das allgemeine Glied dieser Reihe lautet, da

$$a = 24,\quad d_1 = 250,\quad d_2 = 1100,\quad d_3 = 2695,\quad d_4 = 4045,\quad d_5 = 3824,\quad d_6 = 2230,\quad d_7 = 735 \quad \text{und} \quad d_8 = 105 \quad \text{ist:}$$

$$24 + \frac{n-1}{1} \cdot 250 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot 1100 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2695 +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 4045 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 3824 +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 2230 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot 735 +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot 105 =$$
$$= \frac{n}{8!}[105n^7 + 2100n^6 + 17570n^5 + 79464n^4 + 208985n^3 + 317940n^2 + 257180n + 84336] =$$
$$= \frac{7n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(15n^3 + 150n^2 + 485n + 502)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} =$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+2{,}231\ 044\ 460\ 1)(n+3{,}586\ 619\ 531\ 88)(n+4{,}182\ 336\ 007\ 98)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}.$$

Da aber in P_4 kein Glied mit d^4 vorkommt, so müssen wir für n setzen $n-4$ und erhalten:

$$A_4 = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n-1{,}768\ 955\ 539\ 9)(n-0{,}413\ 380\ 468\ 12)(n+0{,}182\ 336\ 007\ 98)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}.$$

Die Reihe R_5 ist eine arithmetische Reihe zehnter Ordnung, wie sofort ersichtlich ist:

a:	120	1764	13132	67284	269325	902055	2637558	6926634	16669653	37312275	78558480	156952432 ....
d_1:	1644	11368	54152	202041	632730	1735503	4289076	9743019	20642622	41246205	78393952	
d_2:	9724	42784	147889	430689	1102773	2553573	5453943	10899603	20603583	37147747		
d_3:	33060	105105	282800	672084	1450800	2900370	5445660	9703980	16544164			
d_4:	72045	177695	389284	778716	1449570	2545290	4258320	6840184				
d_5:	105650	211589	389432	670854	1095720	1713030	2581864					
d_6:	105939	177843	281422	424866	617310	868834						
d_7:	71904	103579	143444	192444	251524							
d_8:	31675	39865	49000	59080								
d_9:	8190	9135	10080									
d_{10}:	945	945										

Das allgemeine Glied dieser Reihe lautet, da
$a = 120$, $d_1 = 1644$, $d_2 = 9724$, $d_3 = 33060$, $d_4 = 72045$, $d_5 = 105650$, $d_6 = 105939$, $d_7 = 71904$, $d_8 = 31675$, $d_9 = 8190$ und $d_{10} = 945$ ist:

$$120 + \frac{n-1}{1} \cdot 1644 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot 9724 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 33060 +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 72045 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 105650 +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} 105939 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} 71904 +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot 31675 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} \cdot 8190 +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} \cdot 945 =$$
$$= \frac{9n}{10!} [105 n^9 + 3325 n^8 + 45850 n^7 + 360570 n^6 + 1777545 n^5 + 5678925 n^4 + 11711700 n^3 + 14957180 n^2 +$$
$$+ 10656800 n + 3192000] = \frac{9n(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)(105 n^4 + 1750 n^3 + 10675 n^2 + 28070 n + 26600)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} =$$
$$= \frac{9n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)^2(n+5)^2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot (3n^2 + 23n + 38)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} =$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)^2(n+5)^2 \cdot (n + 2{,}409\,332\,503\,7)(n + 5{,}257\,334\,16)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}.$$

Da aber in P_5 kein Glied mit d^5 vorkommt, so müssen wir für n setzen $n - 5$ und erhalten:

$$A_5 = \frac{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)^2 n^2 (n - 2{,}590\,667\,4963)(n + 0{,}257\,334\,16)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}.$$

Das allgemeine Produkt der Reihe

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \quad a + 4d, \quad \ldots\ldots$$

wird also jetzt folgendermaßen lauten:

$$P_n = a^n + \frac{(n-1)n}{2} a^{n-1} d + \frac{(n-2)(n-1)n(n - 0{,}333\ldots)}{2 \cdot 4} a^{n-2} d^2 + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)^2 n^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^{n-3} d^3 +$$
$$+ \frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1) \cdot n \cdot (n - 1{,}768\,955\,539\,9)(n - 0{,}413\,380\,468\,12)(n + 0{,}182\,336\,007\,98)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} a^{n-4} d^4 +$$
$$+ \frac{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)^2 \cdot n^2 \cdot (n - 2{,}590\,667\,496\,3)(n + 0{,}257\,334\,16)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} a^{n-5} d^5 + \ldots$$

Anschauungsmittel zum propädeutischen Geometrieunterricht.

Von Dr. Gotthilf Haffner (Erlangen).

Bei der 15. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtes in Erlangen (Pfingsten 1906) hielt Herr Konrektor Ducrue über den damals erst kurz vorher in Bayern eingeführten propädeutischen Geometrieunterricht in der vierten Gymnasialklasse einen Vortrag, der eine Fülle von Anregungen bot und als willkommene Ergänzung des amtlichen Lehrplanes gelten kann (abgedruckt in den Unterrichtsblättern für Mathematik und Naturwissenschaften, Jahrgang XII).

Sicherlich wird jeder Lehrer darauf bedacht sein, in der dort angedeuteten Richtung selbst weiter zu bauen und insbesondere durch Modelle und experimentelle Methoden den vorbereitenden Unterricht in der Geometrie möglichst anschaulich zu gestalten. Wenn ich im folgenden zwei solcher Modelle, die sich als besonders anregend erwiesen und leicht herzustellen sind, beschreibe, so glaube ich, manchem vielleicht einen Dienst zu erweisen.

Das erste derselben ist zwar nicht neu, aber, wie ich aus Erfahrung weiß, bei weitem nicht so bekannt, wie es dasselbe verdient, so daß ich den Hinweis darauf nicht für überflüssig halte. Es dient dazu, den

Satz von den Innenwinkeln eines Dreiecks durch den praktischen Versuch zu bestätigen.

Man schneidet ein beliebiges Dreieck aus mittelstarkem Karton aus, halbiert zwei Seiten, zieht die Verbindungslinien der Halbierungspunkte und ferner von diesen Halbierungspunkten Senkrechte auf die dritte Seite (Grundlinie). (Fig. 1.) Nun ritzt man

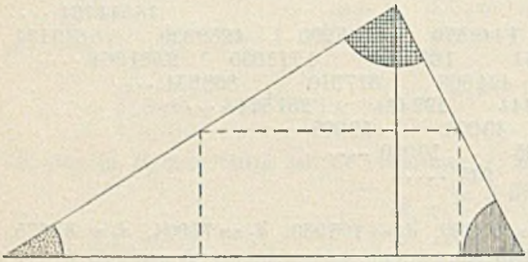


Fig. 1.

den Karton längs der gezogenen Linien und biegt die drei Ecken um diese Linien nach derselben Seite um. Die drei Eckpunkte des Dreiecks fallen dann alle auf den Fußpunkt der Höhe, die zur Grundlinie gezogen ist, und die drei Innenwinkel des Dreiecks kommen nebeneinander zu liegen, so daß direkt ihre Summe, ein gestreckter Winkel, erscheint. Die Wirkung des Modells wird noch erhöht, wenn man die drei Winkel durch Bemalen mit verschiedenen Farben oder durch Ueberkleben mit farbigem Papier kennzeichnet. Das Modell läßt sich leicht vor der Klasse herstellen und wird von den Schülern mit großem Eifer in verschiedenen Formen nachgebildet. Die Art der Besprechung desselben im Unterricht ergibt sich von selbst.

Vielseitiger ist die Verwendung des folgenden Modells, das ich noch nirgends beschrieben fand. Es hat zunächst den Zweck, den Begriff des Winkels anschaulich zu machen, kann aber auch im Rechenunterricht der zweiten Klasse (Quinta) bei der Behandlung der Brüche mit großem Vorteil verwendet werden.

Man schneide aus nicht zu starkem weißen und farbigen Kartonpapier je eine Kreisscheibe von etwa 12 cm (oder mehr) Radius aus, wobei an einer Stelle des Umfanges ein vorstehender kleiner Streifen (Griff) stehen bleibt (siehe Fig. 2). Auf der einen Seite

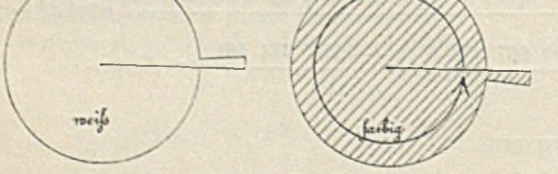


Fig. 2.

dieses Ansatzes werden die Scheiben, wie aus der Figur ersichtlich, längs eines Radius bis zur Mitte aufgeschnitten. Hierauf werden dieselben durch die Spalte ineinandergeschoben, so daß sie sich decken und dann im gemeinsamen Mittelpunkte mittels eines kleinen Nagels, der als Drehungsachse dient, auf dem einen Ende eines schmalen Brettchens (etwa aus Laubsägeholz, vielleicht 3 cm breit und ungefähr so lang wie der Durchmesser) befestigt. Die weiße Scheibe wird außerdem noch an dem vorstehenden Streifen auf dem Unterlagebrettchen festgeklebt oder mit einem Reißnagel festgehalten. Die farbige Scheibe läßt sich dann an dem Griff um den Mittelpunkt drehen, wobei sie sich entweder (bei Linksdrehung — positiver Drehungssinn) durch den Spalt der weißen Scheibe über diese weiße Scheibe heraus schiebt und so sichtbar wird oder (bei Rechtsdrehung — negativer Drehungssinn) unter der weißen Scheibe verschwindet. Auf der weißen Scheibe bringt man (entweder am Rande oder an einem dem Mittelpunkte näher liegenden Kreise) eine Gradeinteilung an (von 5^0 zu 5^0 genügt). Auf die farbige Scheibe kann man einen schwarzen kreisförmigen Pfeil malen, der die positive Drehungsrichtung angibt.

Mit Hilfe dieses Modells lassen sich alle Winkel darstellen und zwar sehen die Schüler den Winkel *entstehen*, indem der Anfangsstrahl sich um seinen Endpunkt nach links herum dreht und dabei den Winkel *beschreibt*, d. h. als Spur eine *Fläche* hinterläßt.

Auf dieses Beschreiben einer Fläche durch eine sich bewegende Linie wird man die Schüler dabei besonders hinweisen. Denn während das Beschreiben einer Linie durch den sich bewegenden Punkt ohne weiteres anschaulich gemacht werden kann durch die körperliche, sichtbare Spur, welche die Bleistift-, Feder- oder Kreidenspitze auf einer Unterlage hinterläßt oder durch die scheinbare Spur eines glimmenden, rasch im Kreise bewegten Holzspanes, ist es sonst nicht so einfach, das Beschreiben einer Fläche durch eine sich bewegende Linie sinnenfällig zu machen. Neben der auf optischer Täuschung beruhenden Methode der rasch rotierenden Draht- oder Blechformen dürfte das beschriebene Modell hierzu ein gutes Mittel sein.

Aber auch bei der Einführung in die Lehre von den Brüchen ist seine Verwendung sehr förderlich. Denn es lassen sich damit eine große Reihe von einfachen Brüchen als farbige Teilflächen der ganzen Kreisfläche rasch und anschaulich darstellen. Um diese Darstellung zu erleichtern, kann man die Stellung des bewegten Endschenkels bei einer Reihe von einfachen Brüchen, wie $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{10}$, $^1/_{12}$, $^1/_{20}$, $^1/_{36}$; $^2/_3$, $^3/_4$, $^2/_5$, $^3/_5$, $^4/_5$ usw. auf der weißen Scheibe an einem Kreise markieren, der zu dem Kreise mit der Gradteilung konzentrisch ist, oder man kann auch die Gradteilung selbst hierzu benutzen.

Auch dieses Modell wird von den Schülern aller Altersstufen eifrig nachgemacht; man wird daher auch der Herstellung desselben einige Worte im Unterricht widmen, während man vor den Augen der Schüler ein solches in einfacher Form zusammensetzt. Bei solcher Improvisation mag als Grundbrett einfach ein Lineal dienen und zur Befestigung der Kreisscheiben ein paar Reißnägel.

Die ganzen rationalen Wurzeln der kubischen Gleichung.

Von Dr. P. Richert (Berlin).

(Fortsetzung.)

Bevor ich meine Untersuchungen über das obige Thema fortsetze, möchte ich die Form, welche die Größe $3b_1^2$ haben muß, damit sie für ganze rationale Wurzeln brauchbar wird, noch etwas kürzer fassen. Es ist bisher von der Form $6n+1$ die Rede gewesen; ich will jetzt zeigen, daß es genügt, hierfür $3n+1$ zu setzen. *Jede* ganze Zahl läßt sich nämlich offenbar durch eine der 6 Formen $6n$, $6n+1$, $6n+2$, $6n+3$, $6n+4$, $6n+5$ ausdrücken. Von diesen stellen nun aber $6n$, $6n+2$, $6n+3$, $6n+4$ keine Primzahlen dar, da ja die zweite und vierte den Faktor 2, die dritte den Faktor 3 und die erste sogar beide Zahlen zugleich als Faktoren enthält. Es bleiben also noch $6n+1$ und $6n+5$ übrig. Von diesen hat aber die erste die Form $3(2n)+1$ und die andere die Form $3(2n+1)+2$. Jene kann kürzer durch $3n'+1$, diese durch $3n'+2$ dargestellt werden. Jene bietet uns aber die für ganze rationale Wurzeln geeigneten, diese die nicht geeigneten Zahlen dar. Wenn auch jene unter n' nur gerade, diese nur ungerade Zahlen verstanden wissen will, so bedeutet das dennoch keine Einschränkung, da die Einsetzung von ungeraden Zahlen im ersten Falle und die von geraden Zahlen im zweiten Falle wieder zu Nichtprimzahlen führt. Demnach kann man jetzt sagen: „Jede Primzahl P, die durch die quadratische Form (3, 0, 1) darstellbar sein soll, muß von der Form $3n+1$ sein." Diesen Satz will ich der Kürze wegen als „Primfaktorensatz" oder noch kürzer als „Faktorensatz" bezeichnen. Dagegen soll der andere, der in der Gleichung $P \cdot P' = 3(rs' + r's)^2 + (3rr' + ss')^2$ enthalten ist, als „Produktensatz" bezeichnet werden.

Beide im Verein miteinander liefern uns das Mittel, eine numerische Auflösung der kubischen Gleichung, wenn sie nur ganzzahlige Wurzeln enthält, zu bewerkstelligen. Die Vorschriften, die behufs Erreichung dieses Zweckes zu beachten sind, sind folgende:

1. Man untersucht in der Gleichung

$$x^3 - 3b_1^2 x - 2c_3 = 0$$

zunächst den Faktor $3b_1^2$, ob er eine Primzahl ist oder nicht. Ist er eine Primzahl und zwar eine solche von der Form $3n+2$, so hat die Gleichung überhaupt keine ganzen rationalen Wurzeln; hat er aber die Form $3n+1$, so sucht man diejenige quadratische Form, durch welche er darstellbar ist. (Wie man sie finden kann, soll später gezeigt werden.)

2. Ist aber $3b_1^2$ keine Primzahl, so zerlegt man sie in ihre Primfaktoren. Sind unter ihnen solche nichtquadratische Faktoren, die wieder die Form $3n+2$ haben, so gibt es abermals keine Darstellung durch die quadratische Form (3, 0, 1); haben dagegen alle Primfaktoren von $3b_1^2$ die Form $3n+1$, so suche man für jeden einzelnen die ihm zukommende Darstellung durch (3, 0, 1) und suche dann mit Hilfe des „Produktensatzes" alle möglichen Darstellungen des ganzen Produktes. Zerfällt $3b_1^2$ in zwei solche Primfaktoren, so gibt es 2 Darstellungen; zerfällt es in 3 Primfaktoren, so gibt es deren 4, bei 4 Primfaktoren $8 \cdots$, überhaupt bei n Primfaktoren 2^{n-1} Darstellungen.

Ein Beispiel für 2 Primfaktoren habe ich bereits in einer früheren Nummer gegeben. Es betraf die Zahl 91. Hier will ich die Zahl 133 betrachten, welche in die beiden Primfaktoren 7 und 19 zerfällt. Es ist also $133 = 7 \cdot 19$; und da $7 = 3 \cdot 1^2 + 2^2$ und $19 = 3 \cdot 1^2 + 4^2$ ist, so ist

$$133 = 7 \cdot 19 = (3 \cdot 1^2 + 2^2)(3 \cdot 1^2 + 4^2) = 3(4+2)^2 + (3+8)^2$$
$$133 = 3 \cdot 2^2 + 11^2 = 3 \cdot 6^2 + 5^2.$$

Hieraus folgen einerseits die Wurzeln $(-4, -9, 13)$ oder $(4, 9, -13)$ die beide für $2c_3$ denselben absoluten Betrag 468 liefern und andererseits $(-12, 1, 11)$ oder $(12, -1, -11)$, die beide für $2c_3$ den absoluten Betrag 132 ergeben. Unter diesen Werten muß $2c_3$ enthalten sein, wenn die durch 133 geforderten Wurzeln möglich sein sollen.

Ein anderes Beispiel sei die Zahl 1729, welche außer 7 und 19 auch noch den Primfaktor 13 enthält. Indem wir die obige Zerlegung der 133 in $7 \cdot 19$ benutzen, bedenken wir, daß wir sowohl die erste als auch die zweite Darstellung derselben mit der Darstellung von 13 kombinieren können. Kombinieren wir zuerst

$$\text{und}\quad \left|\begin{array}{l} 133 = 3 \cdot 2^2 + 11^2 \\ 13 = 3 \cdot 2^2 + 1^2 \end{array}\right|,$$

so erhalten wir $3(2+22)^2 + (12+11)^2$, woraus sich

$$\left\{\begin{array}{l} 3 \cdot 20^2 + 23^2 \\ 3 \cdot 24^2 + 1^2 \end{array}\right\}$$

ergibt. Kombinieren wir aber die zweite Darstellung von 133 mit der von 13

$$\left|\begin{array}{l} 133 = 3 \cdot 6^2 + 5^2 \\ 13 = 3 \cdot 2^2 + 1^2 \end{array}\right|,$$

so erhalten wir $3(6+10)^2 + (36+5)^2$, woraus sich

$$\left\{\begin{array}{l} 3 \cdot 4^2 + 41^2 \\ 3 \cdot 16^2 + 31^2 \end{array}\right\}$$

ergibt. Die hier möglichen vier Wurzelkombinationen lauten also, abgesehen vom Vorzeichen: 40, 3, 43; 48, 23, 25; 8, 37, 45; 32, 15, 47 und die daraus resultierenden Werte von $2c_3$ heißen 5160, 27600, 13320; 22560. Soll eine Auflösung durch ganze rationale Wurzeln möglich sein, so muß $2c_3$ einen dieser vier Werte haben.

3. Hat man also alle möglichen Darstellungen von $3b_1^2$ gefunden, so bilde man — so heißt die letzte Vorschrift — mit Hilfe der Gleichungen $x_1 = 2r$, $x_2 = -r - s$, $x_3 = -r + s$ die Wurzeln der Gleichungen, die dem gegebenen $3b_1^2$ zugänglich sind und aus ihnen die Produkte, so hat man die zu jeder Darstellung gehörige Größe $2c_3$.

Zu jedem absoluten Werte von $2c_3$ gehören nun aber noch 2 Gruppen von Wurzeln, die sich nur durch die Vorzeichen voneinander unterscheiden. Ist $2c_3$ positiv, so sind die beiden absolut kleineren Wurzeln positiv; ist es aber negativ, so sind diese Wurzeln negativ, da ja die Ersetzung von x durch $(-x)$ die Umkehrung des Vorzeichens von $2c_3$ bewirkt.

Mehrere Darstellungen der Größe $3b_1^2$ durch die quadratische Form (3, 0, 1) sollen nun „wesentlich verschieden" voneinander heißen, wenn ihre Benutzung zur Wurzelbildung zu solchen Werten von $2c_3$ führen, deren absolute Beträge voneinander verschieden sind. Demnach sind die 4 obigen Darstellungen von 1729 alle „wesentlich verschieden". Sind aber die aus den verschiedenen Darstellungen ableitbaren Wurzeln dem absoluten Betrage nacheinander gleich, so daß sich ihre Produkte höchstens durch ihr Vorzeichen voneinander unterscheiden, so sollen dieselben „unwesentlich verschieden" heißen. Solche unwesentlich verschiedenen Darstellungen sind die drei Darstellungen der 28, die Herr Eckhardt auf S. 17 besonders hervorhebt, sowie auch jedes anderen Produktes aus 4 und einer Primzahl von der Form $3n+1$. Es genügt, eine von diesen drei Darstellungen als Repräsentanten der ganzen Gruppe anzuführen. Am einfachsten ist es, man sucht die Darstellung der betreffenden Primzahl und multipliziert darin ihr r und s mit 2. So z. B. ist

$$52 = 4 \cdot 13 = 4(3 \cdot 2^2 + 1^2) = 3 \cdot 4^2 + 2^2.$$

Zur kubischen Gleichung.

Von E. Eckhardt (Homburg v. d. H.).

In Nr. 1, Jahrg. XVI dieser Zeitschr. zieht Herr Richert auch die Intervalle für die beiden anderen Wurzeln der kubischen Gleichung heran und gibt ihre Werte an unter der Voraussetzung, daß c negativ ist. Die von mir S. 17 in Nr. 1 erwähnten Intervalle gelten jedoch für ein positives und negatives c. Setzt man $c < 0$ voraus, so sind zwei negative Wurzeln vorhanden, und das mittlere Intervall reduziert sich auf die Hälfte:

$$-\sqrt{-\frac{b}{3}} \cdots\cdots 0 \text{ oder } -b_1 \cdots\cdots 0.$$

Dies ist aber genau das von Herrn Richert angeführte Intervall. (S. meine Arbeit a. a. O., S. 449.)

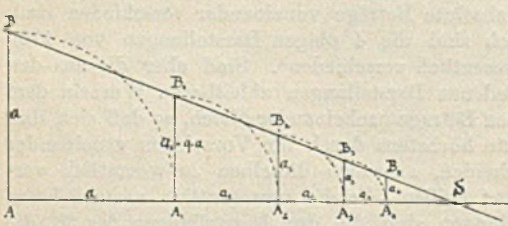
In bezug auf das Intervall der zweiten negativen Wurzel gilt für die untere ohne weiteres einleuchtende Grenze*) $-\sqrt{b}$ oder $-b_1\sqrt{3}$ das bei der positiven Wurzel in Nr. 1 Gesagte. Für die obere Grenze $-\sqrt{-\frac{b}{3}}$ oder $-b_1$, die am schwierigsten abzuleiten ist, beanspruche ich jedoch ebenfalls die Priorität.

Zur Konvergenz der geometrischen Reihe.

Von W. Rottsieper (Göttingen).

In Nummer 3 des vorigen Jahrganges der Unterrichtsblätter hat Herr Dr. Goldziher, Budapest, mit Benutzung eines Gedanken Nonnes (Zinseszins- und Rentenrechnung mit Hilfe graphischer Darstellung, Berlin 1903, R. Eisenschmidt) eine hübsche zeichnerische Veranschaulichung für die geometrische Reihe gegeben. Im folgenden möchte ich nun diese Betrachtung durch ein näheres Eingehen auf die Konvergenz der Reihe ein wenig ergänzen.

Aus der Zeichnung ist zu ersehen, wie die Strecke $AB \perp AA_1$ das Anfangsglied a und die Strecke $A_1B_1 \perp AA_1$ das zweite Glied $a_1 = q \cdot a$ der geometrischen Reihe darstellt, wobei der Abstand AA_1 der Fußpunkte gleich a sein soll. Zieht man nun die Gerade BB_1, so liefert die Senkrechte A_2B_2 in A_2, wenn $A_1A_2 = a_1$ gemacht wird, bis zum Schnittpunkte B_2 mit der Verlängerung von BB_1 das dritte Glied $a_2 = q \cdot a_1 = q^2 a$ u. s. f.



Man sieht, wie die Glieder abnehmen, und erkennt auch, wie die Strecken AA_1, AA_2, AA_3, AA_4 usw. die Teilsummen darstellen, die sich immer mehr der Strecke AS nähern, wenn S der Schnitt der Verlängerungen von AA_1 und BB_1 ist. Volle Klarheit darüber, daß nun AS auch wirklich die Grenze dieser Summe ist, liefert diese Betrachtungsweise aber noch nicht. Viel klarer kommt im Falle $q = \frac{1}{2}$ die Konvergenz zur Anschauung, wenn man die Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ dadurch veranschaulicht, daß man die einzelnen Glieder dieser Reihe durch Zerschneiden eines Papierstreifens von 1 m Länge z. B. herstellt und die abgeschnittenen Stücke aneinanderlegt. Man erkennt hierbei deutlich, daß man, um ein neues Glied zu erhalten, den vorhandenen Rest des Streifens einfach nur zu halbieren braucht, daß also bei der Summation der Streifen nicht nur ausreicht, sondern auch ausgeschöpft wird, um mich dieses glücklichen Ausdrucks aus der Geschichte der Kreisberechnung zu bedienen.

Wenn wir diesen Gedankengang auf die allgemeine geometrische Reihe übertragen wollen, so müssen wir uns fragen, was hier das die Erkennung der Konvergenz Bedingende war. Nun eben, daß die jedesmaligen Reste A_kS ebenfalls eine abnehmende geometrische Reihe bilden, daß man also diesen Rest durch hinreichend ausgedehnte Summation so klein machen kann, wie man will. Das läßt sich nun auch leicht bei der allgemeinen Reihe zeigen, wenn man Rechnung und Zeichnung Hand in Hand gehen läßt. So sollte es ja überhaupt bei einer verständigen Behandlung derartiger Aufgaben sein. Die Zeichnung liefert die beste Stütze für die Anschauung und gibt durch ihre weitere Ausdeutung meist noch eine Fülle von Anregungen, die aus der Rechnung nicht ohne weiteres hervorgehen würden, die Rechnung aber gibt erst die volle begriffliche Sicherheit und auch das Mittel, die Genauigkeit so weit zu treiben, wie man es will.

Wenn wir nun für die Strecken A_kS die kürzere Bezeichnung r_k einführen, so ergibt sich folgende, möglichst gerade auf das Ziel lossteuernde Ableitung:

$$r_1 = r - a.$$

Ist nun $a_1 = q \cdot a$, so ist auch $r_1 = q \cdot r$ (Aehnl. Dreiecke).

$$r_2 = r_1 - a_1 = q \cdot r - q \cdot a = q \cdot (r - a) = q \cdot r_1,$$

also auch $\qquad a_2 = q \cdot a_1,$

$$r_3 = r_2 - a_2 = q \cdot r_1 - q \cdot a_1 = q \cdot (r_1 - a_1) = q \cdot r_2,$$

also auch $\qquad a_3 = q \cdot a_2,$

$$r_4 = r_3 - a_3 = q \cdot r_2 - q \cdot a_2 = q \cdot (r_2 - a_2) = q \cdot r_3;$$

also auch $\qquad a_4 = q \cdot a_3$

usw. Mithin bilden sowohl die a als auch die r eine geometrische Reihe. Wenn wir also von r zunächst a, dann noch $q \cdot a$, $q^2 \cdot a \cdots$ abziehen, so bilden die Reste $r_1, r_2 \cdots$ eine gegen 0 abnehmende geometrische Reihe. Umgekehrt muß sich bei Addition dieser Größen um so genauer r ergeben, je mehr Glieder man nimmt. Aus $r_1 = r - a$ und $r_1 = q \cdot r$ folgt $r - a = q\,r$ und $r = \frac{a}{1-q}$.

*) S. Weber-Wellstein, Bd. I, 1903, S. 295.

Kleinere Mitteilungen.

Anschauliche Schätzung der Grösse von π.

Von H. Dreßler (Dresden).

Seit längerer Zeit gebe ich vor der Berechnung der Zahl π durch Annäherung den Schülern eine, wenn auch grobe, Veranschaulichung dieser Zahl, wie folgt:

1. Aus $p = 2\,r\,\pi$ folgt durch Zerlegung der Figur in zwei Teile, daß jeder Halbkreis offenbar größer als der Durchmesser ist, also:

$$\frac{p}{2} > 2\,r, \quad \frac{2\,r\,\pi}{2} > 2\,r, \quad \pi > 2.$$

2. Durch Zerlegung in vier Teile folgt, daß der Viertelkreisumfang kleiner als 2 Radien ist. Statt Bogen BC mit $BM + CM$ zu vergleichen, vergleicht man ihn mit $AB + AC$.

$$\frac{p}{4} < 2r, \quad \frac{2r\pi}{4} < 2r, \quad \pi < 4.$$

Zusammenfassung. Aus 1. und 2. folgt ungefähr: $\pi \sim 3$.

3. Durch Zerlegung in Viertel folgt, daß der Viertelkreisinhalt kleiner als das Quadrat mit der Seite r ist.

$$\frac{K}{4} < r^2, \quad \frac{r^2\pi}{4} < r^2, \text{ wieder: } \pi < 4.$$

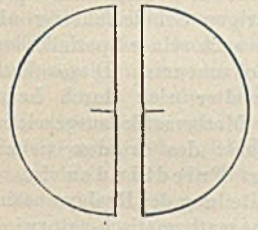


Fig. 1.

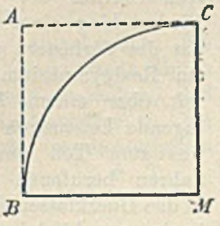


Fig. 2.

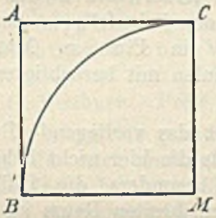


Fig. 3.

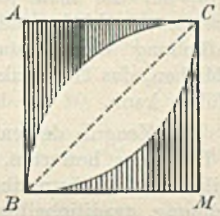


Fig. 4.

4. Durch Vergleich mit dem Dreieck BMC folgt, daß desgleichen

$$\frac{K}{4} > \triangle BMC, \quad \frac{K}{4} > \frac{r^2}{2}, \quad \frac{r^2\pi}{4} > \frac{r^2}{2},$$

wieder $\pi > 2$ ist.

Die Zusammenfassung von 3 und 4 ergibt $\pi \sim 3$.

5. Betrachtet man wieder ein Viertel, so ist zunächst die Figur $ABC \simeq BMC$ und die Linse BC dazwischen etwa ebenso groß als beide Teile,

d. h. $ABC \sim \frac{1}{4}$ des Quadrats, folglich ist:

$$\frac{K}{4} \sim r^2 - \frac{r^2}{4}, \quad \frac{K}{4} \sim \frac{3r^2}{4}, \quad \frac{r^2\pi}{4} \sim \frac{3r^2}{4}, \quad \pi \sim 3.$$

Sowohl aus dem Umfang wie aus dem Inhalte und ebenso nach der fünften Art erhält man rein anschaulich, daß π ungefähr gleich der Zahl 3 sein müsse.

Die vorstehende Ableitung findet sich in einem im Druck befindlichen Lehrbuch für preußische Studienanstalten*), welches vom Verfasser dieser Zeilen bearbeitet worden ist. —

* * *

Graphische Lösung der Gleichung $x^2 + ax \pm b = 0$.

Von W. Schlags (Trier).

Die Gerade $X'X$ sei durch entsprechende Einteilung eine graphische Darstellung der natürlichen Zahlenreihe. Der Nullpunkt sei bei O. Durch geometrische Zeichnung läßt sich alsdann die Gleichung $x^2 + ax - b = 0$ auf folgende Weise lösen: Wir bestimmen Punkt A so, daß $OA = -\frac{a}{2}$. Dann tragen wir von O aus auf OX nach der einen Seite $OB = +b$ (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, das b in der Gleichung hat) ab und nach der anderen Seite $OC = +1$, so daß also $CB = +(b+1)$. Jetzt ziehen wir $OY \perp X'X$ und beschreiben über BC einen Halbkreis, der OY in D schneiden möge. Beschreiben wir dann um A mit Radius AD einen Kreis, der $X'X$ in x_1 und x_2 schneidet, so können wir bei x_1 und x_2 die Werte für x ablesen.

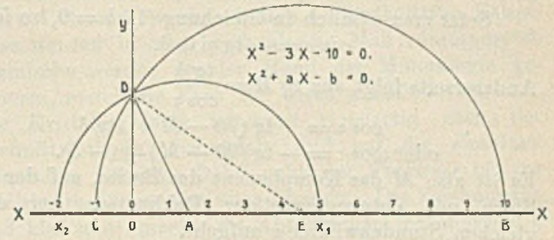


Fig. 1.

Fig. 1 zeigt die Lösung für die Gleichung $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Für die Form der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ ist die graphische Lösung — reelle Wurzeln unterstellt — folgende. Wir bestimmen zunächst die Punkte

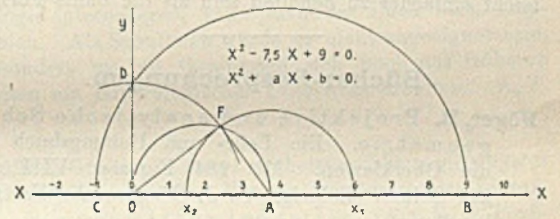


Fig. 2.

A, B, C und D genau wie vorhin. Dann beschreiben wir über OA einen Halbkreis und um O mit Radius OD einen Kreis, der den Halbkreis OA in F trifft. Beschreiben wir dann um A mit Radius AF einen Kreis, der $X'X$ in x_1 und x_2 schneidet, so können wir wieder bei x_1 und x_2 die Werte für x ablesen.

Fig. 2 zeigt die Lösung für die Gleichung $x^2 - 7{,}5\,x + 9 = 0$.

* * *

Ueber eine Formel der mathematischen Geographie.

Von W. Lorey (Minden i. W.).

Wenn man die geographische Breite eines Ortes aus der zu einer bestimmten Zeit beobachteten Höhe eines Sternes berechnen will, so kommt der Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie zur Anwendung, nämlich

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

In dem besonderen Falle ist $c = 90^0 - h$, $a = 90^0 - \varphi$, $b = 90^0 - \delta$ und $\gamma = \tau$ (dem Stundenwinkel).

Somit erhält man

$$(1) \quad \cos \tau = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}.$$

Für die logarithmische Rechnung formt man diese Gleichung durch Einführung eines Hilfswinkels M um, indem man $\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos \tau}$ setzt.*)

*) Mathematische Unterrichtsbücher für höhere Mädchenschulen von Prof. Dr. G. Noodt; für Studien-Anstalten Kl. 4 bearbeitet von Prof. H. Dreßler (Dresden); Velhagen & Klasing in Bielefeld, 1910.

*) Siehe z. B. Wirtz, Geograph. Ortsbestimmung. Enzyklopädie d. math. Wiss. VI 2, 3. S. 156.

Es folgt nämlich daraus

$$\sin\delta\frac{\cos M}{\sin M}=\frac{\sin h-\sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi}$$

oder

$$\sin\delta(\cos M\cos\varphi+\sin M\sin\varphi)=\sin h\sin M$$

also

$$\cos(M-\varphi)=\frac{\sin h\sin M}{\sin\delta}.$$

Es ist nun vielleicht noch nicht beachtet worden, daß die hier eingeführte Hilfsgröße M eine einfache geographisch-astronomische Bedeutung hat.

Setzt man nämlich in Gleichung (1) $h=0$, so folgt

$$\cos\tau=-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta.$$

Andererseits folgt aus $\operatorname{tg}M=\frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos\tau}$

$$\cos\tau=\operatorname{tg}(90-M)\cdot\operatorname{tg}\delta$$

oder $\cos\tau=-\operatorname{tg}(90-M)\operatorname{tg}(-\delta)$.

Es ist also M das Komplement der Breite, auf der ein Stern mit entgegengesetzter Deklination bei dem gleichen Stundenwinkel τ aufgeht.

Da aber auch

$$\cos(2R-\tau)=-\operatorname{tg}(90-M)\operatorname{tg}\delta,$$

so kann M auch als Komplement der Breite gedeutet werden, auf der der betreffende Stern 12 Stunden (Sternzeit) später aufgeht.

Für das Gedächtnis dürften diese Tatsachen vielleicht einfacher zu behalten sein als die bloße Formel.

Bücher-Besprechungen.

Böger, R. Projektive und analytische Schulgeometrie. Ein Lehr- und Uebungsbuch für die Oberklassen. Mit 184 Figuren, VIII und 211 Seiten. Leipzig. G. J. Göschensche Verlagshandlung.

Der Verfasser ist seit zwei Jahrzehnten ein eifriger Vorkämpfer für die Einführung bezw. stärkere Betonung der Geometrie der Lage im mathematischen Schulunterricht. Aus diesem Streben ging zunächst eine Programmabhandlung des Realgymnasiums des Johanneums in Hamburg hervor, die in Form eines Leitfadens „Elemente der Geometrie der Lage“ schon in mehreren Auflagen erschienen ist. Ihr folgte die „Ebene Geometrie der Lage“ in der Sammlung Schubert, ein ausführliches Lehrbuch für die Hand des Lehrers. Den Abschluß dieser systematischen Propaganda haben wir in dem vorliegenden Schulbuche zu sehen. Hier zeigt der Verfasser, wie die Geometrie der Lage organisch dem Unterricht in den Oberklassen einzufügen ist.

Wenn der Verfasser in der Einleitung die Mehrzahl der Lehrbücher mit Recht in zwei Gruppen teilt, von denen die eine halb widerwillig einige Sätze der Geometrie der Lage einem sonst euklidischen oder allenfalls synthetischen Lehrgebäude einfügt, die andere durch rein projektives Verfahren sich die Gunst der Herren von der alten Schule von vornherein verscherzt, so hat er doch einige bemerkenswerte Vorgänger übersehen, die auf ähnlichem Wege wie er, nämlich durch grundsätzliche Einfügung der neueren Geometrie oder wie er sich ausdrückt, durch Anpassung der üblichen Planimetrie an die Geometrie der Lage, für diese Propaganda zu machen suchten. Allerdings sind wohl die Geometrien von E. Kruse und K. Fink nicht so bekannt geworden, wie sie es nach ihrer originellen Darstellung und ihrem wertvollen Inhalte verdienten, aber die Lehrbücher von Henrici und Treutlein haben doch eine sehr bemerkenswerte Verbreitung in Süddeutschland gefunden und gehen insofern erheblich weiter als R. Böger, als sie die Planimetrie auch schon in den Mittelklassen durchaus im Sinne der neueren Geometrie reformieren.

Immerhin wird diesen ein so energischer norddeutscher Bundesgenosse willkommen sein und sein Buch hat um so größeren Wert, als es nicht eine Konstruktion der Gelehrtenstube ist, sondern der Niederschlag einer langjährigen Schulerfahrung nicht nur des Verfassers, sondern auch seiner Spezialkollegen am Realgymnasium des Johanneums. Dieses hat ja seit über einem Menschenalter sich durch hervorragende Leistungen in der Mathematik ausgezeichnet, was zum Teil das Verdienst des in den siebziger Jahren berufenen Direktors Friedländer ist, der in den Oberklassen eine Zweiteilung des Realgymnasiums in eine sprachliche und in eine mathematisch-naturwissenschaftliche durchführte. Man kann über diese Maßregel, auf die man jetzt anderwärts wieder zurückkommt, verschieden denken, jedenfalls ist nach ihrer Aufhebung der Anstalt ein Plus an Mathematik geblieben, das Oberrealschulen mit berechtigtem Neide erfüllen kann.

Ein Zeugnis dessen ist das vorliegende Buch, um so höher zu bewerten, als die hier nicht behandelten Teile der Mathematik, besonders die Differentialrechnung, traditionell einen breiten Raum im Pensum des betr. Realgymnasiums einnehmen. Schon aus diesem Grunde ist das Studium des Bögerschen Buches zu empfehlen, wenn auch viele gleich dem Referenten die Hoffnung, Gleiches zu erzielen, werden aufgeben müssen.

Das erste Kapitel, die Lehre von den Doppelverhältnissen, bereitet elementar aber in scharfem Hinblick auf die spätere streng wissenschaftliche Darstellung auf die Geometrie der Lage vor. Warum der Verfasser sich nicht hat entschließen können, das innere Teilverhältnis positiv zu setzen, wie es doch nun allgemein üblich geworden ist und auch in den besseren Schulbüchern — ich will nur J. Langes schöne synthetische Geometrie der Kegelschnitte nennen — geschieht, ist nicht motiviert. Verständlich ist aber, daß das dualistische Prinzip hier wohl im Anfang angedeutet, aber nicht durchgeführt ist, um eine volle Verwendung für das dritte Kapitel aufzusparen.

Das zweite Kapitel gibt eine synthetische Geometrie der Kegelschnitte mit Beschränkung auf die maßgeometrischen Sätze. Im dritten Kapitel folgt die Geometrie der Lage, auf den stereometrischen Beweis des Lehrsatzes von Desargues begründet und bis zu den Involutionen geführt. Ganz eigenartig ist dann das vierte Kapitel mit der Ueberschrift „Maßbeziehungen“. Die geraden und krummen Punktreihen finden hier eine so gründliche Behandlung, daß der Verfasser selbst an ihrer vollständigen Durchnahme zu zweifeln scheint.

Auf dieser Grundlage baut sich die analytische Geometrie in entsprechendem Umfange auf. Die rechtwinkligen Koordinaten erscheinen nur als ein Spezialfall der schiefwinkligen. Besonderer Wert wird auf die Lösung geometrischer Ortsaufgaben gelegt und hierbei werden drei Methoden unterschieden: rein geometrische, projektiv-geometrische, analytisch-geometrische. Eine Sammlung von 222 Ortsaufgaben mit

Andeutungen und Ergebnissen macht den Beschluß. Dieser letzte Abschnitt birgt ja unzweifelhaft die Gefahr einer einseitigen und — man darf wohl den Ausdruck wagen — überspannten Ausbildung. Der Verfasser versichert zwar, daß keine Kunstgriffe zur Lösung nötig sind; das trifft aber doch auch nur für den Schüler zu, der das vorangegangene System beherrscht, so daß ihm immer der nötige Satz gleich einfällt. Aber unzweifelhaft ist hier ein treffliches Aufgabenmaterial für Lehrer und für selbständig arbeitende Schüler zusammengestellt.

Wenn das Buch hier eine eingehendere Besprechung gefunden als sonst an dieser Stelle üblich ist, so ist es in der Ueberzeugung geschehen, daß recht viele Lehrer mit dem Berichterstatter in ihm eine hervorragende „Förderung des mathematischen Unterrichts“ sehen werden. A. T.

* * *

Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. 3. Aufl., neu bearbeitet von Georg Scheffers. III. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. — 657 Seiten 8⁰ mit 63 Textfiguren. Leipzig 1909, B. G. Teubner. Preis geb. M 10.—.

Es ist schon rein quantitativ eine kolossale Arbeitsleistung, ein solch umfangreiches, dreibändiges Werk innerhalb dreier Jahre neu herauszugeben. Die Leistung wird noch staunenswerter, wenn wir sehen, daß auch qualitativ alles bis aufs kleinste nachgesehen, verbessert und umgearbeitet wurde. Wir haben die Neuauflagen der beiden ersten Bände in diesen Blättern Jahrg. XIII, Seite 137 und Jahrg. XIV, Seite 133 angezeigt. Der vorliegende Band ist am meisten Eigentum des Bearbeiters geworden. Auch hier wurde, wie in den früheren Bänden, eine reinliche Scheidung zwischen den Betrachtungen im reellen und imaginären Gebiete vorgenommen. Gleicherweise wurden die Abschnitte, in denen die Lieschen Methoden der infinitesimalen Transformation zur Anwendung kamen, denen übrigens erhöhte Aufmerksamkeit geschenkt wurde, so angeordnet, daß sie bei einem ersten Studium auch übergangen werden können. Daß alle Begriffe schärfer gefaßt und alle Figuren neu gezeichnet wurden, ist fast selbstverständlich. Die Variationsrechnung nimmt nur etwa den dreizehnten Teil des ganzen Textes ein. Das Kapitel wurde jetzt auch, nachdem sich die Disziplin zu einer schwierigen Einzelwissenschaft ausgewachsen hat, mit der bescheidenen Ueberschrift „Einleitung in die Variationsrechnung“ versehen. Immerhin wird der Leser aus ihm aber die allgemeinen Gesichtspunkte kennen lernen, welche die Begründer der Variationsrechnung, die Brüder Bernoulli, Euler und Lagrange im Auge hatten.

Gegenüber der ersten deutschen Ausgabe ist das Werk jetzt an Umfang fast um die Hälfte gewachsen. Wenn trotzdem keine historischen und Literatur-Angaben gemacht werden konnten, so können wir als einzige Entschuldigung nur das gelten lassen, daß Herr Scheffers die Ausgabe, nachdem die 2. Auflage schon längst vergriffen war, nicht noch weiter verzögern wollte. Bei einem solchen Umfange käme es gewiß nicht darauf an, jedem Band noch einen Bogen anzuhängen. Und wenn, was wir hoffen, Herr Scheffers bald berufen werden wird, sich an die 4. Auflage zu machen, so wird er diesem berechtigten Wunsche, da die andere Arbeit nur mehr gering sein wird, sicher Rechnung tragen. Indessen möge dieses prächtige Werk, wie es ist, seinen Weg machen.

H. Wieleitner (Pirmasens).

* * *

Ruska, Dr. J., Professor an der Oberrealschule in Heidelberg. Leitfaden der Mineralogie. VIII und 144 S. 9 Farbentafeln u. 215 Abbild. Leipzig. Quelle & Meyer. Preis 2 M.

Der Leitfaden soll eine Ergänzung des Schmeilschen Unterrichtswerkes bilden. Physikalische Kenntnisse werden in sehr bescheidenem Maß vorausgesetzt, chemische werden an der Hand der Mineralogie gewonnen, soweit sie eben für diese unentbehrlich sind. Die Kristallographie ist ganz eigenartig nach der „Schnittmethode“ behandelt und auf die einzelnen Mineralien verteilt. Dabei geht der Verfasser bis zur Analyse recht komplizierter Formen. Die Zeichnungen sind klar und korrekt, die Abbildungen farbenprächtig und wirkungsvoll. Der Text ist sehr ansprechend geschrieben und doch mit jener schulmeisterlichen Geschicklichkeit, die dem Gedächtnis den nötigen Halt bietet. Mehr als in älteren Büchern ist auf Bildung und Entstehung der Mineralien Rücksicht genommen und dadurch ein guter Teil Gesteinslehre und Geologie hineingezogen. Schülern, die sich ernsthaft für Mineralogie interessieren, kann man das Buch warm empfehlen. Als Schulbuch würde es nicht ungeeignet sein, besonders wo an Gymnasien sich noch aus früheren Zeiten ein mineralogischer Unterricht erhalten. A. T.

* * *

Müller, Gustav, Kaiserl. Geheimer Oberregierungsrat und vortragender Rat im Reichsamt des Innern. Die chemische Industrie. (Aus B. G. Teubners Handbüchern für Handel und Gewerbe). VIII und 488 Seiten. Leipzig 1909. B. G. Teubner. Preis geh. M 11.20, in Leinwand geb. M 12.—.

Gewissermaßen als Ergänzung der früher auch in diesen Blättern besprochenen und derselben Sammlung angehörigen „Chemischen Technologie“ von Dr. Heusler erscheint nun eine umfangreiche Schrift, welche die einzelnen Zweige der chemischen Industrie nach ihrer wirtschaftlichen Seite hin würdigt. Ist das Buch naturgemäß auch in erster Linie für den im praktischen Betriebe stehenden Chemiker und den solchen Industriezweigen nahe stehenden Kaufmann geschrieben, so wird doch wohl auch mancher Leser dieser Zeitschrift gern das äußerst klar und scharf disponierte Werk zur Hand nehmen, um daraus manche Anregung für seinen Unterricht zu entnehmen. Wird doch hier einmal die Chemie von einem ganz anderen Standpunkte, in der Verwendbarkeit ihrer Erzeugnisse, dargestellt. Dr. W. Brüsch (Lübeck).

* * *

Planck, Dr. Max, Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Zweite Auflage. XVI und 278 Seiten. Leipzig und Berlin 1908. B. G. Teubner. Preis in Leinwand geb. M 6.—.

Der um 31 Seiten gegenüber der im Jahre 1887 erschienenen ersten Auflage größere Umfang dieser lesenswerten Schrift ist lediglich auf das etwas kleinere Format und den noch verbesserten Druck zurückzuführen. Zu umfangreichen Ergänzungen und noch viel weniger zu Erweiterungen oder Umarbeitungen hat der Verfasser, wie er selbst im Vorworte schreibt, sich nicht entschließen können, gleichwie er das auch in der ersten Auflage trotz dahin gehender Wünsche der Göttinger philosophischen Fakultät nicht getan hat. Und dieses zähe Festhalten an dem einmal formulierten Wortlaute der Schrift wird jedem erklärlich sein, der einmal das Vergnügen gehabt hat, bei Planck Vorlesungen zu hören. Ist doch auch dieses Werk in dem schlichten und dabei keineswegs trockenen, sondern teilweise geradezu lebhaften Stile verfaßt, der auch die Hochschulvorträge des Gelehrten auszeichnet. Ob er nun die historische Entwicklung (1. Teil) dem Leser entrollt, ob er das Prinzip in feiner, scharfsinniger Weise formuliert und beweist (2. Teil) oder unter Zuhilfenahme des notwendigen Rüstzeuges höherer Mathematik die verschiedenen Energiearten eingehender behandelt (3. Teil): Immer zeichnen sich alle Sätze durch Klarheit und Gedankenreichtum aus. — Nur an ganz wenigen Stellen sind kleine Zusätze in Form von Anmerkungen gemacht worden. Aber auch da kommt es dem Herrn Verfasser nur darauf an, entweder auf Ergebnisse neuerer Untersuchungen, z. B. Seite 64 auf L. Boltzmanns Arbeiten über den zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie, hinzuweisen oder seine in dem Buche gefaßte Stellungnahme zu einem Problem, wie auf Seite 181 hinsichtlich der Betrachtung der Beweglichkeit eines Punktes, zu unterstreichen bezw. anderen Ansichten gegenüber, hier derjenigen Heinrich Hertz' in dessen Prinzipien der Mechanik, zu betonen.

Jeder Physiker, der Plancks Werk noch nicht kennt, sollte es gründlich studieren: dem Studierenden ist es als zwar im letzten Teile nicht ganz leichte, aber gewinnbringende Lektüre zu empfehlen.

Dr. W. Brüsch (Lübeck).

* * *

Pierre Hachet-Souplet, Untersuchungen über die Psychologie der Tiere. Neue experimentelle Methode zur Klassifikation der Arten nach psychologischen Gesichtspunkten von Pierre Hachet-Souplet, Gründer und Leiter des „Institut international de Psychologie zoologique". Autorisierte, vom Verfasser auf den neuesten Stand ergänzte deutsche Ausgabe von Friedrich Streissler, koresp. Mitglied des „Institut international de Psychologie zoologique". Preis M 3.—. Verlag von E. Ungleich, Leipzig.

Die durch die unwissenschaftliche Behandlungsweise früherer Jahrzehnte in Mißkredit gekommene Psychologie der Tiere ist in den letzten fünfzehn Jahren von neuem der Gegenstand wissenschaftlichen Interesses geworden. Bestand sie um die Mitte des XIX. Jahrhunderts aus unkritischen Sammlungen von Jägergeschichten und Anekdoten, so bedient sie sich jetzt des Experimentes und ist damit ein Teil der Naturwissenschaften geworden.

Die verschieden hohe Organisation der einzelnen Tiergruppen verlangt eine ebenso verschiedene Methodik der Untersuchung; für die Säugetiere und Vögel im besonderen ist seit zehn Jahren auch die Dressur in den Kreis der Experimente aufgenommen worden. Nicht als ob nicht seit langen Zeiten Tiere dressiert wären. Es fehlte aber die bestimmte Methode und die Verwertung der aus der Dressur zu ziehenden Schlüsse auf die zugehörigen psychologischen Vorgänge. Zu den ersten, die die Dressur in die wissenschaftliche Psychologie einführten, gehört Hachet-Souplet, dessen 1900 erschienenes Werk „Examen psychologique des animaux" jetzt in einer deutschen Uebersetzung vorliegt.

Die Dressur kann als Einübungsverfahren definiert werden; die natürlichen Fähigkeiten der Tiere werden entwickelt, so daß sie auf Befehl durch Wort oder Gebärde Bewegungen ausführen, die ihnen in der Freiheit nicht geläufig sind (pag. 36). Dieses Ziel der Dressur kann nicht bei allen Tieren mit analogen Mitteln erreicht werden, sie sind vielmehr der geistigen Höhe der betr. Tiere anzupassen. Verfasser unterscheidet folgende drei Methoden: 1. die durch Ueberredung, d. h. durch Zeichen oder Worte wird in dem Tiere eine Gedankenverbindung erweckt, die es zur Ausführung der verlangten Handlung veranlaßt; 2. die Methode des Zwanges, durch Hunger oder Furcht wird das Tier zu bestimmten Handlungen gezwungen, und 3. die Methode der Erregung (Reizung), diese wird in dem Buche weniger behandelt, sie kommt bei den niedersten Tieren zur Anwendung. Verfasser teilt nun nach dem zur Dressur erforderlichen Mittel die Tiere in drei Hauptabteilungen ein: die psychischen Fähigkeiten der untersten beschränken sich auf Reflexe, die der nächsthöheren auf Reflexe und Instinkte, während den Vertretern der höchsten Klasse neben Instinkten noch eine gewisse Intelligenz zukommt. Das bei der betreffenden Stufe zur Anwendung kommende Verfahren wird an mehreren Beispielen ausführlich nach dem Tagebuch geschildert. Z. B. sollen Tauben, zur zweiten Klasse gehörig, dressiert werden, sich auf Schulter, Arme und Kopf einer Person zu setzen. Sie werden im Käfig in ein völlig kahles Zimmer gebracht, in deren Mitte eine Säule mit einer Schale zur Aufnahme des Futters steht. Nach einer Fastenzeit wird der Käfig geöffnet, die Tauben fliegen zur Säule und fressen; nach der Sättigung werden sie wieder eingesperrt. Am folgenden Tage reicht die Körnerration nicht zur Sättigung aus, es wird in dem eben verlassenen Käfig Futter gestreut und die halb gesättigten Tauben durch Peitschenknall in den Käfig gescheucht, wo sie sich satt fressen können. Nach wenigen Tagen sind die Tauben gewöhnt, vom Käfig zur Säule und umgekehrt zu fliegen, ohne daß ihnen Futter gestreut wird. Dann wird die Säule durch eine Person, in der Hand die Futterschale, ersetzt; die Tauben fliegen auf die Schale. Am folgenden Tage fehlt die Schale, die Tauben setzen sich, aus dem Käfig gejagt, auf Schultern und Kopf der Person und bleiben bei ihren Bewegungen sitzen: Sie sind dressiert; Dauer sieben Tage.

So gibt Verfasser noch einige andere Beispiele, u. a. auch von der Dressur durch Ueberredung. Durch Gebärden und Wort wird ein Hund dressiert, auf einer Kugel zu balanzieren, dann sie fortzurollen. Auch hier genügen wenige Lektionen zur Erreichung des gewünschten Resultats.

Bemerkenswert ist, daß die erzwungenen Bewegungen des Hundes zuletzt automatisch erfolgen, sie sind aus bewußten Handlungen zu Instinkthandlungen geworden.

Die im einzelnen Falle erforderliche Methode kann — so meint Hachet-Souplet — zur Bestimmung der physischen Fähigkeiten des Tieres dienen; sie gibt ein Mittel zur Entscheidung der Frage, ob Instinkte, d. h. automatisch ablaufende, aus Reflexen kombinierte Handlungen des Tieres ursprünglich bewußt ausgeführt wurden und durch fortdauernde Uebung zu unbewußten

Instinkten (abgeleitete Instinkte) herabsanken, oder ob sie durch natürliche Zuchtwahl angezüchtet worden sind. „Ist nämlich ein Tier der Ueberredung zugänglich, d. h. verfügt es über freie Intelligenz, dann hat seine instinktive Geschicklichkeit ihren Ursprung gleichfalls in der Intelligenz". Es ist zu bemerken, daß Verfasser, sowie er sich von dem ihm vertrauten Gebiete der Dressur entfernt, sich in vage Spekulationen verliert, die seine schönen Erfolge beeinträchtigen. Referent ist nicht der Meinung, daß die eben angeführte Beweisführung zugunsten einer Intelligenz der Tiere, d. h. eines aus der Einsicht in den Kausalzusammenhang entspringenden Handelns, gebilligt werden kann von dem Standpunkte der modernen Tierpsychologie, die eingedenk des „Prinzips der Oekonomie" mit möglichst wenig Voraussetzungen arbeitet. Wir kommen mit der Annahme eines Gedächtnisses, der Ansammlung von Erinnerungsbildern aus, die auf einen Sinnesreiz hin sich assoziieren und die zweckentsprechende Handlung auslösen. Eine Scheidenmuschel, die durch Bestreuen mit Salz zum Herauskommen aus ihrem Loche veranlaßt wird, bleibt im Sande versteckt, wenn sie nach dem Herauskommen in die Hand genommen wird (pag. 46). Es ist unangebracht, von „Ueberlegung" zu sprechen. Es assoziiert sich der Reiz des Bestreuens mit Salz mit der schädigenden Wirkung der Anpassung: der ursprüngliche Reflex des Hervorkommens wird gehemmt.

Es geht über den Rahmen eines Referates, den einzelnen Ausführungen des Verfassers zu folgen. Seine nicht immer klaren Darlegungen lassen bisweilen eine genügende Bekanntschaft mit den Tatsachen der neueren Biologie vermissen (besonders im Vorwort und im ersten Kapitel): die biologische Entwickelung; hier steht Verfasser noch auf dem Boden naiver Anschauungen aus den Werdejahren des Darwinismus; sogar der Bathybius spielt eine Rolle. Das Verständnis wird durch die mangelhafte Terminologie erschwert: Ausdrücke wie Instinkt, Begriff, Typus, Intelligenz, Idee sind nicht definiert und werden in widersprechender Weise verwendet. Manches ist vielleicht auf Kosten der nicht besonders praktischen Uebersetzung zu stellen. Wenn Uebersetzer für Karnivoren Raubtiere, für Primaten Affen zu setzen glaubte, so hätte er auch Ausdrücke wie Zytoden, Plastiden u. a. in einer Anmerkung erklären sollen. Wünschenswert wäre die Hinzufügung der lateinischen Bezeichnung, besonders bei niederen Tieren, gewesen, z. B. Scheidenmuschel, Scheidentiere (= Tunicaten?) u. a. m. An sinnentstellenden Verwechselungen fehlt es nicht; so hat der Uebersetzer im Vorwort, wo er über die Beziehungen von Hachet-Souplet zu Edinger, dem Frankfurter Gehirnanatomen spricht, das „Pallium", einen Teil des Großhirns, mit der Hirnschale verwechselt; Beverrier statt Leverrier ist wohl ein Druckfehler.

Dr. Werner Th. Meyer.

* * *

Reishauer, Herrmann, Die Alpen. Aus Natur und Geisteswelt, Bd. 276. B. G. Teubner, Leipzig 1909.

Werth, Emil, Dr., Das Eiszeitalter. Sammlung Göschen, Nr. 431, Leipzig 1909.

Die Alpen nehmen in der Geschichte der Geographie und Geologie eine ganz besondere Stellung ein. Einmal haben sie manchem der späteren Führer und Pfadfinder, wie einem Alexander v. Humboldt oder Leopold v. Buch, Ferdinand v. Richthofen oder Eduard Sueß erstmalig die Großartigkeit des Gebirges enthüllt und ihnen Probleme gestellt, dann aber sind sie auch andererseits die Geburtsstätte neuer Theorien gewesen, die dort gewonnen und begründet befruchtend auf viele Zweige der Erkenntnis gewirkt haben. Die Deutung mächtiger Bergklötze als Korallenriffe, die Herausbildung der Hochgebirgsformen durch das Eis und die Tatsache der Eiszeit, Anschauungen über den Mechanismus der Gebirgsbildung und in allerneuester Zeit die großartige Ueberschiebungstheorie sind nur einige der den Alpen zu verdankenden Erkenntnisse. Deshalb sind auch die Alpen das bestdurchforschte Gebirge der Welt und wer sie zur Erholung oder körperlichen Betätigung aufsucht, soll ebensowenig unterlassen, sie verstehen und damit wirklich genießen zu lernen, wie der Lehrer der Naturwissenschaften im Unterricht achtlos an ihnen vorübergehen darf.

Das Buch von Reishauer ist eine treffliche Anleitung für die Betrachtung unseres Gebirges. Nach einer Einführung in das Landschaftsbild der verschiedenen Zonen wird der Aufbau der Alpen und ihre Umformung durch die einzelnen Kräfte geschildert. Auf die Ueberfaltungstheorie wird eingegangen und sie für die Westalpen als sicher begründet dargestellt. Diese nimmt an, daß sich in tertiärer Zeit vor und nach der Ablagerung der Molasse am Innenbogen der Alpen große liegende Falten gebildet haben, die über die Molasse hinweggeschoben worden sind. Später sind diese Decken noch von Faltungsbewegungen ergriffen und dadurch wie auch durch die Tätigkeit abtragender Kräfte stark verändert, so daß vielfach nur einzelne Gipfel als „Klippen" übriggeblieben sind. Bei Steinmanns Ansichten, der sogar die gesamten nördlichen und mittleren Ostalpen als wurzellose Ueberschiebungsdecken auf jüngeren Gesteinen lagern läßt, wird auf die Verneinung dieser kühnen Hypothese durch die meisten Ostalpengeologen hingewiesen. Der dann folgende Abschnitt Alpen und Leben stellt eine sehr gut gelungene moderne Kulturgeographie dar, die neben Belehrung auch Anregung in reichem Maße gibt.

Die gebirgsbildenden und umformenden Faktoren können in einer Gesamtdarstellung nur kurz beschrieben werden. Wer sich eingehender mit der in ihrer Art und Wirkung leicht zu beobachtenden Kraft des Eises beschäftigen will, sei auf das Eiszeitalter von Werth hingewiesen. Es ist ein Buch, das wirklich eine Lücke ausfüllt, da es eine kurze, aber erschöpfende Behandlung des Eiszeitphänomens mit allen seinen Beziehungen zu den Naturwissenschaften ist. Da Werth nicht nur in den Alpen und Norwegen geforscht hat, sondern als Mitglied der deutschen Südpolarexpedition auch Erfahrungen über das Innlandeis auf den Kerguelen gesammelt hat und vielfach eigene Untersuchungen berücksichtigt, trägt das Buch — nicht zu seinem Nachteil — einen etwas persönlichen Charakter. Ferner muß noch als Vorzug gerechnet werden, daß die Spuren eiszeitlicher Gletscher auch in außereuropäischen Ländern genau verfolgt werden, so daß man ein vollständiges Bild der Eiszeit in ihrer großen Bedeutung für die Umgestaltung weiter Erdräume erhält. Der dann am Schluß unternommene Versuch, die in verschiedenen Ländern gewonnenen Gliederungen der wichtigsten eiszeitlichen Ablagerungen zu parallelisieren ist eben ein erster Versuch.

Dr. R. Lütgens.

Wagner, W. Die Heide. 200 Seiten mit zahlreichen Abbildungen im Text und 7 Tafeln. (Naturwissenschaftliche Bibliothek für Jugend und Volk. Herausgegeben von Konrad Höller und Georg Ulmer.) In Originalleinenband M 1.80. Verlag von Quelle & Meyer in Leipzig. 1909.

Nicht als Kritiker, sondern als alter Heidewanderer blätterte ich in dem Buche und ließ mich durch den anspruchslosen und anheimelnden Ton fesseln. So plaudert ein guter Freund, der ein bischen — gar nicht so arg viel — mehr als wir von der Vorzeit, den Pflanzen und den Tieren der Heide zu wissen scheint. Wir folgen ihm unwillkürlich und ganz unvermerkt hat er uns zu Heideforschern gemacht, die nun selbst beobachten und sich freuen, daß der Verfasser teilnimmt an unserer Arbeit, hier eine Pflanze, dort ein Tierchen benennt, wo es geht deutsch, wenns sein muß, auch mit gelehrtem Namen. Aber er wird nicht aufdringlich und vor allem nicht langweilig. Das Leben der Tiere und Pflanzen und ein wenig auch das der Menschen, die die Heide bewohnen und bewohnt haben lange vor unserer Zeitrechnung, schließt sich vor uns unter den Streiflichtern auf, wie sie auch wohl durch den lichten Heidewald fallen. Ob, wer die Heide nicht kennt, das Buch mag? Das weiß ich nicht; aber ich glaube, wer das Buch kennen gelernt, wird Lust bekommen, die Heide lieb zu gewinnen.

A. T.

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Fenkner, Arithmetische Aufgaben. Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik und Chemie, sowie von Aufgaben über graphische Darstellungen. Ausgabe A (für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen). Teil IIa (Pensum der Ober-Sekunda). 4., verb. Aufl. Berlin 1910, Otto Salle. M 1.50.

Fenkner und Hessenbruch, Lehr- und Uebungsbuch der Mathematik für höhere Mädchenschulen. Teil I: Pensum von Klasse IV und III. Mit zahlreichen Figuren im Texte. Berlin 1910, Otto Salle. M 1.80.

Kottmeier u. Uhlmann, Das Holz. Leipzig 1910, Quelle & Meyer. M 1.25.

Levin und Briecke, Methodischer Leitfaden der Chemie und Mineralogie für höhere Mädchenschulen, sowie für den Anfangsunterricht in Studienanstalten. Mit 84 Abb. 2., verb. Aufl. Berlin 1910, Otto Salle. M 2.—.

Otto, F., u. Siemon, P., Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik und Algebra für höh. Mädchenschulen. Pensum für Klasse IV bis I. Mit 28 Fig. 3. Aufl. Leipzig 1909, Hirt & Sohn. geb. M 2.25.

Plath, J., Lehrbuch der Mathematik zur Vorbereitung auf die Mittelschullehrer-Prüfung und auf das Abiturientenexamen am Realgymnasium. Mit 128 Fig. 2. Aufl. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 4.—.

Pfuhl, Der Pflanzengarten. Leipzig 1910, Quelle & Meyer. M 2.80.

Ratzel, F., Anthropogeographie. I. Teil: Grundzüge und Anwendung der Erdkunde auf die Geschichte. 3., unveränderte Auflage (Bibliothek geographischer Handbücher, begründet v. F. Ratzel, Neue Folge, herausg. v. A. Penck). Stuttgart 1909, Engelhorn. M 15.—.

Reinhardt, W., u. Müller, H., Arithmetik u. Algebra f. d. oberen Klassen d. höh. Mädchenschulen, Real- und Mittelschulen. Mit 10 Fig. Frankfurt a. M. 1909, Auffarth. geb. M 1.20.

—„—, Aufgaben für den Rechenunterricht im 3. Schuljahre. Im Anschluß an die Aufgabensammlung für den Rechenunterricht von C. Becker & K. Paul. Ebenda. geb. M 0.30.

—„—, Geometrie für die oberen Klassen der höheren Mädchenschulen, Real- und Mittelschulen. Mit 262 Fig. Ebenda. geb. M 1.20.

Revue de l'Enseignement des Sciences, dirigée par F. Marotte, 3me année, No. 29, 30, 4me année No. 31, 32. Paris 1910, Le Soudier.

Ruska, Leitfaden der Mineralogie. Leipzig 1910, Quelle & Meyer. M 2.—.

Schilling-Weber-Seiwert, Kleine Schul-Naturgeschichte. 22. Bearbeitung v. J. Seiwert. I. Teil: Der Mensch und das Tierreich. Mit 316 teilweise farbigen Abb. u. 9 farb. Taf. Breslau 1909, Hirt. geb. M 2.—.

Schütze, Kraftmaschinen. Leipzig 1910, Quelle & Meyer. M 1.80.

Schwarzschild, K., Ueber das System der Fixsterne. Mit 13 Fig. Leipzig 1909, Teubner. M 1.—

Smalian, K., Naturwissenschaftl. Unterrichtswerk f. höh. Mädchenschulen, bearb. von K. Bernau. II. Teil: Lehrstoff der VI. Klasse. Mit 72 Abb. u. 11 Farbentafeln. Leipzig 1910, Freytag. geb. M 1.80. — III. Teil: Lehrstoff der V. Klasse. Mit 161 Abb. u. 10 Farbentafeln. geb. M 2.25.

Sommerfeld, P., Milch und Molkereiprodukte. Leipzig 1910, Quelle & Meyer. M 1.25.

Sperber, J., Leitfaden für den Unterricht in der anorganischen Chemie. III. Teil. Zürich 1908, Speidel. M 6.—.

Sprockhoff, A., Naturwissenschaften für höhere Mädchenschulen. I. Abteilung. Botanik für das 4. Schuljahr. Behandlung einzelner einheimischer Pflanzen mit besonderer Berücksichtigung der Biologie. 11. Aufl. Mit vielen Abb. Hannover 1909, Meyer. geb. M 0.80.

Technische Monatshefte, herausgeg. v. F. Kahl und A. Reitz, 1910, Heft 1—2. Stuttgart 1910, Franckh. Preis viertelj. (mit Buchbeilage) M 1.75.

Timm, Niedere Pflanzen. Leipzig 1910, Quelle & Meyer. M 1.80.

Wagner, Die Heide. Leipzig 1910, Quelle & Meyer. M 1.80.

Wallentin, Ignaz, Grundzüge der Naturlehre f. die unteren Klassen der Mittelschulen. Ausg. C. Für Realgymnasien. Wien 1909, Pichlers Wwe. & Sohn. geb. M 3.20.

Wunschmann, E., Botanik. I. Bd. Mit 93 Figuren u. einer farbigen Tafel. Breslau 1910, Hirt. geb. M 2.—.

Zeitschrift f. Lehrmittelwesen und pädagogische Literatur. Herausgeg. von Franz Frisch. Jahrg. V, Nr. 10. Wien 1909, Pichlers Wwe. & Sohn.

ANZEIGEN.

Technologie in der Schule!
Gebr. Höpfel, Lehrmittelanstalt
Berlin NW. 5, Rathenowerstr. 63
Ständige Ausstellung von technologischen und naturwissenschaftlichen Lehrmitteln.
Kataloge gratis!

Achromatische
Schul-Mikroskope
erst. Güte hält stets a. Lager
F. W. Schieck
Optische Fabrik
Berlin SW. 11.
Preislisten kostenlos.

Analysen-Wagen
mit konstant. Empfindlichkeit, schnellschwingend, sowie chem.-techn. Wagen von anerkannt unübertroffener Genauigkeit, mit div. Neuerungen, vielfach prämiiert, empfehlen
A. Verbeek & Peckholdt, Dresden-A.
Lieferanten vieler Universitäts- und Hochschullaboratorien, sowie von Gymnasien, Realschulen, Seminaren usw.

Lehrmittel für den Unterricht in
Mathematik und Zeichnen
aus Holz, Draht oder Blech empfiehlt
Felix Neustadt, Lehrmittelverlag
Niederlössnitz b. Dresden.
Ausführliche Preisliste kostenlos, Anfertigung auch nach besond. Angaben.

Apparate für elektrische Strom-Spannungs- u. Widerstandsmessungen
aller Systeme.
Komplette Schul-Schalttafeln
sowie Meßzimmer-Einrichtungen.
Spezialfabrik elektrischer Meßapparate
Gans & Goldschmidt
Elektrizitäts-Ges. m. b. H., Berlin N 65.

Max Kohl, A. G., Chemnitz, Sachsen
Größtes Etablissement auf dem Kontinent für die Herstellung von
::: Physikalischen Apparaten und :::
:::: chemischen Gerätschaften ::::
kompl. Laboratoriums-Einrichtungen mit allen dazu erforderlich. Möbeln usw.
Man verlange ausführlichen Katalog und Kostenanschläge.

R. Winkel, Göttingen
Optische und mechan. Werkstatt.
Mikroskope
von den allerfeinsten bis zu den einfachen Schulmikroskopen
— in erstklassiger Ausführung. —
Preisliste frei und unberechnet.

Gülcher's Thermosäulen
mit Gasheizung.
Vorteilhafter Ersatz f. galv. Elemente. — Konstante elektromotorische Kraft. Ger. Gasverbrauch. — Hoh. Nutzeffekt. Keine Dämpfe. — Kein Geruch. — Keine Polarisation, daher keine Erschöpfung. Betriebsstörungen ausgeschlossen.
Julius Pintsch, Aktiengesellschaft, Berlin O. 27, Andreasstr. 71—73.

Ed. Messter
Berlin NW 6, Schiffbauerdamm 18
Mikroskope
für alle naturwiss. Untersuchungen
Preislisten kostenlos

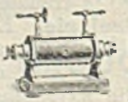
C. Gerhardt, Bonn a. Rh.
Apparate für Chemie und Physik
Einrichtung von Industrie- : und Schul-Laboratorien :

Elektrochem. u. Physiko-chem.
Unterrichts-, Demonstrations- und
:: Vorlesungs-Apparate ::
Laboratoriums - Einrichtungen
Elektr. Meß-Instrumente
Feinmech.-glastechn. Werkstätten für Laboratoriumsbedarf
L. H. Zeller, Leipzig VII/76

G. Lorenz, Chemnitz.
Physikal. Apparate.
Preisliste bereitwilligst umsonst.

Wilh. Lambrecht
Fabrik wissenschaftlicher Instrumente
Meteorologie — Hygiene Industrie
Göttingen (Georgia-Augusta)
Spezialität: Haarhygrometer.

Fr. Klingelfuss & Co.
Basel



Induktoren mit Präzisions-Spiral-Staffelwicklung
— Patent Klingelfuss. —

Lehrmittel
für den
naturwissensch. Unterricht
liefert in anerkannt erstklassiger Ausführung zu mäßigen Preisen
Wilh. Schlüter, Halle a. S.
Naturwissensch. Lehrmittel-Institut.

Fr. Fuendeling, Friedberg i. H.
Werkstätten für Feinmechanik und Elektrotechnik
Apparate für den physikal. und chemischen Unterricht
Spezialität: Neukonstruktionen.

Robert Müller, Glasbläserei
und Fabrik chem.-phys. Apparate
Essen-Ruhr, Kaupenstraße 46—48
empfiehlt seine
Doppelthermoskope und Apparate für strahl. Wärme nach Prof. Dr. Looser.
Preislisten gratis und franko.

Richard Müller-Uri,
Braunschweig.
Glastechnische Werkstätte.
Physikalische und chemische Vorlesungs-Apparate.
Spezialitäten: Elektro-physikalische und Vakuumapparate bester Art.

Ehrhardt & Metzger Nachf.
Darmstadt.
Apparate für Chemie u. Physik.
Vollständige Einrichtungen.
Eigene Werkstätten.

E. Leitz, Wetzlar
Projektionsapparate
Mikroskope, Mikrotome
Mikrophotographische Apparate
= Photographische Objektive =
Prismen - Feldstecher.

Mikroskope und Nebenapparate
E. Hartnack, Potsdam

Vorzügl. Erwerbsquelle
für Pensionierte, Rentner, Damen ist ein Original-Kaiser-Panorama, das Ideal aller Anschauungsmittel, stereoplast. Urkunden, das Sehenswert. der Erde, 760 Zyklen, grösst. Archiv der Welt. An 1000 pädag. Anerkenn. 250 Filialen. Ca. 2500 M., erford. Prosp. gratis. Hoff. A. Fuhrmann, Berlin W, Passage. Lichtbilder mit Vorträgen leihweise.

Ia Qualität künstl. Tier- und Vogelaugen, feinste Säugetieraugen mit Glasemaille, Garantie naturgetreu, künstl. Menschenaugen (Reformaugen nach Prof. Snellen), Hilfsartikel aus Glas für Aquarien, Präparaten- und Conchyliengläser, Thermometer usw. offeriert (Preislisten franko)
Theodor Zschach, Mönchröden
bei Coburg
Glaswaren und künstl. Augenfabrik.

Die Erde
und die Erscheinungen ihrer Oberfläche
Eine physische Erdbeschreibung
von Dr. Otto Ule.
2. umgearb. Auflage von Prof. W. Ule.
Mit 15 Karten, 5 Vollbild., 157 Textbild.
Preis geh. 10 M, geb. 12 M.
Verlag von Otto Salle in Berlin W 57.

Es wird höflichst gebeten, sich bei Bestellungen auf die „Unterrichtsblätter" zu beziehen.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.