Jahrgang XVII. 1911. No. 1.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe** und **Friedrich Pietzker**,
von diesem geleitet bis 1909, zurzeit herausgegeben von
Prof. Dr. **A. Thaer**,
Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentore in Hamburg.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Dir. Thaer, Hamburg 36, erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (5 Mk. Jahresbeitrag) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 8 Nummern ist 4 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Nachdruck der einzelnen Artikel ist, wenn überhaupt nicht besonders ausgenommen, nur mit genauer Angabe der Quelle und mit der Verpflichtung der Einsendung eines Belegexemplars an den Verlag gestattet.

Inhalt: Vereins-Angelegenheiten (S. 1). — Die Helligkeitsempfindlichkeitskurve des Auges und ihre Benutzung zur Temperaturbestimmung. Von Prof. Dr. Otto Lummer in Breslau (S. 2). — Zur Reform des mathematischen Unterrichts an den technischen Mittelschulen. Von Prof. Dr. Ebner in Aachen (S. 12). — Beweis des Brianchonschen Satzes bezüglich des Kreises. Von Prof. Dr. Graefe in Darmstadt (S. 13). — Zwei diophantische Gleichungen. Von W. Hoffmann in Riga (S. 14). — Beiträge zur Berechnung der Zahl π. Von A. Wendler in Erlangen (S. 15). — Kleinere Mitteilungen [Gedächtnisregel für Sinus-Werte. Von Dr. W. Jaeckel in Ohlau. — Geometrische Ableitung der Gleichung für $\sin\alpha + \sin\beta$. Von Oberstudienrat Dr. M. Zwerger in Nürnberg. — Nochmals über Zerlegungsbeweise zum Pythagoreischen Satz. Von Chr. Nielsen in Varel (S. 16).] — Lehrmittel-Besprechungen (S. 17). — Bücherbesprechungen (S. 18). — Zur Besprechung eingetroffene Bücher (S. 20). — Anzeigen.

Vereins-Angelegenheiten.

Die XX. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht findet vom 5. bis 9. Juni in Münster i. Westf. statt. Der unter dem Vorsitz des Herrn Geheimrat Prof. Dr. Killing gebildete Ortsausschuß setzt sich aus folgenden Herren zusammen:

1. Ehrenausschuß.

Herr Staatsminister Freiherr von der Recke von der Horst, Oberpräsident der Provinz Westfalen und Kurator der Westfälischen Wilhelms-Universität; Herr Wirklicher Geheimer Oberregierungsrat Ascher, Präsident der General-Kommission; Herr Prof. Dr. Diekamp, d. Z. Rektor der Westfälischen Wilhelms-Universität; Herr Dr. jur. et phil. Hammerschmidt, Landeshauptmann; Herr Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. Hittorf; Herr Oberbürgermeister Dr. Jungeblodt; Herr Landesrat Kayser, Stadtverordneten-Vorsteher.

2. Geschäftsausschuß.

Vorsitzender: Herr Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. Killing.

Mitglieder: Herr Prof. Dr. Busz; Herr Prof. Dr. Correns; Herr Prof. Dr. Hovestadt; Herr Prof. Dr. Kaßner; Herr Oberlehrer Dr. Linneborn; Herr Prof. Dr. Meinardus; Herr Prof. Dr. Plaßmann; Herr Prof. Dr. Püning; Herr Prof. Dr. Rosemann; Herr Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. Salkowski; Herr Provinzial-Schulrat Dr. Schickhelm; Herr Prof. Dr. Gerh. Schmidt; Herr Prof. Dr. Stempell; Herr Baugewerbeschul-Direktor Vonderlinn; Herr Prof. Dr. Wangemann.

Eine größere Anzahl von Vorträgen ist bereits angemeldet und mehrere Besichtigungen und wissenschaftliche Ausflüge sind in Aussicht genommen, die im nächsten Hefte zur Mitteilung gelangen werden.

Weitere Anmeldungen von Vorträgen werden unter der Adresse des Herrn Geheimrat Prof. Dr. Killing (Münster i. Westf.) oder der des derzeitigen Vereinsvorsitzenden (Hamburg 36) erbeten.

Dr. A. Thaer.

Die Helligkeitsempfindlichkeitskurve des Auges und ihre Benutzung zur Temperaturbestimmung.

Vortrag, gehalten auf der XIX. Hauptversammlung des Vereins in Posen

von Otto Lummer (Breslau).

§ 1. Einleitung. Meine Herren! Zahlreich sind die Arbeiten, welche zum Zweck haben, die Helligkeitsempfindlichkeit unseres Auges für die verschiedenen Spektralfarben zu bestimmen. Aber erst in der allerletzten Zeit ist es gelungen, diese Bestimmung einwandsfrei und genau auszuführen.*) Bei der Darlegung der neuen Methode werden wir notwendig auf die neueren Erkenntnisse in bezug auf das „Sehen im Hellen und Dunklen" eingehen müssen, und es bietet sich mir somit Gelegenheit, Ihnen auch einige Versuche vorzuführen, die vielen von Ihnen vielleicht noch unbekannt sein dürften. Es war dies mit der Grund, gerade dieses Thema zu wählen.

§ 2. Die zur Bestimmung der Helligkeitsempfindlichkeitskurve notwendigen Daten. Um zu erfahren, um wievielmal heller die gleiche Energie Rot empfunden wird als die gleiche Energie Gelb, Grün, Blau usw., muß man erstens die Energieverteilung im Spektrum kennen und zweitens die Helligkeit der verschiedenen Spektralfarben miteinander vergleichen. Bei der geringen Energie im Spektrum konstant brennender Lichtquellen ist die energetische Messung recht schwierig, will man die Energieverteilung von Wellenlänge zu Wellenlänge kennen lernen. Die „farbige" Photometrie bietet aber nicht minder große Schwierigkeiten, insofern im allgemeinen die Helligkeitsvergleichung von der absoluten Intensität des Spektrums abhängt.

Die erstere Schwierigkeit ist überwunden, seitdem der „absolut schwarze" Körper verwirklicht worden ist und die Gesetze der schwarzen Strahlung festgelegt sind. Dadurch erübrigt sich eine direkte Messung der Energieverteilung im Spektrum; diese ist mit Hilfe der Dispersionskurve des benutzten Prismas zu errechnen (siehe § 5a).

Aber auch die Helligkeitsvergleichung der verschiedenen Spektralbezirke miteinander hat eine festere Basis gewonnen. Einmal durch Anwendung des „Flickerprinzips" auf die Spektralphotometrie und vor allem durch die neueren Erkenntnisse in bezug auf das „Sehen im Hellen und Dunklen". Erst seitdem wir wissen, daß den beiderlei Netzhautelementen, den Zapfen und den Stäbchen, deren anatomische Verschiedenheiten man seit langem kannte, auch beim Sehen ganz verschiedene Funktionen zuerteilt werden müssen, ist auch in die Photometrie farbiger Flächen Klarheit gekommen. Wir gehen daher zunächst auf die neuere Anatomie der Netzhaut und die innig damit verknüpfte Theorie des „Sehens im Hellen und Dunklen" ein.

§ 3. Anatomie der Netzhaut (Zapfen und Stäbchen). Seit langem weiß man, daß die Zapfen und Stäbchen die lichtempfindlichen Gebilde sind, in denen die von außen kommende Energie die Reizung des Sehnerven bewirkt. Während man aber aus den Versuchen über die Sehschärfe schließen zu müssen glaubte, daß den Zapfen allein die Vermittelung des Sehens zufalle, deutete doch der fast gleiche anatomische Bau darauf hin, daß wohl auch die Stäbchen eine Rolle beim Sehen spielen. Erst auf Grund der neueren physiologischen Forschungen über das Sehen bei geringer Helligkeit und den Einfluß des Sehpurpurs in den Stäbchen bei der Farbenperzeption gelang es mehr und mehr, die Wirkungsweise unserer beiden Netzhautorgane voneinander zu trennen und ihre gesonderten Aufgaben zu ergründen.*)

Wir stellen uns hier auf den Boden der Theorie des Herrn v. Kries**), gemäß welcher die Zapfen unseren farbentüchtigen „Hellapparat" und die Stäbchen unseren total farbenblinden „Dunkelapparat" bilden. Nach dieser Theorie vermitteln die Zapfen das Sehen bei großer Helligkeit und ihre Erregung durch die Lichtwellen erweckt im Gehirn die Empfindung der Farbe, während die purpurhaltigen Stäbchen total farbenblind sind, erst bei geringer Helligkeit in Wirksamkeit treten und die Fähigkeit besitzen, ihre Empfindlichkeit im Dunkeln ganz bedeutend zu steigern. „Dunkeladaptation" nennt v. Kries diese Eigenschaft der Stäbchen. Ehe die Zapfen farbiges Licht empfinden, vermitteln die Stäbchen zum Gehirn den Eindruck farbloser Helligkeit.

Aus der Anatomie der Netzhaut unseres Auges folgt andererseits, daß auf der Netzhautgrube oder fovea centralis und einem Teil der macula lutea nur Zapfen und gar keine Stäbchen vorhanden sind, während die übrige Netzhaut sowohl Stäbchen wie Zapfen enthält, und zwar in der Anordnung, daß nach dem Rande der Netzhaut zu die Stäbchen an Zahl die Zapfen überwiegen. Außerdem wissen wir, daß die Netzhautgrube die bevorzugte Stelle ist, mit der wir sehen, wenn wir einen Gegenstand

*) R. Stiller, „Die Helligkeitsempfindlichkeitskurve des Auges". Bisher noch nicht publiziert.
E. Thürmel, „Das Lummer-Pringsheimsche Spektral-Flickerphotometer als optisches Pyrometer". Inaug.-Dissertation. Breslau 1910.

*) Vergl. A. König, „Ueber den menschlichen Sehpurpur und seine Bedeutung beim Sehen". Sitzber. d. Berl. Akad. d. Wissensch., S. 577, 1894.
**) J. v. Kries, „Ueber die Funktion der Netzhautstäbchen". Zeitschr. f. Psych. u. Phys. d. Sinnesorgane 9, 81—123, 1894.

fixieren und scharf ins Auge fassen. Beim Fixieren oder beim direkten Sehen (foveal bezw. zentral) sind daher die Stäbchen ausgeschaltet, beim indirekten Sehen (peripher) treten außer den Zapfen noch die Stäbchen in Tätigkeit. Hier treten also bei geringer Helligkeit die beiden Sehapparate in einen scharfen Wettstreit ein, der, wenn nur die Helligkeit gering genug ist, zugunsten der farbenblinden Stäbchen ausfällt, so daß dann alles „Grau in Grau", d. h. in farbloser Helligkeit erscheint.

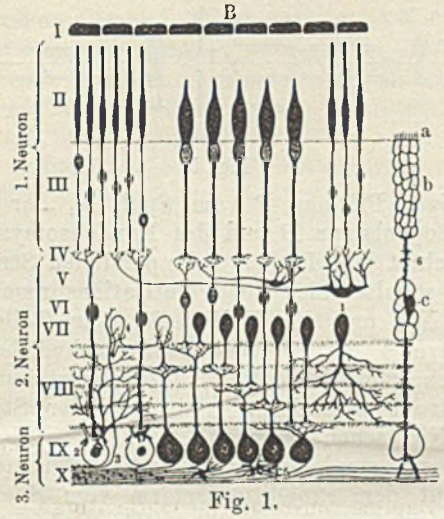


Fig. 1.

Die neueren anatomischen Untersuchungen der Netzhaut*) zeigen, daß die Stäbchen zu vielen gemeinschaftlich an einer Nervenfaser sitzen, während den Zapfen, wenigstens denjenigen der fovea centralis, je eine besondere Leitung zukommt. Hierdurch wird es uns zum Teil verständlich, warum die Stäbchen früher über die Reizschwelle treten als die Zapfen, um so mehr, als sie über alle Wellen integrieren, während die Zapfen in bezug auf die Wellenlänge differenzieren. Schätzungsweise besitzen wir im ganzen 113 Millionen Stäbchen und 7 Millionen Zapfen (davon nur 4000 auf der fovea centralis und 8000—13 000 auf der macula lutea), während allen diesen Elementen nur eine Million Nervenleitungen zur Verfügung stehen, welche bündelweise, dabei einzeln voneinander isoliert, zu einem Kabel verschnürt (Projektion), dem Gehirn die Lichtmeldungen übermitteln.

Erst die neueren „Färbungsmethoden" von Ehrlich und Camillo Golgi haben Aufschluß über den Verlauf der Nervenfasern in der Retina und von ihr zum Gehirn gebracht. Fig. 1 stellt einen von Ramon y Cajal nach dieser Methode erhaltenen Querschnitt durch die Netzhaut dar. Das in Richtung von unten nach oben auf die Netzhaut fallende Licht durchläuft erst alle die verschiedenen Netzhautschichten *X* bis *III*, ehe es an die Zapfen- und Stäbchenschicht *II* gelangt, wo es in Lichtreiz umgesetzt wird, welcher von da durch die Nervenfasern, Ganglienzellen usw. wieder zurück zur Schicht *X* und zum Gehirn geleitet wird. Die nervösen Gebilde sind also unempfindlich gegen die eindringende Lichtstrahlung.

Der bei der Energieumsetzung in den Zapfen und Stäbchen stattfindende Vorgang ist noch unaufgeklärt. Aus der Art der Fortleitung des Nervenreizes darf man auf Vorgänge elektromagnetischer Natur schließen.*) Fig. 2 zeigt die Leitung des Reizes zum Gehirn; in ihr bedeutet *A* die Netzhaut, *C* das vordere Vierhügelpaar mit den primären Ganglienzellen im Gehirn und *B* die Verbindungsbahn. Ehe die Nerven zu den primären optischen Ganglienzellen mit dem corpus geniculum, dem vorderen Vierhügelpaar und dem Pulvinar der Sehhügel (Fig. 3) gelangen, kreuzen sich

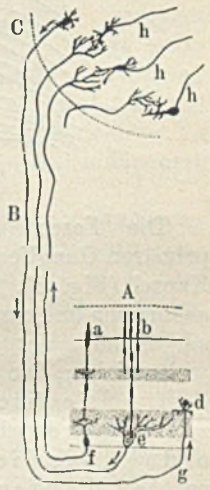
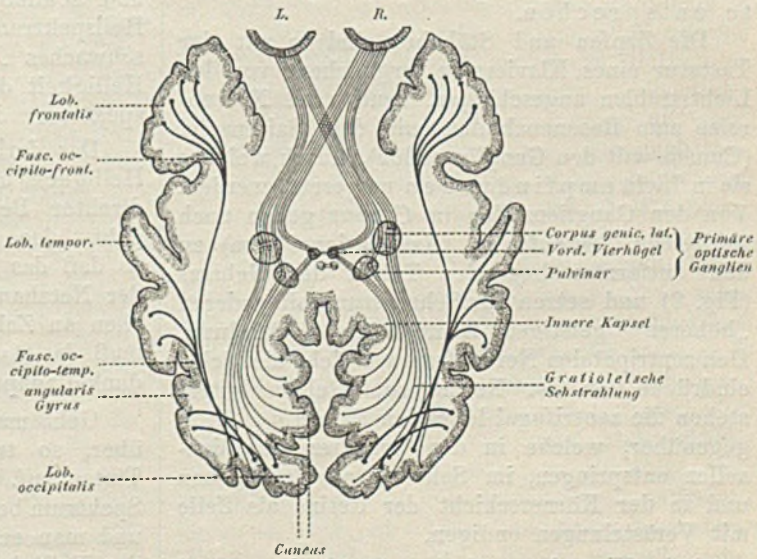


Fig. 2.



Schema des Sehbahnenverlaufes. *R.* Sehbahnen rechts und *L.* Sehbahnen links.
Fig. 3.

*) Vergl. R. Greeff, „Die mikroskopische Anatomie des Sehnerven und der Netzhaut". Aus dem Handbuch der Augenheilkunde von Gräfe und Sämisch. 2. Aufl. 1 (5), Berlin 1901.

*) Vergl. O. Lummer, „Die Lehre von der strahlenden Energie (Optik)", S. 341 und 342. Erschienen als II. Band, 3. Buch von Müller-Pouillet-Pfaundler; 1907, 1189 Seiten.

die von beiden Augen kommenden Nervenbündel und zwar so, daß die eine Hälfte des linken Bündels mit der einen Hälfte des rechten Bündels zum rechten Geniculum und die beiden übrigen Hälften zum linken Geniculum gehen. Eine ganze Anzahl von Fasern erleiden aber unterwegs in sich eine Zweiteilung (Fig. 4), von denen der eine Teil nach links, der andere nach rechts geht.

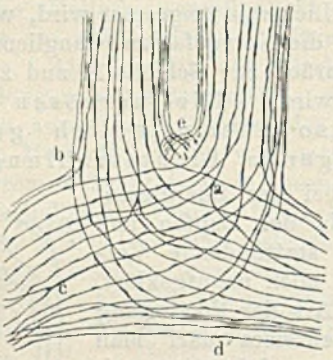


Fig. 4.

Die Fasern *hh* (Fig. 2) führen von den primären Ganglienzellen zentralwärts zur inneren Kapsel (Fig. 3), von wo sie sich fächerförmig ausbreiten und als Gratioletsche Sehstrahlung zur Rinde des Hinterhauptlappens (Cuneus) weiterziehen, wo nach Munck die Sehsphäre liegt. Die hier liegenden Ganglienzellen sind ebenso regelmäßig angeordnet wie die Endigungen der Fasern in den Zapfen und Stäbchen der Retina, so daß benachbarten Rindenelementen benachbarte Retinaelemente entsprechen.

Die Zapfen und Stäbchen sind so mit der Tastatur eines Klaviers zu vergleichen; von den Lichtstrahlen angeschlagen, senden sie Nervenreize zum Resonanzboden mit dem Saitenspiel (Cuneus mit den Ganglienzellen), durch welches sie in Lichtempfindungen umgesetzt werden. Von den Ganglienzellen im Cuneus gehen noch zahlreiche Nervenfasern (Assoziationsfasern) zu den entfernter liegenden Teilen des Gehirns (Fig. 3) und setzen das Sehzentrum mit anderen „höheren" geistigen Zentren in Verbindung. Den zentripetalen Nervenfasern, welche die Lichteindrücke von der Retina zum Gehirn leiten, stehen die zentrifugal leitenden Fasern *g* (Fig. 2) gegenüber, welche in den primären Ganglienzellen entspringen, im Sehnerv abwärts gehen und in der Körnerschicht der Retina als Zelle mit Verästelungen endigen.

§ 4. Wettkampf der Stäbchen und Zapfen (Stäbchenweiß). Die Empfindung Weiß oder farbloser Helligkeit kann auf zweierlei Weise entstehen: erstens durch beliebige Erregung der nur farblos empfindenden Stäbchen, zweitens durch Reizung der farbentüchtigen Zapfen mittels weißen Lichtes oder komplementärer Lichtgemische. Um das „Stäbchenweiß" zu demonstrieren, bedarf es eines absolut dunklen Raumes. Folgende Versuche scheinen mir am geeignetsten, um das Sehen im Dunkeln und den dabei auftretenden Wettstreit zwischen den Zapfen und Stäbchen zu demonstrieren.*)

1. Farblossehen des Spektrums. Man entwirft ein farbenreines Spektrum mit Hilfe der Linse *L* (Fig. 5) und des gerad-

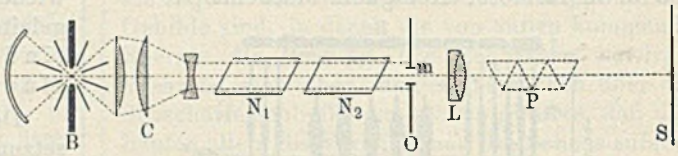


Fig. 5.

sichtigen Prismas *P* vom Spalt *m*, der durch die Bogenlampe *B* und das Kondensorsystem *C* erleuchtet ist. In den nahe parallelen Strahlengang schaltet man die Polarisationsprismen N_1 und N_2, um die Helligkeit aller Teile des Spektrums im gleichen Maße schwächen zu können, ohne dabei die Helligkeitsverteilung im Spektrum zu ändern. Bei paralleler Stellung der Nicolschen Prismen N_1 und N_2 ist das Spektrum am hellsten; bei gekreuzter Stellung ist auf dem Projektionsschirm vom Spektrum gar nichts zu sehen. Alles falsche Licht muß sorgfältig vermieden werden! Macht man die Helligkeit des Spektrums immer geringer und geringer, so verschwinden zunächst die roten und die blauen Farben, dann das Gelb usw. und schließlich erscheint statt des farbigen Hellspektrums ein farbloses, sehr lichtschwaches „Dunkelspektrum", dessen maximale Helligkeit da auftritt, wo beim farbigen „Hellspektrum" die blaugrüne Farbe liegt.

Das farblose Dunkelspektrum gewinnt an Helligkeit und farblosem Glanz, wenn man von direkter Beobachtung zu indirekter übergeht, also über das Spektrum hinwegschaut, so daß das Netzhautbild auf periphere Stellen der Netzhaut zu liegen kommt, wo die Stäbchen an Zahl die Zapfen überwiegen. Auch muß das Auge im Dunkeln verweilt haben, um dunkel adaptiert zu sein.

Geht man vom Dunkel- zum Hellspektrum über, so treten nach und nach die farbigen Tinten auf. Die größte Helligkeit erreicht das Spektrum bei Fortnahme der Nicolschen Prismen, und man erkennt dann leicht, daß das Maximum der Helligkeit beim Hellspektrum im Gelbgrünen gelegen ist.

*) Vergl. O. Lummer, „Experimentelles über das Sehen im Dunkeln und Hellen (Hypothese über die Ursache der „Farbenblindheit")". Verhdlgn. d. Deutsch. Physik. Ges. VI, Nr. 2. 1904.

Aus diesen Versuchen folgt, daß die Stäbchen vor den Zapfen über die Schwelle (Reizschwelle) schreiten, und daß die Stäbchen am empfindlichsten für den blaugrünen, die Zapfen für den gelbgrünen Spektralteil sind. Wir werden später hierüber noch genaueren Aufschluß erhalten (siehe § 6).

2. Grauglut und Rotglut.*) Verfolgt man die Lichtentwickelung einer Glühlampe bei kontinuierlich wachsender Stromstärke im hellen Zimmer, so fängt bei gewisser Temperatur der Glühfaden mit rotem Lichte zu leuchten an (Rotglut), um schließlich in Weißglut überzugehen und zu zerspratzen. Anders im absolut dunklen Raume bei gut ausgeruhtem Auge, so daß die Stäbchen sich dunkel-adaptiert und auf ihren Beruf zum Sehen vorbereitet haben. Dann sendet der Kohlefaden zuerst ein „düsternebelgraues" oder „gespenstergraues" Licht aus,**) welches unstet hin und her huscht. Dieses Gespenstische verschwindet erst, wenn der Glühfaden so hoch temperiert ist, daß er hellrot erscheint. Aber auch dann noch kann man die „Rotglut" in „Grauglut" verwandeln, wenn man die Lampe indirekt anschaut, so daß ihr Bild auf eine peripherische Stelle der Netzhaut fällt, wo die Anzahl der Stäbchen die der Zapfen überwiegt. Es verwandelt sich das bei direktem Sehen auftretende Rot in ein magisches Weiß (Stäbchenweiß) bei indirektem Sehen.

Um auch ungeübteren Beobachtern diesen interessanten Wettstreit zwischen den Zapfen und Stäbchen vorzuführen, bediene ich mich dreier Glühlampen in etwa 1 bis $1^1/_2$ m Abstand voneinander, die alle vom gleichen Strom gespeist werden, dessen Intensität man kontinuierlich von Null an steigern kann. Zunächst bringt man die Lampen auf so geringe Glut, daß man sie bei direktem Sehen gerade eben noch wahrnimmt. Da man immer nur eine der drei Lampen fixieren kann, so entstehen die Bilder der beiden anderen auf einem peripherischen Netzhautteil, wo die dunkel adaptierten Stäbchen siegen. Man erblickt infolgedessen die fixierte Glühlampe rotglühend, die beiden anderen in farblosem, glänzendem, stäbchenweißem Lichte (Grauglut). Wie schnell man auch den Blick von der einen zur anderen Glühlampe schweifen läßt, stets erscheint die direkt gesehene, anvisierte Lampe rot, die anderen aber springen um in glänzendes Weiß, welches wir im Hellen noch niemals gesehen haben. Dieses interessante Spiel gelingt auch noch bei Verstärkung des Stromes bis zu einer Stärke, bei welcher die direkt gesehene Lampe hellrot erscheint.

3. Kleines blauleuchtendes Flämmchen. Betrachtet man ein kleines, aus einer engen Oeffnung brennendes Gasflämmchen, dessen Größe man mittels eines Quetschhahnes beliebig verringern kann, abwechselnd direkt und indirekt, so tritt folgende Erscheinung auf. Das direkt fixierte und scharf gesehene (Kurzsichtige müssen sich immer dann, wenn scharf fixiert werden muß, geeigneter Brillengläser bedienen!), mit mattbläulichem Licht leuchtende Flämmchen verwandelt sich beim indirekten Sehen in eine ziemlich ausgedehnte Lichtscheibe von mondscheinfarbenem Glanze, umgeben von schwach leuchtender Zone.

4. Gespenstersehen. Das „Gespenstische" des Stäbchensehens tritt erst ein, wenn man eine genügend kleine Fläche betrachtet, deren Netzhautbild an Ausdehnung höchstens gleich der Stelle des deutlichsten Sehens ist und deren Helligkeitssteigerung man im Dunkeln von Null an verfolgt.

Um Ihnen das „Gespenstersehen" vorzuführen, bediene ich mich der folgenden Vorrichtung. In einem mit einem Ausschnitt von 15 mm Durchmesser versehenen, sonst vollkommen geschlossenen Kasten befindet sich eine elektrische Glühlampe, deren Strom beliebig bis zu Null abgeschwächt werden kann. Hinter dem Ausschnitt befindet sich eine matte Scheibe und vor ihm eine verschiebbare Messingplatte mit verschieden großen Löchern, etwa von 3, 6 und 9 mm Durchmesser. Von der scharf begrenzten Oeffnung entwirft man auf einem weißen Schirme ein vergrößertes, deutliches Bild und bringt in den Strahlengang mehrere Blätter blaugrün gefärbter Gelatine, so daß gerade die Stäbchen am stärksten erregt werden.

Solange die Helligkeit so gering ist, daß die Zapfen ausgeschaltet sind, erblicken wir den Lichtfleck indirekt und demnach farblos und ohne scharfe Konturen. Die Folge davon ist, daß er ganz verschwindet, sobald wir ihn fixieren. Dieses Verschwindenlassen gelingt auch noch, wenn man den Fleck so groß macht, daß sein Abbild die ganze macula lutea bedeckt (Einschaltung einer größeren Oeffnung). Freilich ist das Fixieren dann noch schwieriger, weil die geringste Bewegung des Auges den Fleck sichtbar macht, und unser gern umherirrendes Auge unwillkürlich jene Stellung einnimmt, bei der es das meiste Licht auffängt. Es macht sich jetzt also jenes Spiel besonders bemerkbar, daß wir etwas sehen, was wir nicht fixieren, und daß das Gesehene unseren Blick flieht, sobald wir es genauer betrachten wollen.*)

*) O. Lummer, „Grauglut und Rotglut". Verhdlgn. d. Physik. Ges. 16, 121—127; 1897. Ann. d. Phys. 62, 14—29; 1897.

**) H. F. Weber, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 28, 491; 1887.

*) Vergl. O. Lummer, „Beitrag zur Klärung der neuesten Versuche von R. Blondlot über die N-Strahlen". Diese Verhdlg. 5, 418; 1903.

Ist es aber für einen Augenblick gelungen, den Fleck zu fixieren, so bricht er allsobald wieder hervor und die Suche nach dem fliehenden, „gespensterhaften“ Irrlicht beginnt von neuem. Erst wenn die Helligkeit so groß geworden ist, daß auch die Zapfen erregt werden (Verstärkung des Heizstromes der Glühlampe), hört dieser ungewohnte Zustand auf und wir können den Lichtfleck in aller Ruhe beobachten und seine scharfe Begrenzung und seine blaugrüne Farbe deutlich erkennen.

§ 5. Genaue Bestimmung der Helligkeitsempfindlichkeit des Auges für die verschiedenen Spektralfarben (Helligkeits-Empfindlichkeitskurve). Zum Verständnis der genauen Bestimmung sei zunächst an der Hand eines Versuchs nochmals kurz auf die Methode selbst hingewiesen. Wir entwerfen wieder mit Hilfe des in Fig. 5 skizzierten Aufbaues, aber unter Fortlassung der Nicolschen Prismen N_1 N_2, das lichtstarke Hellspektrum und bringen in den Gang der Lichtstrahlen, kurz vor den Projektionsschirm, eine Mellonische Thermosäule, wie sie in jedem physikalischen Kabinett vorhanden ist. Aus dem Schatten der Thermosäule können Sie erkennen, von welchem Spektralteile sie beleuchtet wird. Aus dem Ausschlage des mit der Thermosäule verbundenen Galvanometers kann man auf die Energie des betreffenden Spektralbezirks schließen. Verschiebt man die Thermosäule von Stelle zu Stelle und notiert jedesmal den Ausschlag, trägt die Wellenlängen als Abszissen und die Ausschläge als Ordinaten auf, so erhält man die Kurve für die Energieverteilung im vorliegenden Spektrum. Sie erkennen zunächst, daß die Ausschläge im sichtbaren Teil des Spektrums relativ klein sind und ein Maximum im ultraroten Spektralbezirk erreichen, für welchen das Auge unempfindlich ist.

Da unser Auge einen und denselben Spektralbezirk um so heller sieht, je mehr Energie diesem Bezirk zugeführt wird, so möchte man geneigt sein, zu schließen, daß man entsprechend der gefundenen Energiekurve auch diejenige Farbe am hellsten sehen müßte, für welche der Ausschlag am größten war. So gab Rot einen größeren Ausschlag als Gelbgrün; also müßte Rot dementsprechend heller erscheinen als Gelbgrün. Sie erkennen aber ohne weiteres, daß Gelbgrün viel heller als Rot erscheint. Daraus folgt, daß das Auge für Gelbgrün viel empfindlicher ist als für Rot.

Könnten wir ohne alle Apparate die Helligkeit der verschiedenen Spektralbezirke, deren Energieverhältnisse wir kennen, genau miteinander vergleichen, so wäre unsere Aufgabe gelöst und zwar um so besser, je genauer die Energieverteilung und die Helligkeitsvergleichung ausgeführt wäre.

Erörtern wir zunächst die Bestimmung der Energieverteilung. Wie schon kurz erwähnt (vergl. § 2), ist die direkte genaue Messung der Energieverteilung im sichtbaren Spektrum recht schwierig, wenn man enge Bezirke durchmessen und die Energie bis auf 1% genau kennen will. Darum wurde eine indirekte Methode zur Bestimmung der Energieverteilung gewählt, und die Helligkeitsvergleichung im Spektrum des schwarzen Körpers ausgeführt.

a) Energieverteilung im Spektrum des schwarzen Körpers (Normalspektrum, Dispersionsspektrum). Es werde zunächst angenommen, daß wir zur Erzeugung des Spektrums ein Gitter benutzen, welches ein Gitterspektrum oder sogen. „Normalspektrum“ erzeugt im Gegensatz zum eigentlichen Dispersionsspektrum, entworfen durch ein Glasprisma. Während im Gitterspektrum die Ablenkung der Farben proportional der Wellenlänge ist, wird von einem Glasprisma die Energie im roten Teil zusammengedrängt, im blauen auseinandergebreitet, insofern die Dispersion für Blau größer ist als für Rot.

„Schwarze“ Strahlung strömt aus von der Oeffnung eines überall gleich temperierten Hohlraumes. Es wurde der „elektrisch geglühte“ schwarze Körper von Lummer-Kurlbaum**) benutzt, welcher bei S in Fig. 6 abgebildet ist und dessen Temperatur durch ein im Inneren des strahlenden Hohlraumes befindliches Thermoelement direkt am Millivoltmeter M abgelesen werden kann.

Die Strahlung des schwarzen Körpers ist für alle Wellen des Gitterspektrums (Normalspektrums) bekannt, sobald die Temperatur des Hohlraumes gegeben ist. Nach der Planckschen Formel ist nämlich die schwarze Strahlung S_λ für einen Wellenlängenbezirk zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ dargestellt durch:

$$S_\lambda = c_1 \lambda^{-5} \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1\right)^{-1}, \qquad 1)$$

wo c_1 und c_2 Konstanten sind, λ die Wellenlänge (ausgedrückt in μ) bedeutet und T die absolute Temperatur des schwarzen Körpers ist. Da es sich nur um relative Werte dreht, kann $c_1 = 1$ gesetzt werden; c_2 ist eine Naturkonstante und nach den Versuchen von Lummer-Pringsheim***) gleich 14600.

Beleuchtet der schwarze Körper den Spalt eines Spektrometers, auf dessen Tischchen ein

*) Vergl. O. Lummer und W. Wien. Wied. Ann. 56, 451—456; 1895.

**) Vergl. O. Lummer und F. Kurlbaum. Verhdlgn. d. Deutsch. Physik. Ges. XVII, Nr. 9.

***) O. Lummer und E. Pringsheim. Verhdlgn. der Deutsch. Physik. Ges. I, 23—41 und 215—235; 1899.

Gitter als dispergierender Apparat steht, so können wir laut Formel 1) die Energieverteilung im Gitterspektrum berechnen. In Wirklichkeit ist aber das Gitter unbrauchbar, da es zu lichtschwach ist und in energetischer Beziehung nach Versuchen von F. Paschen kein Normalspektrum liefert. Man ist daher auf die Verwendung eines Prismas angewiesen und zwar von möglichst großer Dispersion. Für das vom Prisma entworfene Spektrum ist die Planck-sche Formel nicht ohne weiteres anwendbar.

$$dn/d\lambda = (n_2 - n_1)/(\lambda_2 - \lambda_1)$$

bilden.

Die Auffindung der Energieverteilung im „Brechungsspektrum" der schwarzen Strahlung ist also auf die Bestimmung der Dispersionskurve reduziert, die sich mit aller Schärfe leicht ausführen läßt.

b) Flickerprinzip (Spektral-Flickerphotometer). Das „Flickerprinzip" ist von Rood*) in die buntfarbige Photometrie ein-

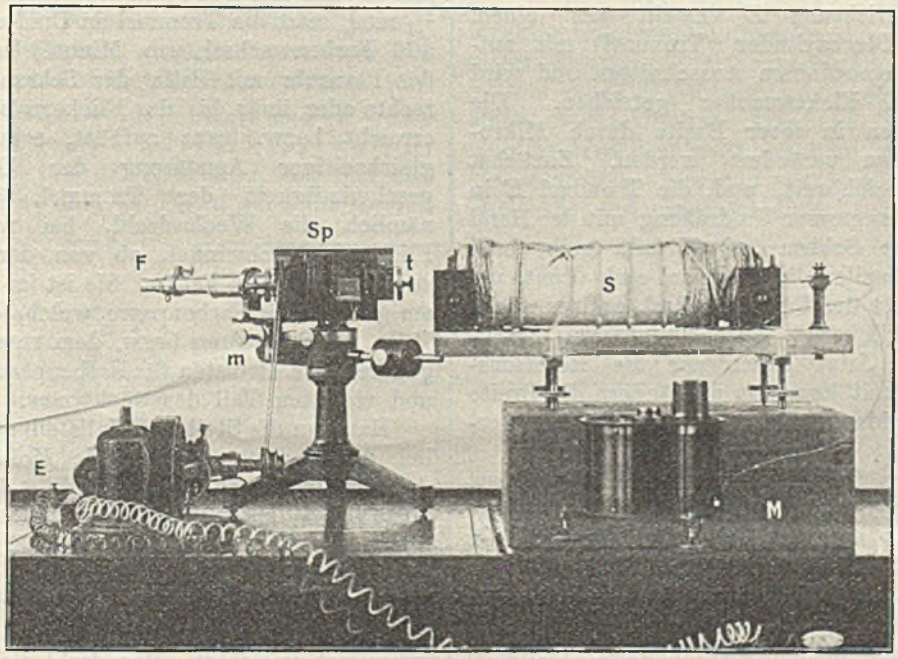


Fig. 6.

Da ein Glasprisma den roten Bezirk mehr zusammendrängt als den blauen, so muß die aus Formel 1) errechnete Energie für Rot verkleinert werden gegenüber der für Blau berechneten Energie und zwar entsprechend der „Dispersion" der verwendeten Prismensubstanz. Man hat also für jede Spektralstelle (Wellenlänge λ) die Größe $dn/d\lambda$ zu suchen, wo n der zu λ gehörige Brechungsquotient ist, und damit die aus Gleichung 1) berechneten Werte zu multiplizieren.

Man findet die Werte von $dn/d\lambda$ auf experimentellem Wege, indem man für bekannte Wellenlängen (Na-Linie, Hg-Linien usw.) λ_1, λ_2 usw. die zugehörigen Brechungsquotienten n_1, n_2 usw. bestimmt, die Wellenlängen als Abszissen, die Brechungsquotienten als Ordinaten aufträgt und letztere durch eine Kurve (Dispersionskurve) verbindet. Aus ihr kann man für jede beliebige Wellenlänge λ den Wert

geführt worden. Es kam darauf an, dasselbe für die Vergleichung von Spektralfarben nutzbar zu machen. Um Ihnen das Spektral-Flickerphotometer verständlich zu machen, habe ich folgenden Versuch aufgebaut. Das Licht der Bogenlampe B (Fig. 7) wird durch den Kondensor

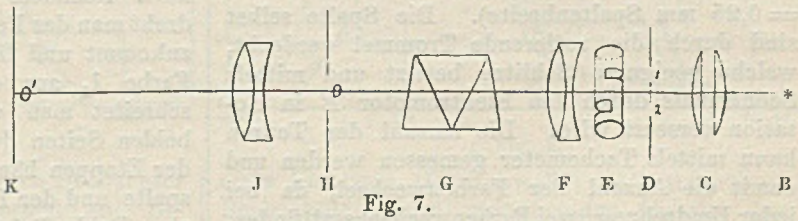


Fig. 7.

C auf den beiden vertikalen Spalten 1 und 2 der Platte D konzentriert. Linse F entwirft von den Spalten auf dem Schirm H zwei reelle Bilder und bei Zwischenschaltung des geradsichtigen Prismas G zwei gegeneinander horizontal verschobene Spektren. Der Schirm H besitzt

*) O. N. Rood. Ann. Journ. of. Sc. 46, 173, 1893. Vergl. auch: Polimanti, Zeitschr. f. Psych. u. Phys. d. Sinnesorgane 19, 263.

die spaltförmige Oeffnung O, von welcher die Linse J auf dem Projektionsschirm K ein Abbild entwirft. Dieses erscheint in verschiedener Farbe, je nachdem Spalt 1 oder Spalt 2 leuchtet. Die Vorrichtung E bewirkt, daß abwechselnd bald der eine, bald der andere Spalt verdeckt wird, so daß dieselbe Stelle des Projektionsschirms abwechselnd mit verschiedenfarbigem Licht beschickt wird. Die miteinander abwechselnden Farben hängen vom Abstande der beiden Spalte 1 und 2, der Größe der Dispersion des Prismas usw. ab.

Die Vorrichtung E besteht aus einem rotierenden Blechzylinder (Trommel) mit entsprechend angeordneten Ausschnitten und wird durch einen Elektromotor getrieben. Die Spalte können in ihrer Breite durch Mikrometerschrauben verändert werden. Zunächst seien sie gleichbreit, und die Trommel E in Ruhe. Bei langsamer Umdrehung mit der Hand erscheint der Schirm bei O' bald gelb, bald grün; je schneller die Trommel sich dreht, um so schneller ist der Farbenwechsel, und es macht sich ein „Flickern" des betrachteten Feldes bemerkbar. Jetzt lassen wir die Rotationsgeschwindigkeit konstant und ändern die Breite eines der beiden Spalte, bis das Flickern verschwindet.

In diesem Falle soll nach der Hypothese, auf welcher das Flickerprinzip aufbaut, die Helligkeit der beiden Farben gleich sein. Drehe ich jetzt den einen Spalt auf oder zu, so setzt das Flickern wieder ein.

Bei subjektiver Beobachtung gestaltet sich die Anordnung noch etwas einfacher. In Fig. 6 ist bei Sp das von Lummer-Pringsheim hierfür konstruierte Spektral-Flickerphotometer abgebildet. Im wesentlichen besteht es aus einem Spektralapparat mit Kollimator und Fernrohr. In Fig. 6 blickt man direkt auf die Spaltplatte, welche zwei vertikale Spalte besitzt, deren Breite durch die Trommeln t sehr genau gemessen werden kann (100 Skalenteile der Trommel = 0,25 mm Spaltenbreite). Die Spalte selbst sind durch die rotierende Trommel verdeckt, welche geeignete Schlitze besitzt und mittels Schnurlaufs durch den Elektromotor E in Rotation versetzt wird. Die Anzahl der Touren kann mittels Tachometer gemessen werden und damit die Anzahl der Farbenwechsel, da bei jeder Umdrehung zwei Farbenwechsel stattfinden.

Die Spalte erhalten ihr Licht nicht direkt vom schwarzen Körper S, sondern vermittelt durch je ein rechtwinkliges, totalreflektierendes Prisma, von denen nur das eine zu sehen ist.

F ist das Fernrohr des Spektralapparats, welches statt eines Fadenkreuzes einen „Okularspalt" von veränderlicher Größe besitzt und mittels der Mikrometerschraube m meßbar um die Tischchenachse gedreht werden kann. Bei der Rotation der Trommel vor den Kollimatorspalten erscheint der Okularspalt, den man durch das Okular fixiert, abwechselnd in verschiedener Farbe. Die Wellenlängendifferenz beider Flickerfarben hängt vom Abstand der Kollimatorspalte, von der Dispersion des Prismas und der Stellung des Fernrohrs ab. Durch Drehen der Schraube m können immer andere Farbenpaare in den Okularspalt gebracht werden.

Die photometrische Vergleichung geschieht am besten wie folgt. Man stellt beide Kollimatorspalte auf gleiche Spaltbreite ein (etwa $^1/_4$ mm), setzt die Trommel in Umdrehung (etwa 300 Farbenwechsel pro Minute) und bewegt das Fernrohr mit Hilfe der Schraube m nach rechts oder links, bis das Flickern ein Minimum erreicht bezw. ganz aufhört, eventuell unter gleichzeitiger Aenderung der Umdrehungsgeschwindigkeit der Trommel. Es hängt nämlich die Wechselzahl, bei welcher das Flickern verschwindet, ab von der Farbe der zu vergleichenden Felder. Sie ist im allgemeinen am größten für Farbenpaare, welche dem hellsten Teile des Spektrums bezw. dem roten Ende angehören, am kleinsten für Farbenpaare im blauen und violetten Teil des Spektrums.

Hat man die Stellung (Nullstellung) gefunden, bei welcher für gleichbreite Kollimatorspalte das Flickern verschwindet, so ergibt die Trommelablesung m unter Benutzung der Dispersionskurve die Wellenlängen λ_1 und λ_2 der beiden gleichhellen Spektralbezirke. Von dieser Stellung geht man aus, um das ganze Spektrum durchzumessen, und zwar schreitet man etappenweise fort, wie folgt. Man dreht die Trommel m des Fernrohrs nur so viel, daß die dem Spalt 2 zugehörige Farbe λ_2 jetzt dem Spalte 1 zukommt, zu dem vorher die Farbe λ_1 gehörte. Die dazu gehörige Trommelstellung ist aus der für das benutzte Prisma vorher bestimmten Dispersionskurve abzulesen. Aus ihr ersieht man auch, welche neue Wellenlänge λ_3 dem Spalt 2 zugehört. Nachdem man λ_2 und λ_3 verglichen hat, dreht man das Fernrohr weiter, bis λ_3 dem Spalt 1 zukommt und liest die dem Spalt 2 zugehörige Farbe λ_4 aus der Dispersionskurve ab. So schreitet man von der Nullstellung aus nach beiden Seiten des Spektrums fort. Die Anzahl der Etappen hängt vom Abstand der Kollimatorspalte und der Dispersion des benutzten Prismas ab. Beide Faktoren können geändert werden.

c) Empfindlichkeitskurven von Stiller und Thürmel.*) Zunächst liegen erst die Helligkeitsempfindlichkeitskurven von zwei Beobachtern vor. Beide Beobachter sind im Besitz farbentüchtiger Augen. Die von ihnen erhaltenen Resultate sind in Fig. 8 wiedergegeben. Als Abszissen sind die Wellenlängen

*) Erich Thürmel. Inaug.-Diss. Breslau 1910.

in $\mu\mu$ aufgetragen, als Ordinaten die Empfindlichkeit in willkürlichem Maße. Die stark gezeichnete Kurve ist von Thürmel, die schwach gezeichnete Kurve ist von Stiller beobachtet worden. Sowohl der Verlauf der Kurve als auch die Lage des Maximums ist bei beiden in guter Uebereinstimmung. Das Maximum der Empfindlichkeit liegt im Gelbgrün (560 $\mu\mu$).

A priori kann man aussagen, daß die von Stiller und Thürmel erhaltenen Kurven die Empfindlichkeit der Zapfen darstellen, da das Flickerfeld (Okularspalt) relativ klein gewählt wurde, die Helligkeit genügend groß war und bei direktem Sehen beobachtet worden war.

§ 6. Frühere Bestimmungen der Helligkeitsempfindlichkeitskurve: Zum Vergleich mit den Resultaten von Stiller und Thürmel sind in Fig. 9 auch die Kurven für die Empfindlichkeit der früheren Beobachter eingezeichnet, soweit sie Anspruch auf Beachtung verdienen. Wie man sieht, liegen die Maxima der Empfindlichkeit für die verschiedenen Beobachter an ganz verschiedenen Stellen des Spektrums und auch bei ein und demselben Beobachter (König) weichen die Maxima der beiden Kurven B und b voneinander bedeutend ab.

Die Lösung dieser Diskrepanzen ergibt sich, wenn wir zusehen, auf welche Weise die verschiedenen Kurven gewonnen worden sind, speziell welche Methode der Photometrie zugrunde gelegt worden ist, und uns fragen, ob nur die Zapfen oder nur die Stäbchen oder ob Netzhautteile mit Zapfen und Stäbchen bei der Vergleichung der Helligkeit mitwirkten.

Zur Helligkeitsvergleichung farbiger Felder sind bisher drei Methoden angewendet worden:

1. Schwellenmethode (Reizschwelle).
2. Sehschärfenmethode.
3. Direkte Vergleichung.

1. Bei der Schwellenmethode beleuchtet man den Kollimatorspalt eines Spektrometers durch eine konstante Lichtquelle, schneidet mittels eines Okularspalts aus dem Spektrum einen Spektralbezirk aus und verengt den Kollimatorspalt solange, bis kein Lichtreiz mehr bemerkbar ist. Oder man geht vom geschlossenen Spalt aus und erweitert diesen solange, bis der erste Lichtreiz (Reizschwelle) auftritt. Diese Beobachtung wird nacheinander für die verschiedenen Spektralbezirke ausgeführt.

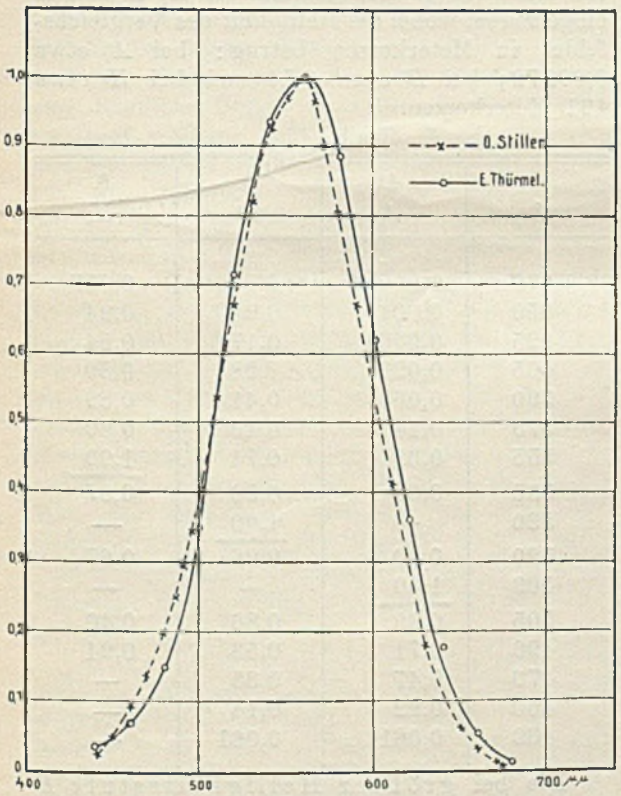


Fig. 8.

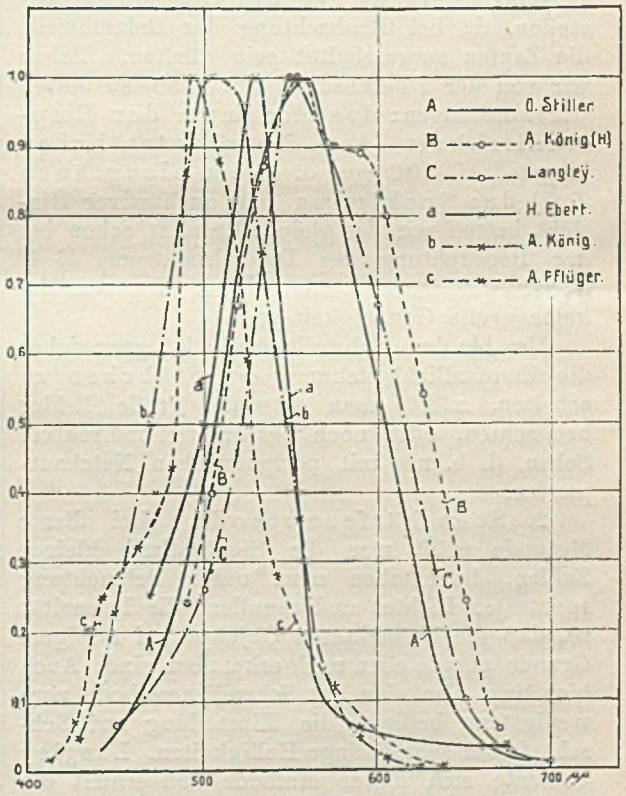


Fig. 9.

Ist b_λ die zur Wellenlänge λ zugehörige Spaltbreite und S_λ die Intensität bei λ, so ist die Empfindlichkeit des Auges h_λ für Licht dieser Wellenlänge gegeben durch:

$$h_\lambda = \frac{k}{b_\lambda S_\lambda},$$

wo k eine Konstante bedeutet.

Diese Schwellenmethode wurde von H. Ebert,*) A. Pflüger**) und A. König***) benutzt. Was die Werte von S_λ betrifft, so sind diese wohl sicher bei den Pflügerschen Beobachtungen am zuverläßigsten, da Pflüger die Intensitätsverteilung im Spektrum direkt mit der Rubensschen Thermosäule gemessen hat. Die von Ebert, König und Pflüger nach der Schwellenmethode erhaltenen Kurven sind in Fig. 9 unter *a*, *b* und *c* eingezeichnet. Die Ebertsche Kurve beruht nur auf 5 Messungen im Spektrum, so daß aus ihr die Lage des Maximums nicht genau zu ersehen ist. Gleichwohl ergibt sich das Resultat, daß bei den Kurven *a*, *b*, *c* das Empfindlichkeitsmaximum, abweichend von Stiller und Thürmel, in Spektralgebieten kleinerer Wellenlängen gelegen ist. Die Vermutung liegt nahe, daß die Kurven *a*, *b* und *c* die Helligkeitsempfindlichkeitskurve der Stäbchen darstellen, da bei Beobachtung der Reizschwelle die Zapfen ausgeschaltet sein dürften. Sehen wir von der Ebertschen Kurve ab, so dürfen wir wohl sagen: das Maximum der Empfindlichkeit der Netzhautstäbchen liegt bei 500 $\mu\mu$, d. h. im blaugrünen Teil des Spektrums. In qualitativer Hinsicht hatten wir das gleiche Resultat schon bei der Beobachtung des Dunkelspektrums (§ 4) gewonnen; freilich kam dieser Beobachtung keine große Genauigkeit zu.

Um bei der „Schwellenmethode" ganz sicher die Empfindlichkeitskurve der Stäbchen zu erhalten, müßte man entweder große Felder beobachten, oder noch besser, bei indirektem Sehen, d. h. nur mit peripherischen Netzhautpartien.

2. Sehschärfenmethode. Bei dieser Methode prüft man die Sichtbarkeit kleiner Zahlen, Buchstaben usw. unter Beleuchtung spektralen Lichtes und reguliert die Intensität so, daß die betrachteten Objekte auf farbigem Grunde gerade eben noch erkennbar sind. Auch hier liegt also eine Art Schwellenmethode vor; wenigstens bedingt die Einstellung auf Sehschärfe nur sehr geringe Helligkeiten. Langley bediente sich dieser Methode und erhielt die in Fig. 9 unter *C* eingetragene Kurve. Bei ihr liegt das Maximum der Empfindlichkeit ungefähr an der gleichen Stelle wie bei Stiller und Thürmel, also im Gelbgrün. Langley bestimmte also, ohne es wissen zu können, die Helligkeitsempfindlichkeitskurve für die Zapfen trotz Anwendung geringster Helligkeiten. Und so muß es sein. Denn wenn wir auf das Erkennen kleiner Buchstaben usw. einstellen, so fixieren wir das betrachtete Objekt und, wenn wir fixieren, so beobachten wir unwillkürlich mit der Fovea centralis, also mit den Zapfen.

3. Direkte Vergleichung farbiger Felder. Diese, wenn auch ungenauere, buntfarbige Photometrie gestattet in der Form, wie sie A. König verwirklichte, eine große Mannigfaltigkeit. König verschaffte sich ein Vergleichsfeld, welches er mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 535\ \mu\mu$ beleuchtete, und verglich mit diesem Feld die Helligkeit zahlreicher Spektralgebiete eines Dispersionsspektrums. Indem er die Intensität des Vergleichsfeldes alle möglichen Werte durchlaufen ließ, konnte er die Empfindlichkeitskurve für die verschiedensten Helligkeitsstufen ausführen. In folgender Tabelle sind die gefundenen Werte der Empfindlichkeit für verschiedene Helligkeitsstufen *A*, *D* und *H* eingetragen, wobei die Helligkeit des Vergleichsfeldes in Meterkerzen betrug: bei *A* etwa 0,00072; bei *D* etwa 0,74 und bei *H* etwa 191 Meterkerzen.

Tabelle.

λ	4. *A*	5. *D*	6. *H*
670	0,00034	0,016	0,057
650	0,0010	0,056	0,24
625	0,0064	0,17	0,54
605	0,023	0,28	0,80
590	0,060	0,41	0,89
575	0,14	0,49	0,90
555	0,38	0,74	1,00
535	0,69	0,96	0,87
530	—	1,00	—
520	0,90	0,96	0,67
509	1,00	—	—
505	0,98	0,86	0,40
490	0,71	0,53	0,24
470	0,47	0,35	—
450	0,22	0,14	—
430	0,061	0,061	—

Die bei größter Helligkeitsstufe *B* gewonnenen Resultate sind in Fig. 9 als Kurve *B* aufgetragen. Wie man aus der Tabelle ersieht, verschiebt sich das Maximum der Empfindlichkeit mit zunehmender Intensität nach größeren Wellenlängen und zwar von $\lambda = 509\ \mu\mu$ bei kleinster Helligkeitsstufe, über $\lambda = 530$ bei mittlerer, zu $\lambda = 555\ \mu\mu$ bei größter Intensität.

In diesen Königschen Resultaten spiegelt sich also recht deutlich der Wettstreit zwischen den Stäbchen und Zapfen wieder. Bei kleinster Intensität siegen die Stäbchen (Maximum der Empfindlichkeit bei 509 $\mu\mu$), bei größter Intensität tragen die Zapfen

*) H. Ebert. Wied. Ann. 33, 136; 1888.
**) A. Pflüger. Ann. d. Phys. 9, 185—208; 1902.
***) A. König, Beitr. z. Psych. u. Physiol. d. Sinnesorgane, S. 309—388; Hamburg 1891 und Königs ges. Abhndlgn. z. phys. Optik, S. 144—213; 1903.

den Sieg davon (Maximum bei 555 $\mu\mu$). Es ist also kein Wunder, daß die Königsche Kurve *B* (Fig. 8) für größte Intensität ihr Maximum am Orte der Langleyschen, Stillerschen und Thürmelschen Kurven aufweist.

Die Königschen, in der Tabelle niedergelegten Resultate illustrieren in deutlichster Weise auch das Purkinjesche Phänomen, gemäß welchem das Helligkeitsverhältnis zweier farbigen Felder von der absoluten Intensität abhängig ist. Wir wollen uns von diesem Phänomen durch folgende Versuche Rechenschaft geben.

§ 7. Das Purkinjesche Phänomen:

a) Große Felder. Derselbe Projektionsapparat mit den beiden großen Nicolschen Prismen (Fig. 5) eignet sich auch recht gut, um das Purkinjesche Phänomen zu demonstrieren. Zu diesem Zwecke ersetzt man den Spalt durch eine runde Oeffnung und entwirft von ihr ein vergrößertes Bild auf den zu vergleichenden bunten Feldern. Als solche wählt man am besten bunte Papiere, von denen je vier käufliche Bogen zu einem großen Felde vereinigt werden. Als Farben eignen sich Rot und Blaugrün*), welche so beschaffen sind, daß bei der stärksten erreichbaren Beleuchtung (ohne Nikolsche Prismen) Rot gerade eben noch deutlich heller als Blaugrün empfunden wird. Falls die Papiere nicht richtig gewählt sind, kann man jenen Effekt immer erreichen, wenn man in den Strahlengang geeignete bunte Gläser oder gefärbte Gelatineblätter einschaltet. Drückt man jetzt durch Einsetzen der Nikols und Drehung aus paralleler in gekreuzte Stellung die Helligkeit langsam immer mehr und mehr herab, so erscheint bald Blaugrün heller als Rot, bis schließlich letzteres fast ganz unsichtbar wird, Blaugrün dagegen in farblosem „stäbchenweißen" Schimmer erglänzt. Durch indirekte Beobachtung wird dieser Effekt noch gesteigert.

b) Beobachtung kleiner Felder. Man bedeckt die großen Felder mit einer die beiden Farbenbilder bedeckenden, schwarzen Pappe**), welche in der Mitte so ausgeschnitten ist, daß man nur noch zwei kleine, sich berührende Stücke der beiden farbigen Papiere sehen kann. Wie sehr jetzt auch die Beleuchtungsstärke abnehmen mag, stets erscheint Rot heller als Blaugrün, vorausgesetzt, daß man die kleinen Flächen fixiert, und daß ihre Bilder auf der Netzhaut höchstens die macula lutea oder noch besser nur die fovea centralis bedecken, nicht aber auf Stellen mit beiderlei Sehapparaten zu liegen kommen. Dieser Bedingung ist bei einem großen Auditorium schwer für alle Zuschauer zu genügen! Bei den vorgeführten Versuchen betrug jedes große Feld 60 × 80 cm, jedes kleine 4 × 6 cm.

c) Abwechselnde Beobachtung kleiner und großer Felder. Um den Wettstreit zwischen den Zapfen und Stäbchen noch drastischer vor Augen zu führen, muß man abwechselnd die kleinen und großen Felder beobachten können. Dazu habe ich jenen Schirm mit dem Ausschnitt so angebracht*), daß er leicht auf- und abklappbar ist. Hat man die Beleuchtungsstärke bei Beobachtung der kleinen Felder genügend abgeschwächt, so daß man gerade eben noch erkennt, daß Rot heller als Blaugrün ist, dann klappt man den Schirm fort, und allsogleich wandelt sich das Bild: es erscheint die große, blaugrüne Fläche farblos und magisch hell, während die rote Fläche einen fast schwarzen Ton annimmt.

Man beobachtet das Purkinjesche Phänomen im gewöhnlichen Leben, wenn man bei trübem Himmel und fehlender Abendröte in der Dämmerstunde eine Bildergalerie besucht. Dann erscheinen alle roten Tinten dunkel und schwarz, alle blaugrünen Töne farblos und weißlich.

Helmholtz erwähnt auch, daß bei sinkender Nacht von allen Gegenständen der blaue Himmel am längsten farbig (bläulich-weiß?) erscheint. Und ich glaube kaum zu irren, wenn ich annehme, daß die Mondscheinlandschaft eine „Stäbchenlandschaft" ist. Wenigstens was den Silberglanz der Mondlichter betrifft, so ähnelt er ganz dem gespenstergrauen Weiß der Stäbchen.

§ 8. Das Spektralflickerphotometer als optisches Pyrometer: Bei der Konstruktion des Spektralflickerphotometers leitete uns die Absicht, dasselbe der optischen Pyrometrie dienstbar zu machen. Während man bei den vorhandenen optischen Pyrometern auf die Verwendung einer Vergleichslichtquelle angewiesen ist, kann man diese ganz entbehren, wenn das Spektralflickerphotometer mit Hilfe des schwarzen Körpers geeicht ist und der Beobachter die Helligkeitsempfindlichkeitskurve für sein Auge bestimmt hat. Das zu Grunde liegende Prinzip ist also folgendes: Aus dem Intensitätsverhältnis der zu untersuchenden Strahlungsquelle für zwei Spektralbezirke rückwärts auf die „schwarze" Temperatur der Quelle zu schließen.

Zunächst werde als Strahlungsquelle der absolut schwarze Körper benutzt; dessen unbekannte Temperatur soll mit Hilfe des Flickerphotometers gemessen werden. Bekanntlich genügt zur Darstellung der Energieverteilung

*) Am besten solcher Nuance, wie sie von den sogen. „Rotgrünverwechslern" verwechselt werden.

**) Noch besser überzieht man die Pappe mit Sammet oder mindestens Sammetpapier.

*) Siehe O. Lummer: „Ziele der Leuchttechnik". 112 Seiten. Verlag von R. Oldenbourg, München und Berlin.

lung der schwarzen Strahlung im sichtbaren Gebiet die Wiensche Gleichung:

$$S_\lambda = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \qquad 1)$$

wo alle Größen die gleiche Bedeutung haben wie bei der Planckschen Gleichung (§ 4). Es wird also das Verhältnis der Intensitäten für zwei Wellenlängen bei der absoluten Temperatur T:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 e^{\frac{c_2}{T}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)} \qquad 2)$$

und durch Logarithmieren:

$$\log \frac{S_1}{S_2} = 5 \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \left[\frac{c_2 \log e}{T}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)\right]; \qquad 3)$$

Gleichung 3) gestattet T zu berechnen, wenn wir S_1/S_2 kennen. Die Bestimmung von S_1/S_2 geschieht wie folgt:

Das vom schwarzen Körper der unbekannten absoluten Temperatur T beleuchtete Flickerphotometer gestattet uns zunächst nur, das Verhältnis der Helligkeiten der beiden Spektralbezirke λ_1 und λ_2 zu bestimmen. Bei Kenntnis der Helligkeitsempfindlichkeitskurve aber kann daraus auch das Intensitätsverhältnis S_1/S_2 für λ_1 und λ_2 berechnet werden. Setzen wir diese Werte in Gleichung 3) ein, so folgt daraus die unbekannte Temperatur T des beleuchtenden schwarzen Körpers.

Dieser umgekehrte Weg ist von Thürmel eingeschlagen worden. Da man die Temperatur des schwarzen Körpers auch direkt durch das Thermoelement messen konnte, so war ein Vergleich zwischen der pyrometrisch erhaltenen und der direkt abgelesenen Temperatur möglich. Die aus den photometrischen Einstellungen gewonnenen, errechneten Temperaturen wichen von den thermoelektrisch gemessenen um etwa 1 % ab.

Strahlt statt des schwarzen Körpers ein Hochofen usw., so erhält man auf diese Weise nicht die wahre Temperatur, sondern die „schwarze" Temperatur. Es ist dies diejenige Temperatur, welche dem Hochofen usw. zukommen würde, falls er wie ein absolut schwarzer Körper strahlte. Da jeder Temperaturstrahler in jedem Spektralbezirk weniger strahlt als ein absolut schwarzer Körper gleicher Temperatur, so ist die „schwarze" Temperatur stets niedriger als die wahre Temperatur. Sie kommen einander um so näher, je mehr die Strahlungsquelle (Hochofen) in ihren Strahlungseigenschaften sich der schwarzen Strahlung nähert. Weitere Versuche über das Spektral-Flickerphotometer als optisches Pyrometer sind im Gange. Diese sollen lehren, inwieweit verschiedene Augen zu der gleichen Temperatur führen.

Zur Reform des mathematischen Unterrichts an den technischen Mittelschulen.

Von Prof. Dr. Ebner (Aachen).

Die Bestrebungen zur Reform des mathematischen Unterrichts haben ihren ersten offiziellen Niederschlag in den Bestimmungen gefunden, die kürzlich über die Organisation und den Lehrplan der preußischen technischen Mittelschulen ergangen sind. Diese Anstalten, von denen hier hauptsächlich die höheren Maschinen- und Schiffsbauschulen in Betracht kommen, dienten bisher in einem viersemestrigen Kursus der Ausbildung von Konstrukteuren und Betriebsbeamten in Maschinenfabriken und verwandten technischen Werken; ihr mathematischer Lehrplan umfaßt etwa im großen und ganzen das Pensum der Obersekunda und Prima eines Realgymnasiums. Künftig wird die Kursusdauer auf fünf Semester erhöht, und der mathematische Lehrplan wird vor allem den Funktionsbegriff, seine graphische Darstellungen und die Entwicklung des räumlichen Anschauungsvermögens betonen; daneben wird die Behandlung der Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung und die Anwendung dieser Grundbegriffe im mathematischen und sonstigen Lehrstoff freigestellt.

Was die Einzelheiten des mathematischen Lehrstoffes anbelangt, so wird an die Spitze das für technische Schulen unentbehrliche Tabellenrechnen, das verkürzte Rechnen und die Anwendung mechanischer Rechenhilfsmittel, wie Rechenschieber usw., gestellt; neben dem für alle technischen Mittelschulen unentbehrlichen Polarplanimeter wird für die höhere Schiffsbauschule auch der Gebrauch des Integrators (Integraphen) eingeführt. Für die graphische Darstellung der Funktionen werden analog den französischen Lehrplänen die ganze und gebrochene lineare Funktion und die ganze quadratische Funktion in erster Linie behandelt; die zugehörigen Funktionskurven: gerade Linie, Hyperbel und Parabel sind ausdrücklich hinzugesetzt. Die graphische Auflösung der Gleichungen wird allgemein gefordert und soll auch unter Anwendung der neueren Methoden auf alle numerischen Gleichungen angewandt werden. Bei der Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen wird ausdrücklich neben der algebraischen Behandlung auch ihre graphische verlangt. Auffällig ist es, daß der binomische Satz zwar für beliebige Exponenten entwickelt werden soll, daß aber seine Anwendungen auf die Exponentialreihen beschränkt bleiben sollen; die logarithmische und die trigonometrischen Reihen hätten wohl ebenfalls erwähnt werden können. Bei der Lehre von den „Maxima und Minima" wird die Anwendung der Methoden der Differential- und Integralrechnung zugelassen, ebenso wie bei der analytischen Behandlung der Kurven ersten und zweiten Grades und der technisch wichtigen Parabeln und Hyperbeln höherer Ordnung (Polytrope); von den Integrationsproblemen ist die Entwicklung des Inhaltes der gleichseitigen Hyperbel besonders hervorgehoben. Neben der Lehre von der Evolute und Evolvente, die ein fruchtbares Feld der Anwendung der Infinitesimalrechnung bilden, wird die „planimetrische" Behandlung der zyklischen Kurven — eine unseres Erachtens nicht ganz verständliche Ausdrucksweise — gefordert.

In der Geometrie wird neben der Wiederholung der wichtigsten planimetrischen Sätze und der Berechnung der Oberfläche, des Rauminhaltes und des Gewichtes der wichtigsten Körper der Hauptwert auf die

allgemeinen Methoden zur Berechnung von Flächen und Körpern gelegt: die Methode der Projektion, graphische Methoden, Trapezregel, Simpsonsche Regel (Parabelregel), Guldinsche Regel werden neben dem Planimeter genannt. In der Trigonometrie, die die Berechnung der Dreiecke und Vielecke umfaßt, vermißt man die graphische Darstellung der allgemeinen Sinusfunktion $y = a \sin (b x + c)$ und ihre Anwendung auf die technisch so wichtige harmonische Schwingungsbewegung.

Zweifellos bedeutet dieser neue Lehrplan einen großen Fortschritt gegen früher, vorausgesetzt, daß seine Durchführung nun auch in die Hände bewährter und erfahrener Fachmänner gelegt wird, die bei aller Einordnung in das allgemeine technische Lehrziel den neuen Stoff gründlich beherrschen und mit den neuen Methoden vollkommen vertraut sind. Leider scheint es aber in diesem Punkte zu hapern. Die Handels- und Gewerbeverwaltung, der die technischen Mittelschulen unterstellt sind, beabsichtigt nämlich aus „verwaltungstechnischen" Gründen den mathematischen Unterricht nicht wie bisher allein von pro facultate docendi geprüften Mathematikern erteilen zu lassen, sondern ihn zum Teil in die Hände von Diplomingenieuren zu legen. Man befürchtet — vielleicht nicht mit Unrecht —, daß bei der für Mathematiker verschwindenden Aussicht, in leitende Stellungen aufzurücken, der Zustrom von mathematischen Lehramtskandidaten zu den technischen Mittelschulen auf die Dauer nicht ausreichen wird, zumal auch der Mathematiker und Naturwissenschaftler bei der rein schriftlichen und zeichnerischen Abschlußprüfung nicht beteiligt ist; man will den mathematischen Unterricht nicht in einer einzigen Hand konzentriert sehen und für den Fall von Erkrankung oder Verhinderung des zünftigen Mathematikers sofort einen bequemen Ersatz schaffen usw. Kurz, aus allen diesen verwaltungstechnischen Gründen soll der Mathematiker bei der Durchführung der neuen Ordnung, wenn nicht ausgeschaltet, so doch mehr zurückgedrängt werden. Man kann bei aller Würdigung der ministeriellen Begründung dieser Absicht die Ersetzung des Mathematikers durch den Ingenieur im Interesse der Sache selbst nur bedauern. Mag man von der wissenschaftlichen und pädagogischen Ausbildung des Ingenieurs auch noch so hoch denken, es ist für den Durchschnittsingenieur mit seiner geringen mathematischen Ausbildung in den ersten paar Semestern und bei der Fülle des rein technischen Stoffes, der bei dem gewaltigen Fortschritt unserer Technik täglich auf ihn einstürmt, einfach unmöglich, auch noch den mathematischen Lehrstoff nach soviel Jahren der praktischen Tätigkeit zu meistern und die neuen Methoden kennen zu lernen; einzelne Ausnahmen bestätigen bekanntlich die Regel. So steht also zu befürchten, daß die neuen Bestimmungen vielfach auf dem Papier stehen bleiben und kein Fleisch und Blut gewinnen werden, falls die Zurückdrängung des dafür unentbehrlichen Fachmannes ausgeführt wird. Videant consules!

Beweis des Brianchonschen Satzes bezüglich des Kreises.

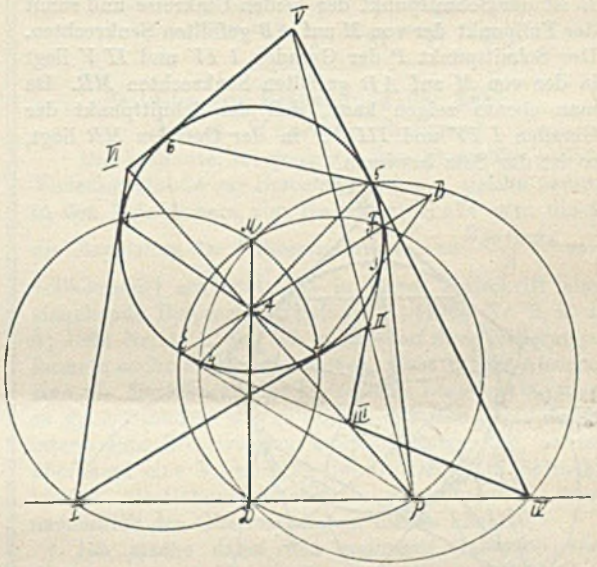
Von Prof. Dr. Graefe (Darmstadt).

In Nr. 4, S. 89, des laufenden Jahrganges hat Herr K. Kommerell einen sehr einfachen Beweis des Pascalschen Satzes gegeben und den Wunsch ausgesprochen, „für den Satz von Brianchon ebenfalls einen direkten, möglichst elementaren Beweis zu bekommen". Den Satz von Brianchon: „In jedem einem Kreise umschriebenen Sechseck *I II III IV V VI* durchschneiden sich die Diagonalen durch je zwei gegenüberliegende Ecken (*I IV*; *II V*; *III VI*) in einem Punkt" kann man mit Hilfe des Sehnensatzes leicht aus dem Pascalschen ableiten. Es seien 1, 2, 3, 4, 5, 6 die Berührungspunkte der Seiten *VI I*; *I II*; *II III*; *III IV*; *IV V*; *V VI*. Nach dem Pascalschen Satze liegen die Schnittpunkte

A der Geraden 12 und der Geraden 45
B „ „ 23 „ „ „ 56 in einer Geraden.
C „ „ 34 „ „ „ 61

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Die Gerade *AB* schneidet den Kreis in den Punkten *EF* (s. Fig.).



Der Mittelpunkt des Kreises sei *M*; die Tangenten in *E* und *F* treffen sich in *P*. Der Umkreis *K* des Dreiecks 1 *M* 2 geht durch *I*, der Umkreis K_1 des Dreiecks 4 *M* 5 geht durch *IV* und der Umkreis K_2 des Dreiecks *EFM* durch *P*. Nach dem Sehnensatz ist

$$A1 \cdot A2 = A4 \cdot A5 = AE \cdot AF.$$

Trifft *AM* den Kreis *K* in *D*, so ist

$$A1 \cdot A2 = AM \cdot AD,$$

also $A4 \cdot A5 = AM \cdot AD$ und $AE \cdot AF = AM \cdot AD$. Durch die Punkte 4, 5, *M*, *D* geht daher ein Kreis, nämlich K_1 und ebenfalls durch die Punkte *E*, *F*, *M*, *D* ein Kreis, nämlich K_2. Die Kreise *K*, K_1, K_2 schneiden sich in *M* und *D*. Da *I M*, *IV M*, *PM* die Durchmesser von *K*, K_1, K_2 sind, so ist die Gerade *MA* senkrecht auf *I D*, *IV D*, *PD* d. h. der Punkt *P* liegt in der Geraden *I IV*. Ebenso zeigt man, daß der Schnittpunkt *P* der Tangenten in *E* und *F* in der Geraden *II V* und *III VI* liegt w. z. b. w.

2. Die Gerade *AB* schneidet den Kreis nicht.

Es seien *TT'* die Berührungspunkte der von *A* an den Kreis gezogenen Tangenten. Man verbinde *D* und *M* mit *T*. Es ist

$$AT^2 = A1 \cdot A2 = AM \cdot AD \text{ oder } \frac{AT}{AM} = \frac{AD}{AT} \text{ und}$$

$$\sphericalangle TAD = \sphericalangle TAM,$$

mithin

$\triangle MTA \sim \triangle DTA$, daher $\sphericalangle TDA = \sphericalangle ATM = 1\,R$, d. h. *T* liegt auf *I IV*.

Es ist also
$I\,IV$ die zu A gehörige Berührungssehne
$II\,V$ „ „ B „ „ , die den Kreis in den Punkten T_1, T_1' trifft
$III\,VI$ die zu C gehörige Berührungssehne, die den Kreis in den Punkten T_2, T_2' trifft.

Der Umkreis des Dreiecks TMT' geht durch A, der Umkreis des Dreiecks $T_1'MT_1$ durch B. Die Sehne TT' ($I\,IV$) schneidet die Sehne T_1T_1' ($II\,V$) in P. Nach dem Sehnensatz ist

$$PT \cdot PT' = PT_1 \cdot PT_1'.$$

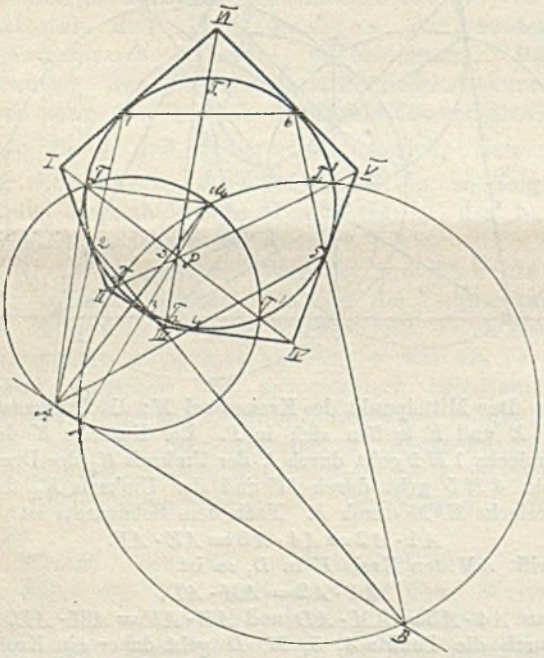
Schneidet MP den Umkreis des Dreiecks TMT' in R, so ist

$$PT \cdot PT' = PM \cdot PR,$$

also

$$PT_1' \cdot PT_1 = PM \cdot PR.$$

Durch die vier Punkte T_1, T_1', M, R geht ein Kreis, nämlich der Umkreis des Dreiecks T_1MT_1'; der Punkt R ist der Schnittpunkt der beiden Umkreise und somit der Fußpunkt der von M auf AB gefällten Senkrechten. Der Schnittpunkt P der Geraden $I\,IV$ und $II\,V$ liegt in der von M auf AB gefällten Senkrechten MR. Da man ebenso zeigen kann, daß der Schnittpunkt der Geraden $I\,IV$ und $III\,VI$ in der Geraden MR liegt, so ist der Satz bewiesen.



Es sei noch bemerkt, daß im vorhergehenden u. a. zugleich folgende Sätze bewiesen sind:

1. Wenn drei Kreise einander schneiden, so durchschneiden die drei gemeinschaftlichen Sehnen einander in demselben Punkt.
2. Zieht man von den Punkten P, P_1, P_2, P_3 usw. einer Geraden die Tangenten PM, PN; P_1M_1, P_1N_1; P_2M_2, P_2N_2; P_3M_3, P_3N_3 usw. an einem Kreis, so gehen die Berührungssehnen MN, M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 usw. durch einen festen Punkt Q. Die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes und des Punktes Q steht auf der Geraden PP_1 senkrecht.
3. Zieht man durch einen Punkt Q Gerade, die einen Kreis in den Punkten M, N; M_1, N_1; M_2, N_2; M_3, N_3 usw. treffen, so liegen die Schnittpunkte P, P_1, P_2, P_3 usw. der in den Punkten M, N; M_1, N_1; M_2, N_2; M_3, N_3 usw. gezogenen Tangenten (PM, PN; P_1M_1, P_1N_1; P_2M_2, P_2N_2; P_3M_3, P_3N_3 usw.) in einer Geraden. Liegt der Punkt Q außerhalb des Kreises, so ist PP_1 die zu Q gehörige Berührungssehne.

Zwei diophantische Gleichungen.

Von W. Hoffmann (Riga).

A) Ganzzahlige Lösungen der Gleichung $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$.

Zunächst können wir die Bestimmung treffen, daß a, b und c relativ prim seien, um nur primäre Tripel zu erhalten, aus deren jedem sich durch Erweitern mit einem Faktor m beliebig viele abgeleitete Tripel ergeben.

Aus der Gleichung $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ folgt $c=\frac{ab}{a+b}$ ganzzahlig. Wären a und b relativ prim, so wäre $a+b$ relativ prim zu a und zu b, also auch zu ab, und $\frac{ab}{a+b}$ wäre ein gekürzter Bruch.

Wir müssen also $a=pa'$ und $b=pb'$ setzen, wo p das größte gemeinschaftliche Maß von a und b, a' und b' aber relativ prim sind. Dadurch geht $c=\frac{ab}{a+b}$ über in $c=\frac{pa'b'}{a'+b'}$; damit dieses ganzzahlig wird, muß p durch $a'+b'$ teilbar sein, und damit nicht in c ein Faktor von p, also auch von a und b übergeht, und so die eingangs gestellte Bedingung $(a, b, c)=1$ verletzt wird, muß $p=a'+b'$ sein. Hierdurch wird aber $c=a'b'$. Die Lösung der Gleichung $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ läuft also darauf hinaus, eine Zahl p in zwei teilerfremde Summanden, a' und b', zu zerlegen, worauf

(I) $\quad a=pa'; \quad b=pb'; \quad c=a'b'.$

Es ist $a-c=(a'+b')a'-a'b'=a'^2$, also $a=c+a'^2$; ebenso $b=c+b'^2$.

Man kann die gefundene Lösung also auch so aussprechen: es ist eine Zahl c in zwei teilerfremde Faktoren a' und b' zu zerlegen und nacheinander um die Quadrate derselben zu vergrößern, so daß

(II) $\quad c=a'b'; \quad a=c+a'^2; \quad b=c+b'^2.$

Hieraus ergibt sich die Regel für die Zerlegung eines gegebenen Stammbruches in zwei Summanden, die wieder Stammbrüche sind. Der gegebene Stammbruch sei $\frac{1}{n}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$; man setze $n=m_i c_i$, wo $m_i c_i$ alle möglichen Faktorenzerlegungen von n einschließt, und suche für jedes c_i alle möglichen Zerlegungen nach (II)

Beispiel: $\quad \frac{1}{12}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}.$

a) $m_1=1$; $c_1=12$. $\quad$ b) $m_2=2$; $c_2=6$.
c) $m_3=3$; $c_3=4$. $\quad$ d) $m_4=4$; $c_4=3$.
e) $m_5=6$; $c_5=2$. $\quad$ f) $m_6=12$; $c_6=1$.

Es folgt

aus a)	1)	$a_1'=1$;	$b_1'=12$;
		$a_1=q_1=13$;	$b_1=r_1=156$.
	2)	$a_2'=3$;	$b_2'=4$;
		$a_2=q_2=21$;	$b_2=r_2=28$.
aus b)	3)	$a_3'=1$;	$b_3'=6$;
		$a_3=7$;	$b_3=42$;
		$q_3=14$;	$r_3=84$.
	4)	$a_4'=2$;	$b_4'=3$;
		$a_4=10$;	$b_4=15$;
		$q_4=20$;	$r_4=30$.
aus c)	5)	$a_5'=1$;	$b_5'=4$;
		$a_5=5$;	$b_5=20$;
		$q_5=15$;	$r_5=60$.

aus d) 6) $a_6' = 1$; $b_6' = 3$;
$a_6 = 4$; $b_6 = 12$;
$q_6 = 16$; $r_6 = 48$.
aus e) 7) $a_7' = 1$; $b_7' = 2$;
$a_7 = 3$; $b_7 = 6$;
$q_7 = 18$; $b_7 = 36$.
aus f) 8) $a_8' = 1$; $b_8' = 1$;
$a_8 = 2$; $b_8 = 2$;
$q_8 = 24$; $r_8 = 24$.

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{13} + \frac{1}{156}; \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{21} + \frac{1}{28}; \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{14} + \frac{1}{84};$$
$$\frac{1}{12} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30}; \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{15} + \frac{1}{60}; \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{16} + \frac{1}{48};$$
$$\frac{1}{12} = \frac{1}{18} + \frac{1}{36}; \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{24} + \frac{1}{24}$$

B) Ganzzahlige Lösungen der Gleichung $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$

zur Auffindung harmonischer Tripel a, b, c.

Wir nehmen wieder $(a, b, c) = 1$ an. Aus $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ folgt $b = \frac{2ac}{a+c}$ ganzzahlig. Wären a und c relativ prim, so wäre $\frac{ac}{a+c}$ ein gekürzter Bruch, also $\frac{2ac}{a+c}$ ganzzahlig nur bei $a + c = 2$, woraus (den Fall $a = 0$ oder $c = 0$ ausgeschlossen) folgt:

$$a = b = c = 1.$$

Im übrigen können wir also setzen $a = pa'$; $c = pc'$; $b = \frac{2pa'c'}{a'+c'}$, worin p das größte gemeinschaftliche Maß von a und c, a' und c' aber teilerfremd sind. Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

I. $a' + c'$ ist ungerade; dann ist $p = a' + c'$, also auch ungerade; von den Zahlen a' und c' ist eine gerade, eine ungerade, ebenso ist dann auch von $a = pa'$ und $c = pc'$ eines gerade, eines ungerade; $b = 2a'c'$ ist durch 4 teilbar.

Es ergibt sich die erste Art primärer harmonischer Tripel nach folgender Regel: man zerlegt eine ungerade Zahl p in zwei teilerfremde Summanden a' und c', dann bilden pa', pc' und $2a'c'$ ein harmonisches Tripel.

II. $a' + c'$ ist gerade, d. h. a' und c' sind beide ungerade; dann ist $2p = a' + c'$; $b = a'c'$ ist ungerade; p kann gerade oder ungerade sein, ebenso sind dann $a = pa'$ und $c = pc'$ gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade.

Die zweite Art primärer harmonischer Tripel ergibt sich nach der Regel: das Doppelte einer beliebigen Zahl p wird in zwei teilerfremde Summanden a' und c' zerlegt; pa', pc' und $a'c'$ bilden ein harmonisches Tripel.

Anmerkung. Ein Tripel der ersten Art kann nie zugleich eins der zweiten Art sein, da in jedem primären Tripel der ersten Art das harmonische Mittel durch 4 teilbar, die beiden anderen Zahlen nach dem Modul 2 nicht kongruent sind; in jedem primären Tripel der zweiten Art aber das harmonische Mittel ungerade, die beiden anderen Zahlen nach dem Modul 2 kongruent sind.

Beispiele. Zu I. $p = 3$; $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$

$p = 5$; $\frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{20}$

$p = 5$; $\frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} - \frac{1}{15}$

$p = 7$; $\frac{1}{7} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} - \frac{1}{42}$

$p = 7$; $\frac{1}{14} - \frac{1}{20} = \frac{1}{20} - \frac{1}{35}$

$p = 7$; $\frac{1}{21} - \frac{1}{24} = \frac{1}{24} - \frac{1}{28}$.

Zu II. $p = 2$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$

$p = 3$; $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{15}$

$p = 4$; $\frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{1}{7} - \frac{1}{28}$

$p = 4$; $\frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{1}{15} - \frac{1}{20}$

$p = 5$; $\frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9} - \frac{1}{45}$

$p = 5$; $\frac{1}{15} - \frac{1}{21} = \frac{1}{21} - \frac{1}{35}$.

Beiträge zur Berechnung der Zahl π.

Von A. Wendler (Erlangen.)

Die bekannte, im geometrischen Unterricht geübte Vielecksmethode zur Berechnung von π, welche bereits in den Lehrbüchern von Baltzer, Heis usw. durch die Benützung der Näherungsformel $\pi = \frac{2p_i + p_a}{3}$ vervollkommnet erscheint, hat in dieser Zeitschrift eine eingehende Besprechung gefunden. (1903 Nr. 2, 3, 4, 5; 1904 Nr. 4, 5, 6). Ich möchte auf diese Näherungsformeln nochmals zurückkommen, nicht in der Absicht, eine für die Zwecke des Unterrichts bessere Ableitung zu geben, sondern um zu zeigen, daß sich daran einige interessante Erörterungen knüpfen lassen, die, soweit überhaupt eine Verwertung im Unterricht in Betracht kommt, als Uebungsmaterial in den oberen Klassen, namentlich der Oberrealschulen, dienen könnten.

Ich mache dabei den weitesten Gebrauch von Grenzübergängen, die ja schon frühzeitig in der Algebra und Trigonometrie auftreten, vermeide aber grundsätzlich die Reihenentwicklungen.

Bedeuten u_n und U_n die Umfänge, f_n und F_n die Flächeninhalte der regelmäßigen In- und Umpolygone, so ist:

$$(1) \qquad u_n = 2n \cdot \sin\frac{\pi}{n};$$

$$(2) \qquad f_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \sin\frac{2\pi}{n} = n \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \cos\frac{\pi}{n};$$

$$(3) \qquad U_n = 2n \cdot \operatorname{tang}\frac{\pi}{n} = 2 \cdot n \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}};$$

$$(4) \qquad F_n = n \cdot \operatorname{tang}\frac{\pi}{n} = n \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Indem $\cos\frac{\pi}{n}$ für $n = \infty$ zu 1 wird, ergibt sich übereinstimmend aus diesen vier Formeln:

$$(5) \qquad \pi = \lim_{\infty}\left(n \sin\frac{\pi}{n}\right).$$

(Das Gleiche ergibt sich unabhängig von den Formeln (1) bis (4), wenn man von dem bekannten Grenzwert $\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x=0} = 1$ ausgehend, $x = \frac{\pi}{n}$ setzt und n unbegrenzt wachsen läßt.)

Wollte man auf Grund von Formel (5) π berechnen, dann käme offenbar folgende sehr übersichtliche Methode in Betracht, welche aber, was Rechenarbeit anlangt, vor der üblichen Vielecksmethode nicht sehr viel voraus hat:

Man berechnet aus

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}},$$

von $\sin 30^0=\frac{1}{2}$ ausgehend, durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel $\sin 15^0$, $\sin 7^0\,30'$ usw. bis zu $\sin 14'\,{}^1/_{16}$; dann kann man $\sin 1'=\sin 14\,{}^1/_{16} : 14\,{}^1/_{16}$ und $\sin 1''=\frac{1}{60}\cdot\sin 1'$ setzen; so erhält man

$$\sin 1''=0{,}0000048481.$$

Formel (5) liefert demnach für π den Näherungswert $180\cdot 60\cdot 60\cdot 0{,}0000048481=3{,}1416$ auf vier Stellen genau.

π liegt immer zwischen F_n und f_n (bezw. 2π zwischen u_n und U_n). In ersterem Falle ist genau $n\sin\frac{\pi}{n}=\sqrt{F_n\cdot f_n}$, somit auch

$$\pi=\lim\left(n\cdot\sin\frac{\pi}{n}\right)=\lim\sqrt{F_n\cdot f_n}\text{ oder }\frac{F_n+f_n}{2},$$

da mit wachsendem n sich f_n und F_n mehr und mehr nähern, also das geometrische Mittel durch das arithmetische ersetzt werden kann. Solange also n nicht sehr groß ist, ist das arithmetische Mittel nur eine sehr rohe Annäherung. Es ist auch geometrisch evident, daß die Flächen F_n und f_n dem Kreisinhalt sich nicht gleichstark nähern, daß vielmehr F_n ein größeres Gewicht zukommt als f_n. Setzen wir daher

$$\pi=\frac{p\,F_n+q\,f_n}{p+q}=\frac{y\,F_n+f_n}{y+1},$$

so ist der Quotient $y=\frac{p}{q}$ eine Zahl größer als 1. Man erhält

$$y=\frac{f_n-\pi}{\pi-F_n}=\frac{\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}-\pi}{\pi-n\,\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{n}}=\frac{\frac{1}{2}\sin 2x-x}{x-\mathrm{tang}\,x},$$

wenn man $\frac{\pi}{n}=x$ setzt. Für $n=\infty$, d. h. $x=0$ wird dieser Quotient von der Form $\frac{0}{0}$. Nach den Regeln der Differentialrechnung hat man dann

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{\cos 2x-1}{1-{}^1/\cos^2 x}=\frac{2\cos^2 x\cdot(\cos^2 x-1)}{\cos^2 x-1}$$

zu betrachten. Dieser Quotient wird aber $=2$ für $x=0$.

Diesen Grenzwert kann man auch durch eine mehr elementare Methode gewinnen, bei der zwar ganz analog verfahren, aber der Begriff des Differentialquotienten nicht eingeführt wird. Indem nämlich

$$\varphi(\delta)=\frac{1}{2}\sin 2\delta-\delta,\quad \psi(\delta)=\delta-\mathrm{tang}\,\delta$$

mit verschwindendem δ gegen 0 konvergieren, kann man statt $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ auch den Quotienten

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(\delta)}{\psi(x)-\psi(\delta)}=\frac{\frac{1}{2}(\sin 2x-\sin 2\delta)-(x-\delta)}{(x-\delta)-(\mathrm{tang}\,x-\mathrm{tang}\,\delta)}$$

untersuchen. Nach bekannten Formeln der Trigonometrie erscheint dieser zunächst in der Form

$$\frac{\cos(x+\delta)\cdot\frac{\sin(x-\delta)}{x-\delta}-1}{1-\frac{\sin(x-\delta)}{x-\delta}\cdot\frac{1}{\cos x\cdot\cos\delta}},$$

somit für $x=\delta$ als

$$\frac{(\cos 2\delta-1)\cdot\cos^2\delta}{\cos^2\delta-1}=2\cdot\cos^2\delta\cdot\frac{(\cos^2\delta-1)}{\cos^2\delta-1}=2\cos^2\delta.$$

Mit abnehmendem δ resultiert also schließlich der Grenzwert $=2$.

Die Gewichtskurve

$$y=\frac{\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}-\pi}{\pi-n\,\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{n}}$$

hat also für $n=\infty$ die Ordinate 2; ferner gehören zusammen, was ohne Kenntnis von π bestimmt werden kann, die Wertepaare

$$n=1,\ y=-1;\ n=2,\ y=0;\ n=4,\ y=\frac{\pi-2}{4-\pi}$$

oder, da $\pi=3+a$ ist, $y=\frac{1+a}{1-a}>1<2$.

Aus diesem Verlaufe der Kurve läßt sich sofort erkennen, welchem Umstand die Näherungsformel $\pi=\frac{y\,F_n+f_n}{y+1}=\frac{2\,F_n+f_n}{3}$ ihre Güte verdankt, nämlich dem, daß die Kurvenordinate sehr schnell gegen 2 konvergiert, indem sie in dem ganzen Intervall von $n=4$ bis $n=\infty$ um weniger als 1 zunimmt.

Auch aus $2\pi=\frac{z\,u_n+U_n}{z+1}$ läßt sich eine analoge Näherungsformel ableiten. Auch hier findet man $z=2$.

Kleinere Mitteilungen.

Gedächtnisregel für Sinus-Werte.

Von Dr. W. Jaeckel (Ohlau).

Die Grenzwerte der sin-Funktion — für Winkel um je 15° fortschreitend — lassen sich in folgendes Gesetz bringen:

$$\left|\begin{array}{l}
\sin\ 0^0=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{4}}\\
\sin 15^0=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\\
\sin 30^0=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{1}}\\
\sin 45^0=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{0}}\\
\sin 60^0=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{1}}\\
\sin 75^0=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\\
\sin 90^0=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{4}}
\end{array}\right|$$

Herzuleiten sind zunächst $\sin 15^0$ und $\sin 75^0$ mit Hilfe der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen:

$$\sin 90^0-\sin 60^0=2\cos 75^0\sin 15^0$$

$$1-\frac{1}{2}\sqrt{3}=2\sin^2 15^0$$

$$\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3}=\sin^2 15^0$$

$$\sin^2 15^0=\frac{1}{4}(2-\sqrt{3})$$

$$\sin 15^0=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Die Aufgabe, auch die übrigen Grenzwerte in einem verwandten Wurzelausdruck darzustellen, so daß ein

einheitlich-fortlaufendes Gesetz entsteht, wird von den Schülern mit großem Interesse erfaßt.

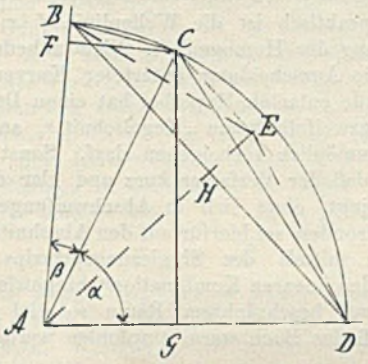
* * *

Geometrische Ableitung der Gleichung für $\sin\alpha + \sin\beta$.

Von Dr. M. Zwerger (Nürnberg).

Die Gleichung für $\sin\alpha + \sin\beta$ wird fast in allen Lehrbüchern auf rechnerischem Wege abgeleitet; sie läßt sich aber auch in sehr einfacher und übersichtlicher Weise geometrisch begründen. Zeichnet man um den Scheitel A des $\sphericalangle BAD = \alpha + \beta$ einen Kreis mit dem Halbmesser 1, so ist die Fläche des Vierecks $ABCD$ gleich

$$\frac{1}{2} AD \cdot CG + \frac{1}{2} AB \cdot CF = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta).$$



Verschiebt man nun den Punkt C auf der Parallelen zu BD bis zum Schnittpunkte E mit der Halbierenden des $\sphericalangle BAD$, so ist Viereck $ABED$ gleich

$$\frac{1}{2} BD \cdot AH + \frac{1}{2} BD \cdot HE = \frac{1}{2} BD \cdot AE;$$

aber $BD = 2 \cdot \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ und, da $\sphericalangle CAE = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ und $\sphericalangle CEA = 90^0$ ist, so ist $AE = \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; also ist Viereck $ABED = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

Die Vierecke $ABCD$ und $ABED$ sind aber gleich; folglich ist

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Auf gleiche Weise läßt sich die Gleichung für $\sin\alpha - \sin\beta$ beweisen; man trägt den $\sphericalangle \beta$ bei AC von $\sphericalangle \alpha$ ab und zieht die entsprechenden Geraden wie oben; dann ist, wenn sich AB und CD in O schneiden,

$$\triangle ACD - \triangle ABC = \triangle AOD - \triangle BOC =$$
$$\triangle ABD - \triangle CBD = \triangle ABD - \triangle EBD, \text{ d. h.}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cdot \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Die Gleichungen für $\cos\alpha \pm \cos\beta$ ergeben sich am einfachsten dadurch, daß man in den obigen Figuren an Stelle der Winkel α und β die Winkel $90 - \alpha$ und $90 - \beta$ setzt.

* * *

Nochmals über Zerlegungsbeweise zum Pythagoreischen Satz.

Von Chr. Nielsen (Varel).

Daß es vom Serebrowskyschen Beweise außer den beiden von mir vorgeführten noch viele andere Varianten gibt, habe ich im ersten Aufsatz in Nr. 2 der Unt.-Bl. schon bemerkt. Nach dem Erscheinen dieses Aufsatzes übersandte mir Herr Dr. Paul Mahlo in Halle a. S. seine im Jahre 1908 herausgegebene Dissertation „Topologische Untersuchungen über Zerlegung in ebene und sphärische Polygone", von deren Vorhandensein ich bis dahin keine Kenntnis hatte, mit dem Bemerken, er habe darin eine Methode angegeben, die unmittelbar erkennen lasse, weshalb der von mir angestrebte Parallelismus der Umrißlinien entsprechender Teilflächen erreichbar sei. In der Tat ist dieses Verfahren sehr beachtenswert. Mahlo verschiebt eine Figur, die ein aus lauter Hypotenusenquadraten gebildetes Netz darstellt, über eine andere, aus lauter Kathetenquadraten zusammengesetzte Figur, und zwar stets parallel den Hypotenusen in der zweiten Figur; hierbei bilden dann die Grenzlinien der Kathetenquadrate im Hypothenusenquadrat sowie die Grenzlinien der Hypotenusenquadrate gleichzeitig in den Kathetenquadraten die Teilungslinien. Durch einfache Parallelverschiebung der zweiten Figur über die erste erhält man dann sämtliche Varianten des Serebrowskyschen Beweises. Auch den Epsteinschen Beweis leitet Mahlo aus jener zweiten Figur auf ähnliche Art ab.

Nun wäre es aber wohl möglich, daß Serebrowsky seinerzeit etwas Aehnliches erdacht hat; denn es heißt bei Wipper a. a. O., daß S. eine „mechanische Vorrichtung" erfunden habe, um die Varianten des Beweises zu konstruieren.

Es kommt überhaupt ohne Zweifel häufig vor, daß beim Suchen nach neuen Beweisen zum Pythagoreischen Satz ältere, verschollene Beweise wiedergefunden werden. So erfahre ich jetzt durch Mitteilung des Herrn Mahlo, daß bereits A. Göpel im Archiv f. Mathem. u. Phys., Bd. 4, Taf. IV, die von mir im ersten Aufsatz unter I und II gebrachten Beweisformen angibt. Die von mir gefundene, in den Unt.-Bl. 1908, S. 79, mitgeteilte neue Form eines älteren Beweises ferner bringt, wie ich kürzlich Gelegenheit hatte festzustellen, schon Buerbaum 1855 in der zum Jahresbericht des Gymnasiums zu Coesfeld gehörenden Abhandlung Theorema pythagoricum usw. als Figur 1. Daß es mir aber in dieser Hinsicht nicht an Leidensgenossen fehlt, zeigt der von Mahlo a. a. O. S. 11 angeführte Fall, und möge auch noch das folgende Beispiel dartun. In der Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unt. 1906, S. 527, veröffentlicht Dr. J. Stilling, Prof. der Augenheilkunde in Straßburg, einen von ihm gefundenen Beweis, den nach seiner Angabe die Professoren Reyhe und Simon als neu bezeichnet hätten. Buerbaum a. a. O. gibt aber diesen Beweis in Fig. 10; bei Wipper steht er als XVII. Beweis (nach Hauff, 1803); weiter findet man ihn in der Raumlehre von Martin und Schmidt, 1897, II, S. 104, und ferner ist er identisch mit dem von Habenicht, 1899, S. 109, in den Unt.-Bl. gebrachten Drehungsbeweis.

So hat Ben Akiba doch wieder recht.

Lehrmittel-Besprechungen.

Koppe, Heinrich, Mathematische Modelle zum Selbstanfertigen. Nordhausen 1910, Jul. Koppe.

Die — zum Teil auf der Posener Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts vorgezeigten und dort sehr beifällig aufgenommenen — Modelle sind aus starkem Kartonpapier hergestellt und vermöge dessen vollständig zusammenklappbar und in Brief-

umschlägen unterzubringen. Die einzelnen Teile für jedes Modell müssen aus den Bogen, auf denen sie aufgezeichnet sind, herausgeschnitten und nach Art der bekannten Modellierbogen mittels Leisten, z. T. auch mittels vorstehender Papierzähne, die durch entsprechende Spalten hindurchzuschieben sind, zusammengesetzt werden.

Zunächst liegen 7 Modelle vor (Die dreiseitige körperliche Ecke — Bogen 1; Ecke und Polarecke — Bogen 2 a, b; Sphärisches Dreieck und Gegendreieck — Bogen 3; Astronomische Geographie (das Fundamentaldreieck Zenit — Pol — Gestirn) — Bogen 4; Die Ellipse als Zylinderschnitt — Bogen 5; Dieselbe als Kegelschnitt — Bogen 6; Die Parabel als Kegelschnitt — Bogen 7 a, b).

Für die Behandlung der Modelle gibt der Verfasser eine gedruckte Anleitung, deren Knappheit sich dadurch erklärt, daß die Zusammensetzung durch die Schüler, nach seiner Absicht, unter Anleitung des Lehrers erfolgen soll. Trotzdem könnte sie vielleicht doch noch etwas ausführlicher sein, zumal die Modelle wohl auch von Freunden der Mathematik benutzt werden dürften, die sich auf eigene Faust weiterbilden wollen. Namentlich bei dem Modell 2 wäre eine Mißverständnissen vorbeugende größere Ausführlichkeit auch darum angebracht, weil die Polarecke, deren Kanten hier durch Lote auf den Innenseiten der ursprünglichen Ecke dargestellt werden, von der gewöhnlichen Auffassung der Polarecke abweicht; es ist die Scheitelecke der Ecke, die man meist als Polarecke bezeichnet. Vielleicht würde sich auch eine der gewöhnlichen Auffassung mehr Rechnung tragende, übrigens leicht zu bewirkende Aenderung des Modells selbst bei einer neuen Auflage empfehlen. Diese darf man dem verdienstlichen Unternehmen, das sehr geeignet ist, die Klarheit und Anschaulichkeit der stereometrischen Vorstellungen bei den Schülern und zwar gerade durch deren eigene tätige Mitarbeit zu fördern, von Herzen wünschen, wie ich mich auch dem weiteren, bereits von anderer Seite geäußerten Wunsche nur anschließen kann, daß das begonnene Werk auch noch durch Berücksichtigung der Anwendungen auf physikalischem Gebiete, namentlich der Kristallographie und der Kristalloptik eine sehr erwünschte Fortsetzung erfahren möge. Dem mathematischen Schulunterricht wird hier ein neues, äußerst schätzbares Mittel geboten, das von den einzelnen Schülern für sehr geringen Preis erworben werden kann; seine Verbreitung in Schulkreisen ist angelegentlichst zu empfehlen.

F. Pietzker (Nordhausen).

Bücher-Besprechungen.

Beutel, Eugen, Oberreallehrer, Algebraische Kurven. I. Teil: Kurvendiskussion. 147 S. Leipzig 1909, G. J. Göschen. M 0,80.

Das ansprechende Büchlein wird dem Lehrer der Prima willkommen sein, von der historischen Einleitung bis zu dem nützlichen Register. Noch wertvoller wird vielleicht für die Praxis der zweite Teil werden, der die einzelnen algebraischen Kurven 3. und 4. Ordnung behandelt. Die Zusammenstellung der Gleichungen von nahezu 100 algebraischen Kurven bietet schon jetzt gutes Uebungsmaterial. Die Einführung der Infinitesimalrechnung, die, lange künstlich zurückgehalten, sich jetzt wie ein befreiter Strom über die höheren Schulen ergießt, wirkt ja auch befreiend von anderen Schranken. Man braucht nicht mehr bei den Kegelschnitten Halt zu machen und sie in ermüdender Breite zu behandeln, nachdem das Werkzeug, in weitere interessante Gebiete einzudringen, dem Schüler in die Hand gegeben ist, und das nächstliegende Feld sind eben die algebraischen Kurven. Leider hat der Verfasser die unmittelbare Verwendung seines Buches vom Schulunterricht dadurch ausgeschlossen, daß er die Uhrzeigerdrehung als positiv und dadurch die positive y-Achse nach unten laufend angenommen. Welche wissenschaftlichen Vorteile dies hat, ist jedem hinreichend bekannt; aber das Schicksal der 100-Teilung des Quadranten sollte doch warnen, viel schöne Kraft auf die Bekämpfung von Aeußerlichkeiten zu verschwenden. Mehr Glück wird der Verfasser vielleicht mit der Aufnahme von w als dritter homogener Koordinate an Stelle des irreführenden z haben. Entschieden praktisch ist die Wellenlinie $f(x, y, w)$ zur Bezeichnung der Homogenität. Nicht unbedenklich erscheint die Ausscheidung entarteter Kurven. Die in zwei Gerade entartete Hyperbel hat einen Doppelpunkt und ist unzweifelhaft ein „Kegelschnitt", an dem der Schüler unmöglich vorbeigehen darf. Sonst ist es ja wertvoll, daß der Verfasser kurz und klar die Hauptsachen bringt, ohne sich in Abschweifungen zu verlieren. Besonders sei hierfür auf den Abschnitt „Kurvendiskussion mittels des Signierungsprinzips und des Prinzips der linearen Kombination" hingewiesen. Auch sonst ist auf beschränktem Raum so viel Gutes geboten, daß das Buch warm empfohlen werden kann.

A. T.

* * *

G. Herting, Von Strecke, Quadrat und Würfel zum bestimmten Integral. Zum Gebrauch in den oberen Klassen unserer Mittelschulen und beim Selbstunterricht. In Kommissionsverlag bei B. G. Teubner. Leipzig 1910. M 3.50.

Es ist sehr zu begrüßen, daß sich Prof. Dr. Herting (nebenbei auch Diplomingenieur) entschlossen hat, das wunderschöne Programm, das er dem letzten Jahresberichte des St. Anna-Gymnasiums in Augsburg beilegte, durch den Buchhandel in weitere Kreise zu bringen. So kann in die Hände der Primaner unserer höheren Schulen ein Büchlein gelangen, das sie im Anschlusse an das im mathematischen Unterricht behandelte Pensum auf kurzem Wege in klarer, anschaulicher Weise zum Begriffe des bestimmten Integrals führt.

Messung und Berechnung von Linien, von ebenen Flächen, von Oberfläche und Rauminhalt von Körpern bilden den Inhalt der ersten drei Abschnitte der vorliegenden Schrift. In allen Fällen knüpft der Verf. an die Erfahrung des Schülers an, gibt er verschiedene Methoden der praktischen Ausmessung, zeigt er den Einfluß der Messungsgenauigkeit, auf das Endergebnis und geht er endlich zum Idealfall einer absoluten Genauigkeit über, indem er die Berechnung auf Grund der geometrischen Lehrsätze durchführt. Wo die Summation sehr kleiner bezw. unendlich kleiner Teile nötig wird, geschieht dies unter Verwendung einfacher Grenzbetrachtungen, nachdem gezeigt ist, daß unendlich kleine Größen erster Ordnung gegen endliche Größen und unendlich kleine Größen zweiter Ordnung gegen solche erster Ordnung vernachlässigt werden dürfen, ohne die Genauigkeit des Ergebnisses zu stören. In diesen ersten Abschnitten wird das Integralzeichen nur nebenher einmal gebraucht.

Im vierten Abschnitt wird zunächst mit Hilfe der Potenzsummen der ganzen Zahlen das $\int_{x=b}^{x=a} x^n dx$ abgeleitet, und dieses zur Wiederholung früherer Berechnungen, sowie zur Lösung schwierigerer Aufgaben angewandt. Die Werte der Integrale $\int_0^\varphi \cos\varphi\, d\varphi$ und $\int_0^\varphi \sin\varphi\, d\varphi$ werden aus einer Figur abgelesen. So sind die Hilfsmittel gewonnen, welche zur Berechnung des Kubikinhaltes von Kreuz- und Klostergewölben, zur Bestimmung von Schwerpunkten und Trägheitsmomenten in all den Fällen ausreichen, welche dem Erfahrungsbereich des Primaners angehören. Dem aus dieser Schülergruppe gedachten Leserkreis kommt der Verfasser durch ausführliche Behandlung des rechnerischen Teiles seiner Darlegungen entgegen, so daß auch der weniger Geübte im Stande ist, die Schrift mit Gewinn zu lesen. Aber nicht nur unseren Oberklässern sei das Studium des Werkchens empfohlen, — auch die Lehrer werden manches Gute darin finden; besonders jene, welche immer noch an der Möglichkeit zweifeln, die Anfänge der Infinitesimalrechnung schon auf den höheren Schulen zu behandeln; sie sehen wenigstens, wie man es machen kann. Heß (Nürnberg.)

* * *

Jacobi de Billy, Doctrinae analyticae Inventum novum. Fermats Briefen an Billy entnommen. Herausgegeben und übersetzt von Paul v. Schaewen. 143 S. Berlin 1910, Otto Salle. Preis 3 M.

Die Aussetzung des Wolfskehlschen Preises für den bis jetzt noch ausstehenden allgemeinen Beweis des sogen. großen Fermatschen Satzes hat neuerdings die Aufmerksamkeit weiterer Kreise wieder auf die merkwürdige Persönlichkeit des genialen Fermat gelenkt, der durch eine Reihe bedeutsamer wissenschaftlicher Leistungen auf den Gebieten der Physik, der Analysis und namentlich der Zahlentheorie sich einen der ersten Plätze in der Geschichte der mathematischen Wissenschaften errungen hat. Seine z. T. ohne Beweis hingestellten und erst später z. T. von anderen Seiten bewiesenen zahlentheoretischen Sätze (insbesondere auch der genannte „große Fermatsche Satz") finden sich in seinen Randglossen zu der Arithmetik des Diophantus; den Schlüssel für viele dieser Randglossen liefert nun, wie schon P. Tannery bemerkt hat, das Inventum novum, das die ersten 36 Folioseiten der zweiten Ausgabe der Diophantischen Arithmetik (Toulouse 1670) füllt.

Von diesem Werke ist eine Neuausgabe nicht wieder erschienen, eine freie und nicht ganz fehlerlose französische Uebersetzung hat Paul Tannery im Band III der Oeuvres de Fermat (Paris 1896) gegeben.

Den Freunden geschichtlicher Forschungen auf dem Gebiete der Mathematik wie namentlich allen den Mathematikern, die durch das neuerdings wieder erweckte Interesse für die Person Fermats sich mit den von ihm aufgeworfenen Fragen zu beschäftigen angeregt worden sind, wird das vorliegende Werk sehr willkommen sein. Es bringt zunächst auf 52 Seiten den lateinischen Text, dann auf 64 Seiten die sehr treue deutsche Uebersetzung dieses Textes, die letzten 23 Seiten werden durch 149 Anmerkungen gefüllt, in denen der Uebersetzer nicht nur eine große Zahl einschlägiger Literaturnachweise, sondern auch eine ganze Reihe eigener Berichtigungen und Ergänzungen gibt.

Das Werk selbst, das sich als ein Auszug aus dem wissenschaftlichen Briefwechsel Fermats mit seinem gelehrten Freunde, dem Jesuitenpater Jacques de Billy darstellt, beschäftigt sich ausschließlich mit der der unbestimmten Analytik angehörenden Aufgabe der Aufsuchung rationaler Werte für x, durch welche eine oder mehrere ganze rationale Funktionen vom ersten bis vierten Grade gleichzeitig zu vollständigen Quadraten werden. Es enthält nach einer kurzen Einleitung drei Teile, deren erster sich mit den unendlich vielen Lösungen doppelter Gleichheiten (d. i. des gleichzeitigen quadratischen Charakters zweier Ausdrücke) befaßt, während das zweite die dreifachen Gleichheiten und deren unendlich viele Lösungen behandelt, und das dritte die Methoden lehrt, nach denen unendlich viele Lösungen aus mehr als dreigliedrigen Ausdrücken zu gewinnen sind. Der von enthusiastischer Bewunderung für Fermat erfüllte Billy hebt dabei fortwährend die Fortschritte der Erkenntnis hervor, die die Fermatschen Untersuchungen gegenüber seinen Vorgängern, namentlich Bachet, bedeuten.

Die Uebersetzung ist sehr treu und liest sich im ganzen gut, manchmal könnte sie vielleicht, namentlich in der Wortstellung, dem modernen Sprachgebrauch etwas mehr Rechnung tragen. Warum der Uebersetzer den Titel „Senator" nicht durch die Bezeichnung „Parlamentsrat" wiedergegeben hat, die Fermat vermöge seiner Anstellung an dem „Parlament" (d. i. dem oberen Provinzial-Gerichtshofe) zu Toulouse zukam, ist nicht recht ersichtlich.

Auf alle Fälle ist das Erscheinen des Buches, in dem eine große Summe gewissenhaftester Arbeit steckt, mit vieler Freude zu begrüßen.

F. Pietzker (Nordhausen).

* * *

E. Jochmann und **O. Hermes**, Grundriß der Experimentalphysik und Elemente der Chemie, sowie der Astronomie und mathematischen Geographie. Neubearbeitet von P. Spies. Berlin 1910, Winckelmann & Söhne.

Die von P. Spies neubearbeitete 17. Auflage des altbewährten Jochmann-Hermesschen Grundrisses zeichnet sich durch klare, durchsichtige Stoffanordnung aus, die dem Leser den Ueberblick über die einzelnen Teile und das Gesamtgebiet der Physik sehr erleichtert. Die trotz ihrer Knappheit leicht lesbare Darstellung ist für Selbstunterricht wie für Privatlektüre besonders interessierter Schüler gleich geeignet. Damit hängt es allerdings zusammen, daß die Klippe des dogmatischen Darbietens nicht überall vermieden ist, so wenn z. B. schon auf S. 4 bei Besprechung der Tatsache der Schwere mitgeteilt wird, daß die Körper von der Erde oder „überhaupt von dem Himmelskörper, auf dem sie sich befinden", angezogen werden. Auch die Einführung der Masse als „Stoffmenge" wäre wohl besser unterblieben, zumal später nur von der auf S. 20 sich findenden kinetischen Massen-Definition Gebrauch gemacht wird.

Die neueren Errungenschaften von Wissenschaft und Technik, soweit sie von weitreichender theoretischer oder praktischer Bedeutung sind, hat der Bearbeiter in einer bei Schulbüchern leider seltenen Vollständigkeit aufgenommen; so in der Mechanik den Schlickschen Schiffskreisel, die Einschienenbahn, die Lenkballons und Flugmaschienen, in der Optik den Dreifarbendruck, das Chromoskop nach Ives, den experimentellen Nachweis stehender Lichtwellen nach Wiener und die ver-

schiedenen Arten der Farbenphotographie, in der Wärmelehre die Dampfturbinen und Explosionsmotoren.

Die universale Stellung des Energieprinzips kommt allenthalben dadurch zum deutlichen Ausdruck, daß alle wichtigeren Erscheinungen vom Gesichtspunkte der Energieerhaltung und Energieumsetzung betrachtet werden, auch solche, bei denen dies in der Mehrzahl der Schulbücher nicht geschieht, wie die Polarisationsströme und die Selbstinduktion. Andererseits ist aber auch die Tragweite des Energieprinzips in § 173 in gehöriger Weise abgegrenzt, woran sich eine schulmäßige (aber in ihren Einzelheiten für die Mehrzahl der Schüler wohl zu weitgehende) Darstellung des Inhalts des zweiten Hauptsatzes schließt.

Von einzelnen Kapiteln, die durch klare und erschöpfende Darstellung angenehm auffallen, nenne ich aus der Optik die Farbenzerstreuung und insbesondere die Farbenmischung, aus dem Elektromagnetismus die Betrachtung der Hysterese und der Wechselströme.

Ausstattung und Druck sind gut, nur auf den Seiten 102, 106, 110 des mir vorliegenden Exemplars ist der Druck verschwommen. Die durchweg sehr deutlichen Figuren lassen das Wichtige, das sie veranschaulichen sollen, klar hervortreten. Eine Teilung in eine Unter- und Oberstufe ist nicht vorgenommen. Der auf der Unterstufe durchzunehmende Stoff ist vielmehr durch einen am Rande gedruckten Strich gekennzeichnet. Die beigegebene Einführung in die Chemie wird für viele Schulen (namentlich Oberrealschulen, wo für Chemie eine größere Stundenzahl zur Verfügung steht) überflüssig. Es wäre deshalb im Interesse der Verbreitung des Buches wünschenswert, wenn eine Ausgabe ohne diesen Anhang veranstaltet würde.

Dr. G. Lony (Hamburg.)

* *

Friedrich Ratzel, Anthropogeographie. I. Teil. 3. unveränd. Aufl., Bibliothek geographischer Handbücher, Neue Folge, herausgeg. von A. Penck.

„Es ist vielmehr zunächst rein praktisch aus meinen Erfahrungen in der Heranbildung junger Geographielehrer entsprungen", schrieb Ratzel vor nunmehr fast 30 Jahren in dem Vorwort zur ersten Auflage der Anthropogeographie, und daraus erklärt sich der Wert, den das Buch nicht allein für die Wissenschaft der modernen Anthropogeographie, die damit erst begründet wurde, sondern gerade für die Schule hat. Kirchhoff, Wagner, Gruber u. a. haben für die Verbreitung Ratzelscher Anschauungen in der Schule viel getan und auch ihre Grundzüge der Allgemeinheit zugänglich gemacht. Aber schließlich soll doch jeder Geographielehrer das Buch selbst benutzen, das auf jeder Seite eine Fülle von Gedanken, eine Summe von Anregungen bietet. Man lese z. B. vor der Durchnahme der Alpen die Abschnitte über Gebirge, etwa den die Pässe behandelnden. Nicht die Gipfel, sondern die Kämme, die dieselben verbinden, und die tiefsten Stellen der Kämme, die Pässe, sind das im großen menschlich Bedeutende am Gebirge. Im Paßreichtum liegt die Zugänglichkeit und Durchgänglichkeit eines Gebirges, in der Paßarmut die Steigerung eines einzelnen Passes zu weltgeschichtlicher Bedeutung: Khaiberpaß. Ungleichmäßige Verteilung der Pässe. Die Vogesen haben keinen eigentlichen Paß zwischen Belfort und Zabern, die Tauern entbehren der echten Paßeinschnitte und in den Westalpen liegen die paßreichen Kottischen Alpen mit ihren seit der Römerzeit wichtigen Pässen neben den paßarmen Grajischen. Eine verkehrshemmende Wirkung hat der keinen einzigen nennenswerten Durchbruch zeigende Jura, während das Hochland von Wales, ein Gebirge entgegengesetzter Art, von Tälern mit noch nicht 100 m hohen Wasserscheiden durchzogen wird. Die Höhe der Pässe ist von Gebirge zu Gebirge und wieder in den einzelnen Gebirgsteilen sehr verschieden. Die Pyrenäen haben hohe Pässe im Vergleich zu den Alpen, wo die Paßhöhe von Westen nach Osten abnimmt. Von der Erhebung ist der geschichtliche Wert der Pässe abhängig. Die Verkehrsbedeutung hängt auch von ihrer Breite ab. Die Wege durch die Pässe der Ostalpen sind niedriger, aber länger als die durch die Westalpen. Beim Thüringer Wald beträgt die mittlere Breite 14 km, der Eisenacher Paß aber überwindet das Gebirge in der Breite von 6 km. Taleinschnitte erleichtern den Auf- und Abstieg: Brenner. Kleinere Völker werden zu Paßvölkern, indem sich die ganze Staatsbildung auf die Ausnutzung dieses Vorteils beschränkt und die Gelegenheiten zur Ausbreitung ungenutzt läßt.

Oder man beschäftige sich als Einführung in die Geographie tropischer Länder mit dem interessanten Kapitel über die Gewöhnung an das Tropenklima, der Erfolg wird nicht ausbleiben.

Die Hauptbedeutung des Buches liegt also in der Anregung, die es bietet. Manches ist inzwischen, da auch seit der zweiten Auflage zehn Jahre vergangen sind, ausgearbeitet, einiges auch als nicht zutreffend erkannt, aber trotzdem muß man dem Herausgeber Penck Recht geben, daß er nicht nur aus Pietät gegen den Verstorbenen geleitet, an Form und Inhalt des Werkes keine Veränderung hat vornehmen lassen; es wäre dann eben nicht mehr das Werk Ratzels gewesen.

R. Lütgens (Hamburg).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Sumpf, K., Grundriß der Physik. Ausg. A. 12. Aufl. Hildesheim 1910, Lax. geb. M 3.80.

Volquardts, G., Feldmessen und Nivellieren. 2. Aufl. Mit 35 Fig. Leipzig 1910, Teubner. kart. M —.80.

Wagner, P., Lehrbuch der Geologie und Mineralogie. Mit 316 Abb. und 4 Taf. 2. und 3. Aufl. Leipzig 1910, Teubner. geb. M 2.80.

Wallentin, J. G., Lehrbuch d. Physik f. d. oberen Kl. d. Mittelschulen u. verwandter Lehranstalten. Ausg. A: Für Gymnasien. Mit 277 Holzschnitten u. einer Spektraltafel in Farbendruck. 14. Aufl. Wien 1909, Pichler, geb. K 4.80.

Wallentin, J. G. Lehrbuch d. Physik f. d. oberen Kl. d. Mittelschulen u. verwandter Lehranstalten. Ausg. B: Für Realschulen. Mit 271 Holzschnitten u. einer Spektraltafel in Farbendruck. 12. Aufl. Wien 1909, Pichler.

— — Grundzüge der Naturlehre f. d. unteren Kl. d. Mittelschulen. Ausg. A: Für Realschulen. Mit 226 Abb. Ausg. B Für Gymnasien. Mit 254 Abb. 7. Aufl. Wien 1910, Pichler.

Weber, H. und Wellstein, J., Encyklopädie der Elementarmathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. I. Elementare Algebra u. Analysis. 3. Aufl. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 10.—.

Weitzel, G., Unterrichtsbriefe f. d. Buchstabenrechnung u. Algebra zum Selbstunterr. Vollst. in 30 Lief. à —.50 M. Wien, Hartleben.

Wilbrandt, F., Grundzüge der Chemie. Ausg. A. 7. Aufl. Hildesheim 1908, Lax.

Willkomm-Köhne, Bilderatlas des Pflanzenreiches. Lief. 1. 5. Aufl. Eßlingen, Schreiber. M —.50.

Wislicenus, W. F., Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper. 3. Aufl. Mit 15 Abb. Leipzig 1909, Göschen. geb. M —.80.

Worgitzky, G., Blütengeheimnisse. Eine Blütenbiologie in Einzelbildern. Mit 47 Abb. 2. Aufl. Leipzig 1910, Teubner. geb. M 3.—

Wunschmann, E., Botanik. 2. Band. Mit 103 Fig. und 14 Taf. Breslau 1910, Hirt. geb. M 2.80.

Ziegler, H. E., Der Begriff des Instinktes einst und jetzt. Eine Studie über die Geschichte und die Grundlagen der Tierpsychologie. Mit 16 Abb. i. Text und 2 Taf. 2. Aufl. Jena 1910, Fischer. geh. M 3.—.