Jahrgang XVII. 1911. No. 2.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe** und **Friedrich Pietzker**,
von diesem geleitet bis 1909, zurzeit herausgegeben von
Prof. Dr. **A. Thaer**,
Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentore in Hamburg.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Dir. Thaer, Hamburg 36, erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (5 Mk. Jahresbeitrag) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 8 Nummern ist 4 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Vereins-Nachrichten.

Für die XX. Hauptversammlung in Münster i. W. vom 5. bis 8. Juni sind folgende Vorträge in Aussicht gestellt:

Prof. Dr. Becher, Raum und Kausalität.
Prof. Dr. Dehn, Ueber Inhaltslehre.
Prof. Dr. Gebhardt, Sichtbarmachung von Schallwellen nach Toeplers Schlierenmethode.
Prof. Dr. v. Hanstein, Behandlung des Planktons im biologischen Unterricht.
Geh. Rat Prof. Dr. Klein, Ueber die Arbeiten der Internationalen mathematischen Unterrichtskommission und des Deutschen Ausschusses mit besonderer Berücksichtigung der Lehrervorbildungsfrage.
Prof. Dr. Konen, Ueber einige Probleme und Ergebnisse der Spektroskopie (mit Versuchen).
Prof. Dr. v. Lilienthal, Berücksichtigung der politischen Arithmetik im Unterricht.
Prof. Dr. Plaßmann, Der heutige Stand der Lehre vom Lichtwechsel der Fixsterne.
Prof. Dr. Rosemann, Versuche über Biologie, die sich für den Unterricht eignen.
Oberl. Schmelzer, Ueber Busmanns Kegelschnittszirkel.
Prof. Walter Schmidt-Düren, Vertiefung oder sogenannte allgemeine Bildung?
Prof. Dr. Stempell, Ueber die Verwendung mikrophotographischer Lichtbilder beim naturwissenschaftlichen Unterricht.
Prof. Dr. Thiel, Illustrationsversuche zur chemischen Mechanik.

Außer einer Besichtigung der Stadt Münster am Nachmittag des 7. Juni sind für den 8. Juni ein geognostischer Ausflug nach Osnabrück und gleichzeitig ein Ausflug nach dem Schiffshebewerk in Henrichenberg in Verbindung mit der Besichtigung industrieller Werke in Recklinghausen und Bochum in Aussicht genommen.

Die Mitteilung der endgültigen Tagesordnung findet in der nächsten Nummer des Blattes statt. Anmeldungen von Vorträgen und Anfragen bittet man an einen der Unterzeichneten zu richten.

Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Killing,
Vorsitzender des Ortsausschusses.

Dir. Dr. A. Thaer,
z. Z. Vorsitzender des Vereins.

Ueber neuere Geometrie.

Vortrag, gehalten auf der Hauptversammlung in Posen.

Von Prof. A. Schülke (Königsberg i. Pr.)

Bei den Erörterungen über die Reform des mathematischen Unterrichts hat man bisweilen behauptet: die Schule halte mit der wissenschaftlichen Entwickelung nicht gleichen Schritt. Andererseits hat man diesen Vorwurf zurückgewiesen und gesagt: die Schule berücksichtigt auch die neuesten Errungenschaften der Wissenschaft, wenn sie für den Unterricht geeignet sind. Wahrscheinlich haben hier — wie so häufig — beide Teile Recht. Denn tatsächlich sind manche verhältnismäßig neuen Dinge in den Unterricht eingedrungen, Feuerbachscher Kreis, Nichteuklidische Geometrie, Geometrographie usw. Aber perspektive Zeichnungen, die schon Hubert vom Eyck († 1426) kannte, und über die Albrecht Dürer 1525 die „Underweysung der Messung mit Zirkel und Richtscheit" verfaßte, können unsere Schüler gewöhnlich nicht ausführen, und projektive Betrachtungen findet man in Schulbüchern nur spärlich, obwohl dies das wesentlichste Kennzeichen der neueren Geometrie ist, und obwohl Cayley schon 1859 sagte: Projective geometry is all geometry.

Wir haben nämlich als Erbteil Euklids übernommen, daß die Planimetrie als Selbstzweck übermäßig ausgedehnt wird und daß daher für die Raumlehre und das damit zusammenhängende Zeichnen viel zu wenig Zeit übrig bleibt. Wir sind aber keine Helmholtzschen Flächenwesen, sondern wir leben im Raum, daher ist offenbar die Raumlehre die Hauptsache, und die Planimetrie hat nur soweit Berechtigung, als sie uns die notwendigen Hilfssätze liefert. Auch gibt die Euklidische Geometrie, nachdem Kongruenz, Flächeninhalt, Aehnlichkeit und Ausmessung des Kreises besprochen ist, prinzipiell nichts Neues, und wenn wir noch einige Sätze über harmonische Punkte und Transversalen in üblicher, d. h. euklidischer, Weise in den oberen Klassen hinzufügen, dann erhalten die Schüler damit keinen Zuwachs an allgemeiner Bildung. Von den vorhin erwähnten neuen Gegenständen erscheint mir die Nichteuklidische Geometrie zu schwierig, der Feuerbachsche Kreis zu speziell, und die Geometrographie gibt, abgesehen von grundsätzlichen Bedenken, jedenfalls eine sehr starke Belastung des Gedächtnisses. Es entsteht daher die Frage, ob die Behandlung der projektiven Geometrie pädagogisch wertvoller ist. Merkwürdigerweise ist der Gegenstand nach dieser Richtung hin noch wenig durchgearbeitet. Reidt und Simon sowie die neuen, schönen Bücher von Höfler und Lietzmann bringen wenig darüber, und auch die Schulbücher heben die charakteristischen Punkte nicht so deutlich hervor, wie es notwendig wäre.

Zunächst die uneigentlichen Elemente. In der Arithmetik wird mit Recht auf die große Bedeutung einer Begriffserweiterung hingewiesen. Wenn $x^3 = 2$, dann ist x weder eine ganze, noch eine gebrochene Zahl; wir verlangen aber, daß jede Gleichung eine Wurzel hat, wir setzen daher x gleich einer Zahl und zeigen, wie man damit rechnen kann. Diese Begriffsbildung, die der Schüler auch bei negativen, gebrochenen und komplexen Zahlen, beim sinus usw. kennen lernt, fehlt in der Euklidischen Geometrie; es gibt aber kein besseres Beispiel, den Unterschied von Anschauung und reinem Denken hervorzuheben, als die uneigentlichen Elemente. Zwei Gerade schneiden sich in einem Punkte oder gar nicht, wenn sie parallel sind; um aber ausnahmslose Gesetze zu erhalten, schreiben wir auch parallelen Geraden einen (unendlich fernen) Schnittpunkt zu. Im Gegensatz zur Nichteuklidischen Geometrie, die über das Wesen der parallelen Geraden etwas aussagen will, handelt es sich hier nur um eine rein logische Definition. Noch schöner und schärfer zeigt sich der Gegensatz von Anschauung und Logik bei der unendlich fernen Geraden. Wer am Meeresstrand steht, der sieht mit überzeugender Deutlichkeit, wie sich alle unendlich fernen Punkte der Ebene zu einem Kreise, dem Horizont, zusammenschließen. Bei jeder Lage des Auges und bei jeder Lage der Bildebene liefert das Bild des Horizonts aber eine Gerade, wir sind daher gezwungen, logisch von einer unendlich fernen Geraden zu sprechen; und wer auf die Raumtheorie Kants zu sprechen kommen will, findet hier einen geeigneten Ausgangspunkt.

Sodann finden wir in der darstellenden Geometrie eine ganz neue Art von Beweisen. Aus dem Satz, daß das Doppelverhältnis von vier Punkten oder Strahlen bei jeder Projektion ungeändert bleibt, folgt z. B. durch Abbildung eines Parallelogramms: in einem vollständigen Vierseit liegen auf jeder Nebenseite vier harmonische Punkte. Ferner drei gleichlange Strecken parallel zur Bildachse liefern zunächst für drei beliebige parallele Strecken den Satz: die drei äußeren Aehnlichkeitspunkte liegen auf einer Geraden. Damit ist aber auch der Satz für drei Quadrate und drei Kreise bewiesen (Satz des Monge). Aus zwei ähnlichen und ähnlich liegenden Dreiecken erhält man den Satz des Desargues. Wenn bei einem Sehnensechseck zwei Paar Gegenseiten parallel sind, dann ist auch das dritte Paar parallel und die Gegenseiten schneiden sich auf der unendlich fernen Geraden; die Abbildung liefert den Satz des Paskal für alle Kegelschnitte. Dasselbe gilt für Pol und Polare.

Man findet also hier die wichtigsten Sätze wieder, die man sonst durch Menelaos und Ceva zu beweisen pflegt, und es entsteht die Frage, welche Beweise sind für die Schüler geeigneter? Zunächst ist der hier angedeutete Weg einfacher und leichter zu behalten. Sodann deckt die Projektion den inneren Grund für die Beweise auf, denn wenn der Sachverhalt an einem einfachen Fall anschaulich erkannt ist, dann muß bei der Abbildung das Wesentliche erhalten bleiben. Beim Satz des Menelaos ist der Zusammenhang zwischen den Abstandsverhältnissen und der Lage von drei Punkten auf einer Geraden gekünstelt. Man hat zwar die Ueberzeugung, daß der Satz wahr ist, aber man sieht nicht ein, warum es so ist. Endlich ist der projektive Beweis bemerkenswert, weil dabei eine neue Art des Schließens auftritt, die sonst in der Schulmathematik nicht vorkommt, die man fast bezeichnen könnte als Schluß vom Besonderen auf das Allgemeine, und dies ist erkenntnistheoretisch von großer Wichtigkeit. Denn die übliche Art des mathematischen Beweises, die aus bestimmten Voraussetzungen deduktiv neue Sätze ableitet, ist zwar für das System der Mathematik unentbehrlich, aber es ist nicht der Weg, auf dem neue Wahrheiten für gewöhnlich gefunden werden. Bekanntlich sind sehr viele Sätze früher gefunden als die erforderlichen strengen Beweise, und die Forscher, die uns einen Einblick in die Art ihres Schaffens tun ließen, erklärten offen, wie z. B. Helmholtz, daß ihnen „die Lösung von Problemen fast immer durch eine allmählich wachsende Generalisation von günstigen Beispielen, durch eine Reihe glücklicher Einfälle nach mancherlei Irrfahrten gelungen war". Die Induktionsschlüsse, die der Schüler bisher nur in der Physik kennen gelernt hat, und die im späteren Leben ganz unentbehrlich sind, erweisen sich also auch für die Mathematik als wertvoll.

Endlich findet man noch einen eigenartigen Weg zur Ableitung neuer Sätze, nämlich die Dualität, d. h. wenn man in den Lehrsätzen Punkt und Gerade, Pol und Polare, Viereck und Vierseit, Punktreihe und Strahlenbüschel vertauscht, wenn also die Figuren durch andere aus anderen Bestandteilen ersetzt werden, und nur die Art der Verknüpfung dieselbe bleibt.

Nun wird aber häufig der Einwand gemacht: man müsse bei der Euklidischen Geometrie bleiben, denn die projektive Geometrie ist zwar ein Königsweg, aber sie hat für den Schüler, der die räumlichen Verhältnisse nicht hinreichend überschauen kann, keine überzeugende Kraft! Tatsächlich hat auch die Zentralperspektive, trotz vielfacher warmer Empfehlung, nur geringe Verbreitung im Unterricht gefunden. Aber wenn wirklich der Wunsch besteht, die vorhin erwähnten pädagogischen Gesichtspunkte für den Unterricht nutzbar zu machen, dann muß sich auch eine geeignete Darstellung finden lassen. Bisher hat man es wohl dem Anfänger etwas zu schwer gemacht, weil entweder gar keine Anweisung zur Ausführung der Zeichnung zugefügt wurde, oder weil man zu schnell zur allgemeinen Darstellung von Raumfiguren oder ebenen Kollineationen übergeht. Die leichtere Verständlichkeit der Euklidischen Geometrie beruht auf zwei Gründen, erstens arbeitet man wesentlich mit Kongruenzsätzen, d. h. man zeigt von einem Stück nach dem andern, daß es den Forderungen entspricht, und zweitens geht man erst nach sehr zahlreichen Uebungen in der Ebene zum Raum über; auch in der analytischen Geometrie beschränkt man sich anfangs stets auf die Ebene. Ich möchte also auch in der Zentralperspektive zunächst nur den einfachsten Fall behandeln, nämlich die Abbildung einer ebenen Figur auf eine dazu senkrechten Ebene. Denn Grund- und Aufriß, sowie das Herunterklappen des einen auf den anderen ist ohnehin aus der darstellenden Geometrie bekannt, der Schüler kann sich durch leicht herzustellende Papiermodelle jedesmal die räumliche Lage klarmachen, die Abbildung von Punkten und Geraden gestaltet sich besonders einfach und die Beweise für die obigen Sätze werden ebenso leicht verständlich und überzeugend, wie in der Euklidischen Geometrie. Die nähere Ausführung dieser Gedanken ist in der Aufgabensammlung des Verfassers enthalten (Leipzig 1910, B. G. Teubner, 2. Aufl.).

Noch ein anderes Mittel kann dazu beitragen, der projektiven Geometrie einen festen Platz im Unterricht zuzuweisen, nämlich die Verbindung mit der Arithmetik. Die Konzentration, die Schaffung einer neuen Beziehung zwischen Geometrie und Arithmetik muß für beide Teile fruchtbringend sein. Wir erhalten damit für die Rechnung einfache und naturgemäße Uebungsbeispiele und andererseits können etwaige Mängel der Zeichnung durch die Rechnung geprüft und beseitigt werden. Dazu ist nur ein neuer Begriff erforderlich, der sich aber ohne jede Schwierigkeit einführen läßt, nämlich die Koordinaten-Transformation. Allgemein bekannt ist ja, daß man die Figuren festhalten und das Achsenkreuz verschieben kann. F. Klein macht aber besonders darauf aufmerksam, daß es viel fruchtbarer ist, die Achsen festzuhalten und den Punkt $P\,(x\,y)$ durch die Transformation

$$x' = ax + by + c$$
$$y' = dx + ey + b$$

nach $P'\,(x'\,y')$ zu bringen. Besonders anschaulich wird das Wesen der Transformation, wenn man sich nicht auf einen Punkt beschränkt, sondern wenn man vier Punkte, die auf einer Geraden liegen oder die die Ecken eines Quadrats bilden, gleichzeitig transformiert. So liefert z. B.

$x' = x + 3,\quad y' = y - 1$ eine Verschiebung,
$x' = 3x,\quad y' = 2y$ eine Streckung,
$x' = 3x + 2,\quad y' = 3y + 1$ eine ähnliche Figur,
$x' = x \cos\varphi - y \sin\varphi,\quad y' = x \sin\varphi + y \cos\varphi$ eine Drehung um φ.

Die allgemeine affine Transformation liefert jede Parallelprojektion, und eine gebrochene Transformation die Zentralperspektive. Auch hier ist die nähere Ausführung in der oben erwähnten Aufgabensammlung, S. 87—88, enthalten.

Mein Vorschlag geht also dahin, von Obersekunda an die Planimetrie nicht mehr als Selbstzweck zu betreiben, sondern sie durch Perspektive und darstellende Geometrie zu ersetzen. Wir erhalten dann ebenso schöne Konstruktionsaufgaben wie gegenwärtig, aber die logische Durchbildung wird vielseitiger; dabei werden die Beweise einfacher und dringen mehr in das Wesen der Sache ein. Endlich werden die Schüler zu etwas genaueren Zeichnungen gezwungen, sie erhalten also mehr Handfertigkeit und vor allem mehr Raumanschauung.

Die geometrische Bedeutung der Ausdrücke

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 \text{ und}$$

$$\varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1.$$

Von W. Rottsieper (Göttingen).

Die in der Ueberschrift genannten Ausdrücke $\varphi(x, y)$ und $\varphi(x, y, z)$ kommen in manchen Rechnungen vor, die sich auf die Ellipse und das Ellipsoid in normaler Lage beziehen, z. B. in dem Integral, welches das Potential eines Punktes bezogen auf das homogene Ellipsoid angibt. Es liegt nahe, eine bestimmte geometrische Bedeutung dieser Ausdrücke zu vermuten.

Zu jedem Punkte $\{x \,|\, y$ der Ebene gehört ein bestimmter Wert $\varphi(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1$ und zu jedem Raumpunkte $\{x \,|\, y \,|\, z$ ein bestimmter Wert $\varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1$. Es ist von vornherein wahrscheinlich, daß dieser Wert in gewisser Beziehung zu der Kurve $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ bezw. zu der Fläche $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ steht, längs deren $\varphi(x, y) = 0$ bezw. $\varphi(x, y, z) = 0$ ist, also zu der Ellipse und dem Ellipsoid. Im Innern dieser Gebilde ist φ negativ, denn z. B. für den Nullpunkt erhalten wir $\varphi = -1$; außen ist φ positiv.

Aehnliches finden wir schon bei der Deutung des einfachen Ausdruckes $d(x, y) = x \cos\alpha + y \sin\alpha - p$ (bezw. im Raume $d(x, y, z) = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p$, unter der Voraussetzung, daß $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ist); hierin bedeutet bekanntlich $d(x, y) = 0$ die Gleichung einer Geraden, deren Entfernung vom Ursprung p ist, und bei der dies Lot mit den Achsen die Winkel α und $\beta = 90^0 - \alpha$ bildet. (Entsprechendes gilt für die Ebene $d(x, y, z) = 0$). Die xy-Ebene wird durch die Gerade in zwei Teile geteilt. Die Größe d wird nun für den Ebenenteil auf der Seite des Ursprungs negativ, für den Ursprung selbst $-p$, für die andere Seite positiv. Der Betrag von d ist der senkrechte Abstand des Punktes $\{x \,|\, y$ von der Geraden $\{p \,|\, \alpha$ (entsprechend im Raume). Der Abstand der Punkte in der Geraden (oder Ebene) ist natürlich 0. (Fig. 1).

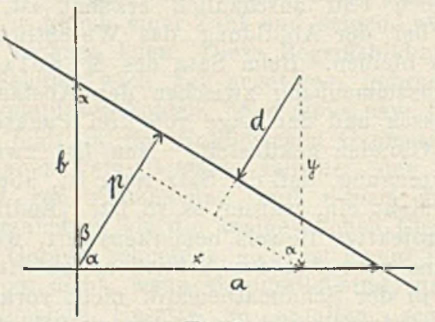


Fig. 1.

Zu einer ähnlichen Deutung kommt man bei der Betrachtung von

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = \delta(x, y) \text{ und } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = \delta(x, y, z).$$

$\delta(x, y) = 0$ ist die Gleichung einer Geraden mit den Achsenabschnitten a und b. δ wird wie d positiv und negativ. δ hat die Dimension 0; um δ durch Strecken deuten zu können, multiplizieren wir es mit p[1]), dem Abstande des Ursprungs von der Geraden. Es wird dann

$$\delta \cdot p = \frac{p}{a} x + \frac{p}{b} y - p = \cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y - p = d,$$

also $\delta = \frac{d}{p}$. $\delta(x, y)$ ist mithin der durch p gemessene Abstand des Punktes $\{x \,|\, y$ von der Geraden $\{a \,|\, b$. Ebenso ist im Raume $\delta(x, y, z)$ der durch p gemessene Abstand des Punktes $\{x \,|\, y \,|\, z$ von der Ebene $\{a \,|\, b \,|\, c$ mit der Gleichung $\delta(x, y, z) = 0$.

Um nun die ganz ähnlichen Ausdrücke $\varphi(x, y)$ und $\varphi(x, y, z)$ zu deuten, wollen wir zunächst einmal zusehen, was beim Kreise $\{a = b = r$ um den Ursprung hierfür herauskommt. Es ist dort

$\varphi(x, y) = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 - 1$, also $r^2 \cdot \varphi = x^2 + y^2 - r^2$.

Liegt $P \{x \,|\, y$ außerhalb des Kreises, so ist $x^2 + y^2 = z^2$ und $r^2 \cdot \varphi = z^2 - r^2 = t^2 = P$, der Potenz des Punktes zum Kreise. $\varphi = \frac{P}{r^2}$, also die durch r^2 gemessene Potenz. Für einen inneren Punkt ergibt sich analog das negative Quadrat der Abschnitte einer Sehne, die auf dem durch $P \{x \,|\, y$ gezogenen Durchmesser in P senkrecht steht.

Wenn wir nun den Ausdruck φ auf die Ellipse anwenden, so liegt der Gedanke nahe, φ als allgemeine Potenz zu bezeichnen. Eine derartige Verallgemeinerung hat aber nur dann einen Sinn, wenn das bislang

---

[1]) Es ist nach der Figur 1: $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2$

$$\therefore \frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Im Raume ergibt sich analog für den Abstand p des Ursprungs von der Ebene $\{a \,|\, b \,|\, c$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

mit dem Ausdruck Bezeichnete als Sonderfall herauskommt, und außerdem die Einführung einer besonderen Bezeichnung durch das Bestehen einer bezeichnenswerten Invarianz gegenüber geometrischen Aenderungen begründet ist.

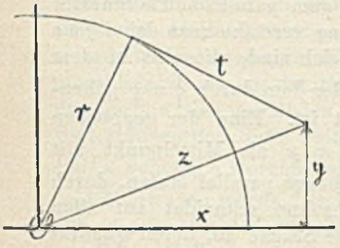


Fig. 2.

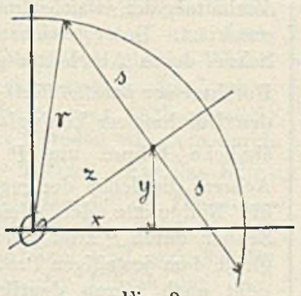


Fig. 3.

Bei dem Kreise bestand diese Invarianz in dem konstanten Produkt der Sehnen- bezw. Sekantenabschnitte. Diese Größe wollen wir nun bei der Ellipse berechnen. Wir müssen bei der Verallgemeinerung aber noch beachten, daß die herkömmliche Potenz von der zweiten Dimension ist; φ hat dagegen die Dimension 0.

Wir schneiden die Ellipse $(E)\left(\frac{\xi}{a}\right)^2+\left(\frac{\eta}{b}\right)^2=1$ mit der Geraden $(G)\,\eta-y=C(\xi-x)$, die durch $\{x\,|\,y$ geht und mit der positiven x-Achse den Winkel α bildet, so daß $\operatorname{tg}\alpha=C$ ist. Für die beiden Schnittpunkte $\{\xi_1\,|\,\eta_1$ und $\{\xi_2\,|\,\eta_2$ gelten dann die Gleichungen

$$\frac{\eta_1-y}{\xi_1-x}=C=\frac{\eta_2-y}{\xi_2-x}$$

und

$$\frac{\xi_1^2}{a^2}+\frac{\eta_1^2}{b^2}=1=\frac{\xi_2^2}{a^2}+\frac{\eta_2^2}{b^2}.$$

Ferner ist, ganz gleichgültig, ob $\{x\,|\,y$ außerhalb oder innerhalb der Ellipse liegt, für die Sekanten- oder Sehnenabschnitte

$$s_1^2=(\xi_1-x)^2+(\eta_1-y)^2=(1+C^2)(\xi_1-x)^2$$
$$s_2^2=(\xi_2-x)^2+(\eta_2-y)^2=(1+C^2)(\xi_2-x)^2$$

$$s_1^2s_2^2=(1+C^2)^2(\xi_1-x)^2(\xi_2-x)^2$$
$$s_1s_2=\pm(1+C^2)(\xi_1-x)(\xi_2-x)$$
$$=\pm(1+C^2)\left[\xi_1\xi_2-x(\xi_1+\xi_2)+x^2\right].$$

ξ_1 und ξ_2 ergeben sich nun durch Verbindung der Gleichungen (E) und (G), indem man η aus (G) in (E) einsetzt. Man erhält dann nach dem Ordnen nach Potenzen von ξ

$$\xi^2-2\xi\frac{C(Cx-y)}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+C^2}+\frac{(Cx-y)^2-b^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+C^2}=0.$$

Es muß also sein

$$\xi_1+\xi_2=2\frac{C(Cx-y)}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+C^2}\quad\text{und}\quad\xi_1\xi_2=\frac{(Cx-y)^2-b^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+C^2}.$$

Dann ergibt sich für

$$s_1s_2=\pm(1+C^2)\left[\frac{(Cx-y)^2-b^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+C^2}-2x\frac{C(Cx-y)}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+C^2}+x^2\right]$$
$$=\pm(1+C^2)\frac{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2}{a^2C^2+b^2}$$
$$=\pm\frac{1+C^2}{\frac{C^2}{b^2}+\frac{1}{a^2}}\cdot\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-1\right)$$
$$=\pm\frac{1+C^2}{\frac{C^2}{b^2}+\frac{1}{a^2}}\cdot\varphi=\pm F\cdot\varphi.$$

Ehe wir den Faktor F, der immer positiv ist, deuten, wollen wir über das Vorzeichen verfügen. Bisher nahm man nun gewöhnlich das Produkt der Sehnenabschnitte für einen Innenpunkt negativ und das Produkt der Sekantenabschnitte für einen Außenpunkt positiv. Das ist geschichtlich so geworden. Wenn ich mich aber für das umgekehrte Vorzeichen entscheide, so hat das folgenden Grund:

Der natürliche Ausgangspunkt für eine derartige Festsetzung bildet die Teilung einer positiven Strecke AB durch einen zwischen A und B gelegenen Teilpunkt C. Wenn hier das Ganze gleich der Summe seiner Teile sein soll und außerdem gleichgerichtete Strecken nach den Regeln der Vektor-Analysis, der Rechnung mit gerichteten Strecken, dasselbe Vorzeichen haben müssen, so muß man setzen $AB=AC+CB\cdot(CA+CB$, wie man die Teile einer in C geteilten Sehne AB bisher las, geben nicht als Summe AB, wenn man diese Regel der Vektor-Analysis beachtet). AC und CB sind beide positiv, da sie mit AB gleichgerichtet sind, also ist auch ihr Produkt (oder die Potenz) und ihr Quotient (oder ihr Teilverhältnis) positiv.

Um einen einheitlichen Ausdruck für die Verhältnisse im Innern und im Aeußeren zu gewinnen, muß man die Sekante AC' als eine in C' außen geteilte Sehne AB auffassen. Es ist dann analog zur inneren Teilung $AB=AC'+C'B$, worin der zweite Teil $C'B=-BC'$, also negativ ist. Das Produkt der Teile (oder die Potenz) und ihr Quotient (oder ihr Teilverhältnis) muß dann negativ sein. (Eine derartige Festsetzung über das Vorzeichen des Teilverhältnis findet sich in Kambly-Thaer III B, S. 32.)

Da der Faktor F immer positiv und φ im Innern negativ ist, $s_1\cdot s_2$ dort aber positiv sein soll, so muß man $s_1\cdot s_2=-F\cdot\varphi$ setzen. Dasselbe Vorzeichen erheischt ein äußerer Punkt. Mithin ist allgemein $s_1\cdot s_2=-F\cdot\varphi$. Es ist belehrend, zu sehen, daß im Falle eines äußeren Punktes das Produkt der Sehnenabschnitte immer reell wird, auch wenn sich Sekante und Ellipse nicht schneiden und die Abschnitte bis zu den komplexen Schnittpunkten gerechnet werden.

Die Deutung des nur von der Richtung abhängigen Faktors F ergibt sich leicht aus einem besonderen Falle. Für jeden Punkt des parallelen Durchmessers erhält man denselben Wert F, also auch für den Mittelpunkt der Ellipse. Nennt man den parallelen Halbmesser r, so ist für den Mittelpunkt

$$s_1\cdot s_2=r^2=-F\cdot-1,$$

also ist $F=r^2$ und allgemein

$$s_1\cdot s_2=-r^2\cdot\varphi\ \text{oder}\ \varphi=-\frac{s_1\cdot s_2}{r^2}.$$

Diese Formel ist der Kreisformel durchaus analog. Es ist also $\varphi=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-1$ das negative durch das Quadrat des parallelen Halbmessers gemessene Produkt der Sehnen- bezw. Sekantenabschnitte durch den Punkt $\{x\,|\,y$ an die Ellipse $\varphi=0$. Man kann also φ als allgemeine Potenz (numerische oder bezogene Potenz) auffassen.

Die Größe von F läßt sich auch leicht unmittelbar ausrechnen. Zieht man den zur Sehne parallelen Durchmesser, so schneidet der die Ellipse in einem Punkte $\{\xi\,|\,\eta$. Es ist dann

$$C = \frac{\eta}{\xi}, \text{ also } F = \frac{1 + \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2}{\frac{1}{a^2} + \left(\frac{\eta}{b\xi}\right)^2} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b}\right)^2} = \frac{r^2}{1}.$$

Man kann F auch auf andere Weise deuten. Wenn $\left\{ \xi_1 \mid \eta_1 \right.$ ein Punkt der Ellipse ist, so ist

$$\left(\frac{\xi_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{b}\right)^2 = 1;$$

dann kann man $\frac{\xi_1}{a} = \cos\gamma$ und $\frac{\eta_1}{b} = \sin\gamma$ setzen, wo γ die zum Punkte $\left\{ \xi_1 \mid \eta_1 \right.$ gehörige exzentrische Anomalie ist oder der zugehörige Konstruktionswinkel. Die Tangente in $\left\{ \xi_1, \eta_1 \right.$ hat die Gleichung

$$\frac{\xi\xi_1}{a^2} + \frac{\eta\eta_1}{b^2} = 1 = \frac{\xi\cos\gamma}{a} + \frac{\eta\sin\gamma}{b} = \frac{\xi}{a/_{\cos\gamma}} + \frac{\eta}{b/_{\sin\gamma}}.$$

Der Abstand p dieser Geraden vom Nullpunkte ist dann [1]) zu berechnen aus

$$\frac{1}{p_\gamma^{\,2}} = \frac{1}{a^2/_{\cos^2\gamma}} + \frac{1}{b^2/_{\sin^2\gamma}} = \frac{\cos^2\gamma}{a^2} + \frac{\sin^2\gamma}{b^2}.$$

Es ist nun

$$F = \frac{1 + C^2}{\frac{1}{a^2} + \frac{C^2}{b^2}} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{\frac{1}{a^2} + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{b^2}} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}} = p_\alpha^{\,2}.$$

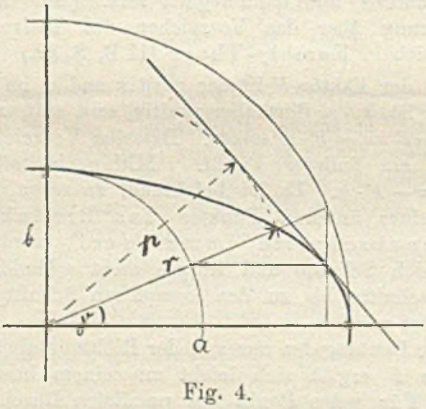


Fig. 4.

F stellt also auch das Quadrat des Abstandes derjenigen Tangente vom Nullpunkte dar, die man in dem zum Konstruktionswinkel α gehörigen Punkte an die Ellipse legt.

Daß der Ausdruck $\frac{s_1 s_2}{r^2}$ konstant ist, lehrt übrigens auch eine kurze geometrische Ueberlegung. Wenn man einen Kreis durch parallele Strahlen auf eine geneigte Ebene projiziert, so erhält man im allgemeinen eine Ellipse; eine Kreissehne s', durch P' in zwei Abschnitte s_1' und s_2' geteilt, und ein dazu paralleler Halbmesser r' des Kreises bilden sich ab als Ellipsensehne s, durch einen Punkt P in die Abschnitte s_1 und s_2 geteilt, und ein ebenfalls zu ihr paralleler Ellipsenhalbmesser r. Wegen des Gleichlaufs der Projektionsstrahlen und der dadurch ermöglichten Herstellung ähnlicher Dreiecke ist $\frac{s_1'}{s_1} = \frac{r'}{r}$ und ebenso $\frac{s_2'}{s_2} = \frac{r'}{r}$, also $\frac{s_1' s_2'}{s_1 s_2} = \frac{r^{2\prime}}{r^2}$ oder $\frac{s_1 s_2}{r^2} = \frac{s_1' s_2'}{r^{2\prime}}$. Da für jede andere Kreissehne durch P' sowohl das Produkt der Abschnitte als auch r^2 denselben Wert hat, so ist auch in der Ellipse $\frac{s_1 s_2}{r^2}$ konstant. Der Proportionalitätsfaktor φ ergibt sich geometrisch, wenn man für einen äußeren Punkt das Verhältnis der Tangente und für einen inneren Punkt das Verhältnis der Gleichsehne zum parallelen Halbmesser quadriert. Unter Gleichsehne verstehe man dabei jene Sehne, deren Abschnitte gleich sind, die also zu dem Durchmesser parallel läuft, der dem durch $\left\{ x \mid y \right.$ gehenden Durchmesser konjugiert ist. Eine der gegebenen ähnliche Ellipse um $P \left\{ x \mid y \right.$ als Mittelpunkt mit Achsen, die denen der gegebenen parallel laufen, durch die Endpunkte der Gleichsehne schneidet auf allen Sehnen durch P zwei gleiche Stücke ab, deren Quadrat gleich dem jeweiligen Produkt der Abschnitte ist. Man sieht auch hieran deutlich, daß der Höchst- bezw. Mindestwert des Abschnittsproduktes auf Sehnen parallel zur großen bezw. kleinen Achse erreicht wird.

φ ist konstant auf Ellipsen, die zu der gegebenen ähnlich sind und ähnlich liegen, aus ihr also durch Aehnlichkeitstransformation hervorgehen, denn

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = k$$

stellt eine Ellipse dar mit den Halbmessern $a\sqrt{1+k}$ und $b\sqrt{1+k}$. Die von Punkten dieser ähnlichen Ellipsen an die Grundellipse gelegten Tangenten sind also proportional den parallelen Halbmessern dieser Ellipse. Die ähnliche Ellipse, die dem Rechteck der Tangenten an den vier Scheiteln der Grundellipse umbeschrieben ist, hat die besondere Eigenschaft, daß die von ihren Punkten an die Grundellipse gelegten Tangenten den parallelen Halbmessern gleich sind, denn

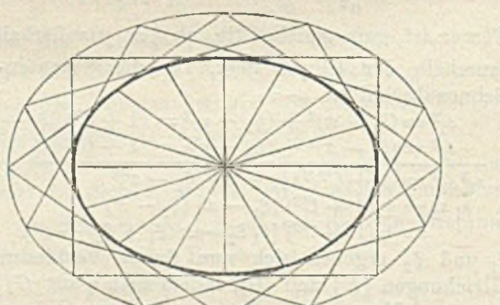


Fig. 5.

die Potenz ihrer Punkte ist

$$\varphi(a, b) = \left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{b}\right)^2 - 1 = 1\;^{2)}.$$

Ferner ergibt sich, daß die Ecken aller jener, der Grundellipse umbeschriebenen Parallelogramme, deren Seiten konjugierten Durchmessern parallel sind, auf dieser Ellipse $\varphi(x, y) = 1$ gelegen sind (Fig. 5). Diese Sätze können auch umgekehrt zur zeichnerischen Herstellung ähnlicher Ellipsen verwandt werden. — Analoge Sätze gelten auch für das Innere der Ellipse. Eine äußere konzentrische Ellipse schneidet nämlich auf den Tangenten an die Grundellipse gleiche Stücke ab, denn beide Stücke sind proportional zwei gleichen Halbmessern. Betrachtet man eine solche äußere konzentrische Ellipse als Grundellipse und diese als innere konzentrische, so kann man sagen, daß alle den Halbmessern einer Ellipse parallelen und proportionalen

[2]) $a' = a\sqrt{2}$, $b' = b\sqrt{2}$.

Sehnen eine ähnliche Ellipse einhüllen, und zwar sind die Mitten der Sehnen die Berührungspunkte.

All diese Sätze können ohne weiteres auf das Ellipsoid verallgemeinert werden, so z. B. der folgende auch hergehörige Satz: Da die beiden von einem äußeren Punkte an die Ellipse gelegten Tangenten den parallelen Halbmessern proportional sind und beide Geradenpaare wegen ihres Gleichlaufs gleiche Winkel einschließen, so ist die Berührungssehne der Verbindungssehne der parallelen Halbmesser auch parallel; weiterhin werden diese beiden Geraden von dem durch $\{ x \mid y$ gehenden Durchmesser halbiert. Auf das Ellipsoid übertragen würde dies bedeuten, daß die Tangenten von einem Punkte außerhalb an das Ellipsoid den parallelen Halbmessern proportional sind und daß die Ellipse der Berührungspunkte der Ellipse der Endpunkte der Halbmesser parallel und ähnlich ist und die Sekante durch den Mittelpunkt die Achse der beiden Kegel ist.

Da das Produkt P der beiden Sehnen- oder Sekantenabschnitte, $P = -r^2 \varphi$, von zwei Faktoren abhängt, so kann eine vollständige Invarianz nur für vollständige Uebereinstimmung von r und φ bestehen, also für alle parallelen Sekanten oder Sehnen, die von Punkten konzentrischer Ellipsen (bezw. Ellipsoide) ausgehen. Vollständige Invarianz bekommt man aber auch beim Vergleich je zweier Produkte, $\frac{P_1}{P_2}$, die erstens zu allen paarweise parallelen Sekanten oder Sehen gehören, welche von je einem Punkte derselben beiden konzentrischen Ellipsen ausgehen, die zweitens zu allen Sekanten- oder Sehnenpaaren gehören, die von zwei Punkten derselben konzentrischen Ellipse ausgehen und zwei festen Richtungen parallel sind. Insbesondere bekommt man konstantes Produktverhältnis für alle parallelen Sekanten- oder Sehnenpaare, die von zwei festen Punkten aus an die Ellipse gezogen werden

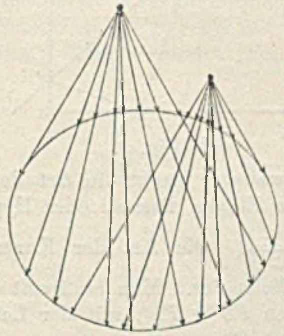


Fig. 6.

(Newton), und für alle Sekanten- oder Sehnenpaare, die von beliebigen Punkten aus parallel zu zwei festen Richtungen gezogen werden.

Für die Hyperbel ergibt sich ganz ähnlich

$$s_1 s_2 = \pm \frac{1 + C^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{C^2}{b^2}} \left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 \right]$$

und, wenn wir den zur Sehne parallelen Halbmesser wieder r nennen und $\varphi = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1$ setzen,

$$s_1 s_2 = -r^2 \cdot \varphi.$$

Hier tritt aber noch hinzu, daß $\varphi = -1$ nicht nur für den Nullpunkt, sondern für beide Asymptoten. Daraus ergeben sich eine ganze Reihe von interessanten Sätzen, vor allem für die gleichseitige Hyperbel, das Bild eines Kreises mit imaginären Ordinaten. Diese Sätze lassen sich dann sinnentsprechend auf die Flächen zweiten Grades mit Hyperbelschnitten übertragen.

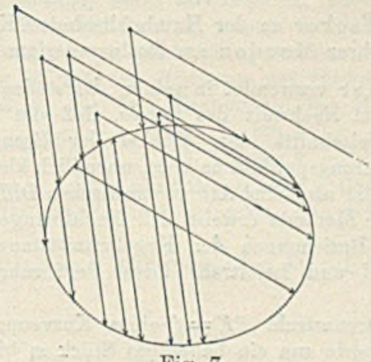


Fig. 7.

Für die Parabel $\frac{2 p \xi}{\eta^2} - 1 = 0$ ergibt sich (der Vollständigkeit wegen) noch

$$s_1 \cdot s_2 = \mp \frac{1 + C^2}{C^2} \cdot y^2 \left(\frac{2 p x}{y^2} - 1 \right),$$

und wenn man diesmal unter r die Entfernung des Punktes $P \{ x \mid y$ von der Hauptachse, auf der Sehne gemessen, versteht und $\varphi = \frac{2 p x}{y^2} - 1$ setzt, so ist wieder

$$s_1 \cdot s_2 = + r^2 \cdot \varphi.$$

Mit Hilfe der Größe φ kann man den anfangs erwähnten Ausdruck für das Potential eines Punktes $P \{ x \mid y \mid z$ bezogen auf ein Ellipsoid $\{ a \mid b \mid c$ um den Nullpunkt und von der gleichmäßigen Dichte δ geometrisch deuten und einfacher schreiben. Es ist nach Dirichlet z. B. für einen Außenpunkt das Potential V

$$V = -\pi \delta \int_{U_0}^{\infty} \frac{\frac{x^2}{a^2 + U} + \frac{y^2}{b^2 + U} + \frac{z^2}{c^2 + U} - 1}{\sqrt{\left(1 + \frac{U}{a^2}\right)\left(1 + \frac{U}{b_2}\right)\left(1 + \frac{U}{c^2}\right)}} \, d U.$$

Hierin bedeutet der Zähler des Integranden die Potenz φ des Punktes P bezogen auf das zum gegebenen konfokale Ellipsoid mit den Achsen

$$a' = \sqrt{a^2 + U}, \quad b' = \sqrt{b^2 + U}, \quad c' = \sqrt{c^2 + U}$$

und der Nenner v das Volumenverhältnis dieses Ellipsoids zu dem gegebenen. Die Grenzen zeigen an, daß die Integration über alle äußeren konfokalen Ellipsoide zu erstrecken ist, ausgehend von dem durch P gehenden. Es ist also kurz und behaltlicher

$$V = -\pi \delta \int \frac{\varphi}{v} \, d U$$

mit den erwähnten Grenzen.

Soweit es dem Verfasser bekannt geworden ist, hat Faure in Nouv. Ann. 1866, Paris, für

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1$$

den Namen „indice" vorgeschlagen und ist von Neuberg in Nouv. Ann. 1870 die Theorie dieser Größen näher ausgebaut und auf Geraden und Ebenen erweitert worden, in etwas anderer Weise, wie dies oben, davon unabhängig, geschehen ist.

Tangenten- und Achsenkonstruktionen für Ellipse und Hyperbel mit Hilfe von Brennpunkt und Leitgerade.

Von
Prof. M. Wacker an der Humboldtschule (Karlsruhe) und Oberlehrer Moudon am Realgymnasium (Kassel).

Wiener verwendet in seiner „Darstellenden Geometrie" zum Nachweis des Satzes, daß die Tangente eines Kegelschnitts den Winkel der Brennstrahlen ihres Berührungspunktes halbiert, unendlich kleine Dreiecke, benutzt also eine Art geometrischen Differentials. Die gleiche Methode erweist sich fruchtbringend, wenn man die Beziehungen der Kegelschnittstangente zu Brennstrahl und Leitstrahl ihres Berührungspunktes untersucht.

Der Brennstrahl $PF = f$ eines Kurvenpunktes P (Fig. 1) werde um ein beliebiges Stück m bis V, der

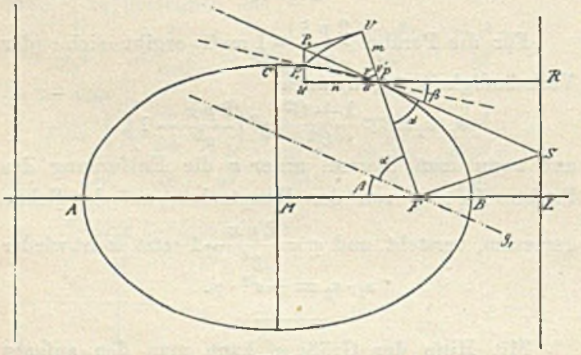


Fig. 1.

Leitstrahl $PR = l$ um ein Stück n, dessen Größe noch bestimmt werden soll, bis U verlängert. Schlägt man nun um F mit FV den Kreisbogen und zieht durch U die Parallele zu der Leitgeraden RL, so wird die Länge von n so gewählt werden können, daß Parallele und Kreisbogen sich in einem Kurvenpunkt P_1 schneiden. Für P_1 ist der Brennstrahl $f+m$, der Leitstrahl $l+n$, es muß demnach

$$\frac{f+m}{l+n} = \frac{f}{l}$$

also
$$\frac{f+m}{f} = \frac{l+n}{l};$$

daraus folgt:
$$\frac{m}{n} = \frac{f}{l}.$$

Dadurch ist die Größe von n eindeutig bestimmt; d. h. n muß, falls ein Kurvenpunkt erhalten werden soll, nach obiger Gleichung konstruiert werden.

Die Verbindungslinie PP_1 ist eine Sekante. Wählt man nun m (und damit n) unendlich klein, so rückt P_1 nach P, und die Verbindungslinie wird Tangente. Der unendlich kleine Kreisbogen $P'V'$ kann als Senkrechte zu $V'F$ betrachtet werden, deshalb geht $P'V'P$ in ein rechtwinkliges Dreieck über, das mit dem Dreieck $P'U'P'$ als gemeinsame Hypotenuse die Tangente in P hat. Errichtet man nun in V zu VF die Senkrechte, die UP_1 in P_2 schneidet, so ergeben sich zwei rechtwinklige Dreiecke, die zu den oben erwähnten unendlich kleinen Dreiecken perspektiv ähnlich sind in bezug auf P als Aehnlichkeitszentrum. P_2 liegt demnach auf der Tangente. D. h.:

Verlängert (oder verkürzt) man Brennstrahl und Leitstrahl eines Kurvenpunktes um Strecken, die im selben Verhältnis stehen wie die Strahlen, und errichtet im Endpunkt die Senkrechten, so schneiden sich diese auf der Tangente des Kurvenpunktes.

Wählt man als Strecke, um die man den Brennstrahl verkürzt, den Brennstrahl selbst, so muß man den Leitstrahl ebenfalls um sich selbst verkürzen. Die Senkrechten sind dann in F und R zu errichten und schneiden sich in S auf der Tangente. Daraus folgt die bekannte Beziehung:

Errichtet man im Brenupunkt auf dem Brennstrahl eines Kurvenpunktes die Senkrechte, so schneidet sie sich mit der Leitgeraden auf der Tangente des Kurvenpunktes.

Bezeichnet man den Winkel der Tangente mit dem Brennstrahl ihres Berührungspunktes mit α, den mit dem Leitstrahl mit β, so ist:

$$\cos\alpha = \frac{f}{PS}$$
$$\cos\beta = \frac{l}{PS}$$
$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{f}{l}.$$

Die Tangente teilt den Winkel zwischen Brennstrahl und Leitstrahl ihres Berührungspunktes derart, daß der Quotient der cos der Teilwinkel konstant gleich der num. Exzentrizität ist.

Da bei der Parabel $f = l$, also $\alpha = \beta$ ist, so ergeben die oben abgeleiteten Beziehungen nichts Neues für die Parabel; für Ellipse und Hyperbel dagegen ergeben sich Tangenten- und Achsenkonstruktionen z. T. sehr einfacher Natur.

A) Tangentenkonstruktionen (W).

1. Tangente in einem Kurvenpunkt.

Ist Brennpunkt und Leitlinie gegeben (Fig. 2), so

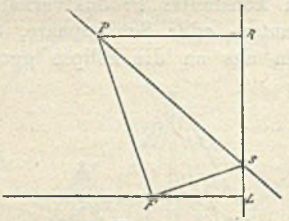


Fig. 2.

bestimmt ein weiterer Punkt die Art der Kurve, und zwar liegt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel vor, je nachdem $\frac{PF}{PR} \lesseqgtr 1$. Die Art der Kurve ist für die Konstruktion belanglos. Man bestimmt den Schnitt S der Senkrechten $FS (\perp PF)$ mit der Leitgeraden und verbindet S mit P.

Ist bei gegebenem Brennpunkt und Leitlinie noch die Exzentrizität gegeben, so kann der Kurvenpunkt nicht beliebig angenommen werden, sondern es muß bei (in gewissen Grenzen bei der Ellipse) beliebig anzunehmendem Abstand von der Leitlinie der Brennpunktsabstand gefunden werden und umgekehrt. Ist der Punkt bestimmt, so verläuft die Konstruktion wie oben.

Die Grenzen, innerhalb deren der Brennpunktsabstand für die Ellipse zu wählen ist, ergeben sich aus folgender Ueberlegung.

Setzt man (Fig. 1) $FL = d$ und die num. Exzentrizität gleich E, so erhält man leicht, da

$$\frac{AF}{AL} = \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{BF}{BL} = \varepsilon$$

die Beziehungen

$$BF=\frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon} \quad \text{und} \quad AF=\frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon}.$$

Es muß demnach der Brennpunktsabstand so gewählt werden, daß

$$\frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon} \geqq f \geqq \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}.$$

2. Tangente von einem Punkt außerhalb.

Analysis: Da nur Leitgerade und Brennpunkt, aber kein Kurvenpunkt gegeben ist, muß die Art der Kurve durch die num. Exzentrizität gegeben sein, am einfachsten durch den Quotienten zweier gegebenen Strecken p und q. Ist P (Fig. 3) ein Punkt der Tangente PP_1, so ist

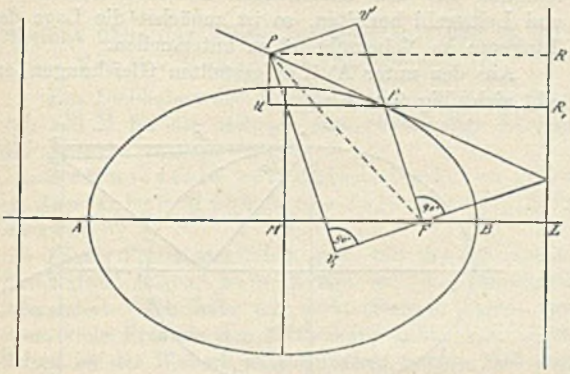


Fig. 3.

$$\frac{FV}{UR_1}=\frac{p}{q}$$

und da $PV_1 = VF$ und $UR_1 = PR$,

auch

$$\frac{PV_1}{PR}=\frac{p}{q}.$$

Da PR bekannt ist, kann PV_1 gefunden werden. Nun kann das rechtwinklige Dreieck PFV_1 konstruiert und damit der Punkt S gefunden werden. Damit ist die Tangente PS bestimmt. Der Berührungspunkt P_1 ergibt sich als Schnitt von $VF \perp FS$ mit der Tangente.

Konstruktion: Man verbindet (Fig. 4) P mit F,

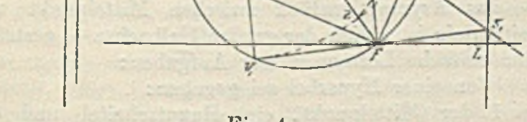


Fig. 4.

schlägt um den Mittelpunkt M mit PF den Kreis durch P und fällt das Lot PR. Nun bestimmt man PZ aus

$$\frac{PZ}{PR}=\frac{p}{q}$$

und trägt PZ von P aus in den Kreis ein bis V_1 und V_2. V_1F schneidet die Leitgerade in S_1, V_2F in S_2. Dann sind PS_1 und PS_2 die gesuchten Tangenten. $FP_1 \perp FS_1$ und $FP_2 \perp FS_2$ ergeben mit den Tangenten die Berührungspunkte.

3. Tangenten parallel einer Geraden.

Analysis: Es seien wiederum nur Brennpunkt und Leitgerade gegeben, die Art der Kurve aber durch die num. Exzentrizität bestimmt. Da für die Tangenten nur die Richtung, nicht die Lage der gegebenen Geraden in Betracht kommt, kann die Gerade durch den gegebenen Brennpunkt gelegt werden. Sie bildet dann (Fig. 1) mit der Richtung der Hauptachse den Teilwinkel β, mit dem Brennstrahl des Berührungspunktes den Winkel α. Da nun $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{p}{q}$, so kann bei bekanntem β auch α gefunden werden. Dadurch wird aber wieder der Punkt S gefunden, der die Tangente bestimmt.

Konstruktion: Man trägt (Fig. 5) auf der Hauptachse von F aus q ab bis O, errichtet $OU \perp OF$ und schlägt über UF als Durchmesser den Kreis. Der Kreis um F mit p ergibt die Punkte V_1 und V_2. Zieht man nun $FS_1 \perp V_1F$ und $FS_2 \perp FV_2$, so sind die gesuchten Tangenten die Parallelen durch S_1 und S_2 zu der gegebenen Geraden G_1. Die Berührungspunkte P_1 und P_2 ergeben sich als Schnitt von FV_1 und FV_2 (bezw. ihrer Verlängerungen) mit den gefundenen Tangenten.

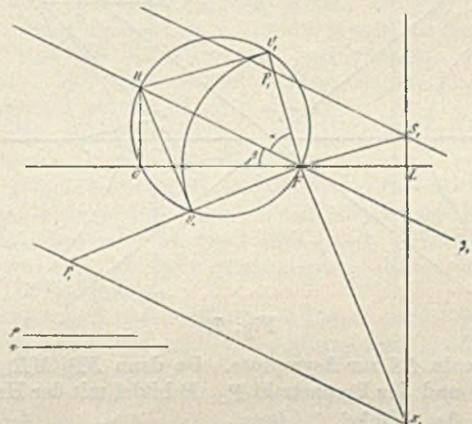


Fig. 5.

B) Achsenkonstruktionen (M).

1. Achsenkonstruktion der Ellipse.

Rückt P (Fig. 1) nach dem Nebenscheitel C, so wird $\beta=0$, da die Tangente parallel der Hauptachse läuft. Der Brennstrahl von C bildet also mit der Hauptachse den Winkel α. Da

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{p}{q},$$

so ist für $\beta = 0$

$$\cos\alpha=\frac{p}{q}$$

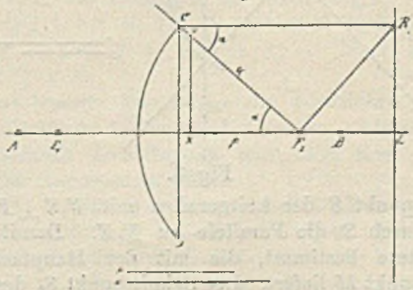


Fig. 6.

kann also gefunden werden. Ist Brennpunkt, Leitgerade und num. Exzentrizität $\left(=\frac{p}{q}\right)$ gegeben, so konstruiert man das rechtwinklige Dreieck PXY (Fig. 6) aus p und q, bestimmt den Schnittpunkt R der Leitgeraden mit $FR \perp FY$ und zieht $RC \parallel FX$. So ergibt sich der Nebenscheitel C. Das Lot von C auf FX ergibt als Schnitt mit dem Kreis um F mit FC den zweiten Nebenscheitel D. Da CF die Länge der großen Halbachse ist, so können auch die Hauptscheitel A und B leicht gefunden werden.

2. Achsenkonstruktion der Hyperbel.

Rückt P (Fig. 7) ins Unendliche, so wird die

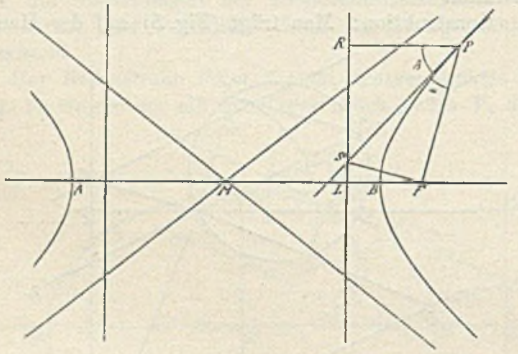


Fig. 7.

Tangente PS zur Asymptote. Da dann $FP \parallel MR$, wird $\alpha = 0$ und der Brennstrahl $P_\infty F$ bildet mit der Hauptachse den Winkel β. Da

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{p}{q},$$

so ist für $\alpha = 0$

$$\cos\beta = \frac{q}{p}.$$

Ist β mit F als Scheitel gefunden, so erhält man S und damit einen Asymptotenpunkt. Die Asymptote ist dann, da sie mit der Hauptachse ebenfalls den Winkel β bildet, bestimmt.

Ist also Brennpunkt, Leitlinie und Exzentrizität $\left(=\frac{p}{q}\right)$ gegeben, so konstruiert man das rechtwinklige Dreieck F_1XY aus p und q (Fig. 8), bestimmt den

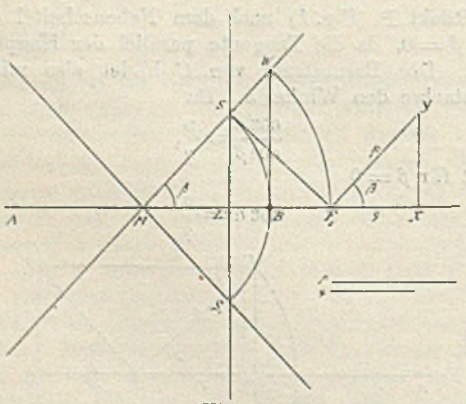


Fig. 8.

Schnittpunkt S der Leitgeraden mit $F_1S \perp F_1Y$ und zieht durch S die Parallele zu F_1X. Damit ist eine Asymptote bestimmt, die mit der Hauptachse den Mittelpunkt M liefert. Der Schnittpunkt S_1 des Kreises um M mit MS mit der Leitgeraden bestimmt die zweite Asymptote MS_1. Derselbe Kreis schneidet auch auf der Hauptachse die Hauptscheitel B und A aus.

Das letztere folgt leicht aus der Kongruenz der Dreiecke MSF_1 und MWB. Macht man nämlich $MW = MF_1$ so schneidet das Lot WB auch die Hauptachse, den Hauptscheitel aus. Aus der Kongruenz folgt aber, daß $MB = MS$. Es ist also das Asymptotenstück zwischen Leitgerade und Mittelpunkt gleich der großen Halbachse.

(W) Bei der Herleitung der Achsenkonstruktion für die Ellipse wurde die Tatsache benutzt, daß die Tangenten in den Nebenscheiteln der Hauptachse parallel laufen. Will man die Achsenkonstruktion lediglich aus den Beziehungen zwischen Brennstrahl und Leitstrahl herleiten, so ist zunächst die Lage der Tangente im Nebenscheitel zu untersuchen.

Aus den unter A) 1. aufgestellten Gleichungen ergibt sich (Fig. 9):

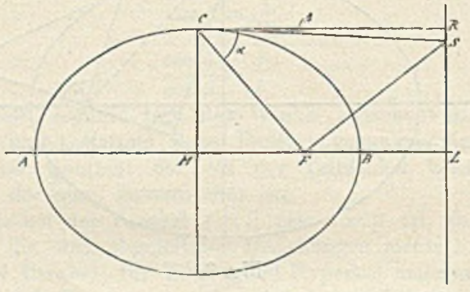


Fig. 9.

$$MF = \frac{\varepsilon^2 d}{1-\varepsilon^2}; \quad ML = \frac{d}{1-\varepsilon^2}; \quad MA = \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon^2}.$$

Da ferner $\frac{CF}{CR} = \varepsilon$, so ist

$$CF = \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon^2} \ (= a) \text{ und } CM = \frac{\varepsilon d}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Berücksichtigt man die Aehnlichkeit der Dreiecke CFM und FSL, so ergibt sich unter Zuhilfenahme des pythagoreischen Lehrsatzes als Abschnitt der Tangente auf der Leitgeraden

$$SL = \frac{\varepsilon d}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Also ist $\qquad SL = CM = LR.$

Die Tangente in C fällt also mit dem Leitstrahl von C zusammen und Winkel β ist somit gleich 0. Daraus werden dann dieselben Schlüsse gezogen wie unter B) 1

C) Aufgaben (W).

Die am Schluß von B) 2. angegebene Beziehung — das Asymptotenstück zwischen Mittelpunkt und Leitgerade ist gleich der großen Halbachse — gestattet eine einfache Lösung einiger Aufgaben:

Von einer Hyperbel sei gegeben:

1. der Mittelpunkt, ein Hauptscheitel und der Schnittpunkt der Leitgeraden mit der Hauptachse. Asymptoten und Brennpunkt sind zu finden;
2. die Hauptachse (der Richtung nach) eine Asymptote und eine Leitgerade. Gesucht sind Hauptscheitel und Brennpunkt;
3. der Mittelpunkt, ein Brennpunkt und der Schnitt der Leitgeraden mit der Hauptachse. Gesucht sind die Asymptoten und der Hauptscheitel.

Aufgabe 1. und 2. sind mit Hilfe der angegebenen Beziehung ohne weiteres lösbar. Zur Lösung von

Aufgabe 3. führt folgende Beziehung. Setzt man (Fig. 8)

$$MF_1 = e,\ MB = a,\ ML = v,\ LA = u,$$

so ist, da $\frac{BF_1}{BL} = \frac{e}{a},\ \frac{e-a}{u} = \frac{e}{a},$

somit $$u = \frac{(e-a)\cdot a}{e}$$

und $$v = \frac{a^2}{e},$$

da v und e gegeben sind, ist a bestimmt durch

$$a = \sqrt{v \cdot e}.$$

Damit ist Aufgabe 3. zurückgeführt auf Aufgabe 1.

Bericht über das Preisausschreiben (1910, S. 90).

Von P. v. Schaewen (Naumburg a. S.)

Ein Liebhaber der Mathematik hatte einen Preis von 100 M für die richtige und vollständige Lösung der Aufgabe ausgesetzt:

Auf wieviele verschiedene Arten kann in deutschen Münzen ein Taler gewechselt werden?

Dieses Preisausschreiben hat, wie die zahlreichen Zuschriften zeigen, weite Kreise auf das lebhafteste interessiert. Ich habe mir nicht träumen lassen, daß es so viele Freunde der Mathematik gibt. Von vielen Seiten ist der Wunsch ausgesprochen worden, daß eine solche mathematische Preisaufgabe doch öfter gestellt werden möchte. An geeigneten Aufgaben ist wahrhaftig kein Mangel. Es wird auch nicht an Leuten fehlen, die gern bereit sind, die eingehenden Lösungen zu bearbeiten. Aber schwierig ist es, einen Maecen zu finden, der den Preis stiftet.

Bis zum Schlußtermine liefen im ganzen 968 Zuschriften ein. Darunter ist viel albernes und dummdreistes Zeug, aber auch eine große Zahl vortrefflicher Arbeiten. Nach sorgfältiger Prüfung genügten 185 Lösungen den Bedingungen des Preisausschreibens. Die Löser gehören den verschiedensten Berufen an. Es sind Offiziere, Volksschullehrer, Arbeiter, Geistliche, Kaufleute, Studenten usw. Der ausgesetzte Preis fiel Herrn Max Lange in Augustusburg (Erzgeb.) durch das Los zu. Herr Lange ist ein schlichter Arbeiter, der in seiner Jugend offenbar eine sehr bescheidene Schulbildung erhalten hat. Daher ist die von ihm eingesandte Lösung leider nicht druckfertig. Aber sie ist richtig und vollständig. Es ist keineswegs die einzige derartige Lösung, die aus Arbeiterkreisen stammt. Herr Lange teilt die acht Münzsorten, in denen ein Taler gewechselt werden kann, in zwei Klassen, die er mit Großgeld und Kleingeld bezeichnet. Es wird dadurch dasselbe erreicht, was bei algebraischer Lösung des Problems eine Substitution leistet. Herr Lange operiert nun recht geschickt mit diesen beiden Gruppen von Münzen und gelangt durch eine scharfsinnige Schlußweise sicher zu dem richtigen Resultate. Die Lösung so manches Mathematikers mußte von der Preisbewerbung ausgeschlossen werden, weil bei der Ausführung der numerischen Rechnung Fehler und Irrtümer vorkamen und daher ein falsches Resultat erzielt wurde. Jedem Löser der Preisaufgabe steht seine Lösung zur Verfügung, wenn er einen frankierten und mit voller Adresse versehenen Umschlag einsendet.

Angesichts des lebhaften Interesses, welches das Preisausschreiben in weiten Kreisen hervorgerufen hat, will ich eine Lösung der Aufgabe geben. Es liegt nahe, daran zu denken, eine der übrigen befriedigenden Lösungen zu wählen. Das ist aber gar nicht so leicht. Denn bei einer großen Zahl von Lösungen haben sich die Löser das Recht der Veröffentlichung ausdrücklich vorbehalten. Dann sind viele Lösungen viel zu umfangreich, um hier abgedruckt werden zu können. Dreizehn Lösungen konnten von der Post nur als Paket befördert werden. Wieder andere Lösungen sind so knapp gehalten, daß ich einen Kommentar liefern müßte, damit sie von jedem richtig verstanden werden. Ich will daher die Lösung geben, die ich wahrscheinlich eingesandt haben würde, wenn ich mich an dieser Preisbewerbung hätte beteiligen dürfen. Damit entfällt auch jede Bevorzugung eines einzelnen Lösers. Es ist gleichgültig, welche deutsche Münze gewechselt werden soll, stets braucht man zur Erzielung des richtigen Resultates ein und dieselben Zahlengrößen. Es soll berechnet werden, wie oft ein Fünfmarkstück gewechselt werden kann.

Die Stückzahl der verschiedenen Münzsorten sei $a, b, c, \ldots$, so ist die Gleichung

$$a + 2b + 5c + 10d + 25e + 50f + 100g + 200h + 300i = 500$$

in positiven ganzen Zahlen einschließlich der Null zu lösen. Entweder ist $i = 1$ oder $i = 0$. Daher ist zu untersuchen, wie viele ganzzahligen Lösungen jede der beiden Gleichungen

$$a + 2b + 5c + 10d + 25e + 50f + 100g + 200h = 200 \quad \text{I)}$$

$$a + 2b + 5c + 10d + 25e + 50f + 100g + 200h = 500 \quad \text{II)}$$

besitzt. Setzt man

$$a + 2b = 5p,\ c + 2d = q,\ e + 2f = r,\ g + 2h = s,$$

so geht die Gleichung I) über in

$$p + q + 5r + 20s = 40.$$

Die 245 Lösungen dieser Gleichung lassen sich sehr einfach angeben. Es ist nur Schreibarbeit, die nicht vollständig ausgeführt zu werden braucht und daher nur wenige Minuten beansprucht. Die Lösungen sind

p	0	0	0	1		5	0	1		10	0	1		15	0	1	
q	0	0	5	4	…	0	10	9	…	0	15	14	…	0	20	19	…
r	0	4	3	3		3	2	2		2	1	1		1	0	0	
s	2	1	1	1		1	1	1		1	1	1		1	1	1	

p	20	0	0		5	0	1		10	0	1		15	0	1	
q	0	0	5	…	0	10	9	…	0	15	14	…	0	20	19	…
r	0	8	7		7	6	6		6	5	5		5	4	4	
s	1	0	0		0	0	0		0	0	0		0	0	0	

p	20	0	1		25	0	1		30	0	1		35	0	1		40
q	0	25	24	…	0	30	29	…	0	35	34	…	0	40	39	…	0
r	4	3	3		3	2	2		2	1	1		1	0	0		0
s	0	0	0		0	0	0		0	0	0		0	0	0		0

Nun besitzt jede der beiden Gleichungen

$$x + 2y = 2n \quad \text{und} \quad x + 2y = 2n + 1$$

$n + 1$ positive ganzzahlige Lösungen einschließlich der Null. Daher erhält man 245 Produkte, deren Bildungsgesetz sofort einleuchtet. Die Summe dieser Produkte ist die Zahl der Lösungen der Gleichung I). Die Produkte sind $1\cdot1\cdot1\cdot2$; $1\cdot1\cdot3\cdot1$; $1\cdot3\cdot2\cdot1$; $3\cdot3\cdot2\cdot1$; $\cdots$ $13\cdot1\cdot2\cdot1$; $1\cdot6\cdot2\cdot1$; $3\cdot5\cdot2\cdot1$; $\cdots$ $26\cdot1\cdot2\cdot1$ usw. bis $101\cdot1\cdot1\cdot1$.

Man braucht keineswegs die sämtlichen 245 Produkte einzeln zu bilden und dann zu addieren. Wie eine einfache Ueberlegung lehrt, hat man nur die folgenden Summen zu bilden:

$$A_1 = 1\cdot3 + 3\cdot3 + 6\cdot2 + 8\cdot2 + 11\cdot1 + 13\cdot1$$
$$B_1 = 1\cdot6 + 3\cdot5 + 6\cdot5 + \cdots + 23\cdot1 + 26\cdot1$$
$$A_2 = 1\cdot8 + 3\cdot8 + 6\cdot7 + \cdots + 36\cdot1 + 38\cdot1$$
$$B_2 = 1\cdot11 + 3\cdot10 + 6\cdot10 + \cdots + 48\cdot1 + 51\cdot1$$
$$A_3 = 1\cdot13 + 3\cdot13 + 6\cdot12 + \cdots + 61\cdot1 + 63\cdot1$$

$$B_3 = 1 \cdot 16 + 3 \cdot 15 + 6 \cdot 15 + \cdots + 73 \cdot 1 + 76 \cdot 1$$
$$A_4 = 1 \cdot 18 + 3 \cdot 18 + 6 \cdot 17 + \cdots + 86 \cdot 1 + 88 \cdot 1$$
$$B_4 = 1 \cdot 21 + 3 \cdot 20 + 6 \cdot 20 + \cdots + 98 \cdot 1 + 101 \cdot 1.$$

Dann besitzt die Gleichung I)

$$A_4 + B_4 + 2(A_3 + B_3) + 4(A_2 + B_2) + 6(A_1 + B_1) + 10$$

ganzzahlige Lösungen. Ebenso findet man, daß die Gleichung II) deren besitzt

$$A_{10} + B_{10} + 2(A_9 + B_9) + 4(A_8 + B_8) + 6(A_7 + B_7) + 10(A_6 + B_6) + 14(A_5 + B_5) + 20(A_4 + B_4) + 26(A_3 + B_3) + 35(A_2 + B_2) + 44(A_1 + B_1) + 56.$$

Man kann die sämtlichen A aus A_1 und die sämtlichen B aus B_1 ableiten, aber besser ist es, sofort zur Bildung von $A_1 + B_1$, $A_2 + B_2$, $\cdots$ zu schreiten. Es ist, wenn man $A_h + B_h$ mit S_h bezeichnet,

$$S_1 = 405$$
$$S_2 = S_1 + 50 \cdot 3 \cdot 4 + 1825 \cdot 2 - 1515$$
$$S_3 = S_2 + 50 \cdot 8 \cdot 9 + 1825 \cdot 3 - 1515$$
$$\vdots$$
$$S_n = S_{n-1} + 50(5n - 7)(5n - 6) + 1825 \cdot n - 1515.$$

Addiert man diese n Gleichungen, so erhält man S_n als ganze rationale Funktion von n. Die zur numerischen Rechnung geeignetste Form dürfte folgende sein

$$S_n = 5\left[117n - 1 + \frac{5n(n+1)(100n - 121)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right].$$

Ebenso einfach ist die unmittelbare Berechnung der Koeffizienten von S_h, so daß man ganz allgemein angeben kann, wieviele Lösungen die Gleichung

$$a + 2b + 5c + 10d + 25e + 50f + 100g + 200h = 50m$$

besitzt, wo m irgendeine positive ganze Zahl ist. Die numerische Rechenarbeit für ein bestimmtes m wird dadurch auf ein Minimum zurückgeführt. Man erhält

$$S_1 = 405,\ S_2 = 3140,\ S_3 = 10\,700,\ S_4 = 25\,585,$$
$$S_5 = 50\,295,\ S_6 = 87\,330,\ S_7 = 139\,190,\ S_8 = 208\,375,$$
$$S_9 = 297\,385,\ S_{10} = 408\,720.$$

Führt man die einfachen Multiplikationen aus, so erhält man 61985 als Zahl der Lösungen der Gleichung I). So oft kann man 2 M zahlen, also ein Zweimarkstück 61984mal wechseln. 50 Pfg. kann man auf $S_1 + 2$ verschiedene Arten zahlen, also ein 1/2 Markstück 406mal wechseln. 100 Pfg. können auf $S_2 + 2S_1 + 4$ Arten gezahlt, also ein Markstück 3953mal gewechselt werden.

Für Gleichung II) wird die Zahl der Lösungen 5167236. Demnach läßt sich ein Fünfmarkstück auf 5229221 verschiedene Arten wechseln. Für ein Zehnmarkstück und für ein Zwanzigmarkstück erhält man natürlich erheblich größere Zahlen. Ersteres kann auf 300504127, letzteres auf 33230248752 verschiedene Arten gewechselt werden. Für den Taler folgt nach dem Vorstehenden ohne weiteres als Zahl der Möglichkeiten, ihn zu wechseln,

$$S_6 + 2S_5 + 4S_4 + 6S_3 + 10S_2 + 14S_1 + 20 = 391\,550.$$

Direktor W. Gercken †.

Wiederum ist ein eifriger Förderer des mathematischen Unterrichts und ein treues Vereinsmitglied durch den Tod abberufen worden. Nach 27jähriger Tätigkeit am Realgymnasium in Perleberg, leitete W. Gercken seit 1907 das Realgymnasium in Hildesheim. Das Lehrerkollegium sagt von ihm: „Mit seltenen Geistesgaben ausgestattet, von hohem Pflichtgefühl beseelt und von Schaffensfreudigkeit durchdrungen, war der Verstorbene Lehrern und Schülern ein leuchtendes Vorbild".

Weiteren Kreisen ist er durch seine literarische Tätigkeit bekannt geworden, besonders durch die mehrjährige Redaktion der „Blätter für höheres Schulwesen". Neben Standesfragen, besonders solchen, die die Stellung und die Ausbildung der Schulamtskandidaten betrafen, hat ihn einerseits die philosophische Begründung der Mathematik, andererseits die Darstellende Geometrie lebhaft interessiert. Sein Lehrbuch für diese Disziplin hat manchen Widerspruch, aber sehr viel mehr Anerkennung gefunden. Er war geneigt, zugunsten dieses Faches, jedenfalls am Realgymnasium, die reine Mathematik und das Freihandzeichnen etwas zu beschneiden. Das fand natürlich Gegner. Andererseits bot er in der Darstellenden Geometrie auch die mathematische Grundlage der Malerperspektive und ging recht weit in der Schattenlehre. Beides ist nicht möglich, wenn nur die übliche Zeit der Darstellenden Geometrie zur Verfügung steht. Was er von den Kandidaten der Mathematik an philosophischer Ausbildung verlangte, war auch gründlich und viel. Leider hat er seine Erfahrungen als Seminarleiter nicht mehr veröffentlichen können. Es wäre interessant gewesen zu erfahren, ob er in dem von ihm gewünschten Umfang hat nachholen können, was die Universität seiner Meinung nach bei vielen Kandidaten versäumt. Jedenfalls ist es ein bleibendes Verdienst Gerckens, auf die Unentbehrlichkeit gediegener philosophischer Vorbildung für jeden Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaften hingewiesen zu haben, wie die alte hessische Prüfungsordnung sie verlangte. Dann würde man sich freilich entschließen müssen, die Prüfung in Religion und Deutsch fallen zu lassen, durch die die Universität ihrerseits der Schule ein Mißtrauensvotum erteilt hat. Gerckens eigene philosophische Anschauungen haben einen höchst anziehenden Ausdruck in seinen Schriften „Beitrag zur Würdigung der Lockeschen Erkenntnistheorie" und „Die psychologischen Grundlagen der Mathematik" gefunden. Sein Andenken wird, wie im engeren Kreise seiner Schüler und Amtsgenossen, so auch im weiteren der Fachkollegen dauernd ein ehrendes bleiben.

A. T.

Kleinere Mitteilungen.

Beweis eines stereometrischen Satzes.

Von Ludwig Balser (Darmstadt).

Wenn der Beweis eines geometrischen Satzes rechnerisch geführt wird, so muß man verlangen, daß jeder Schritt der Rechnung eine geometrische Bedeutung habe und daß diese auch deutlich hervortrete; bleibt diese Forderung unberücksichtigt, so hat der Beweis etwas unbefriedigendes, weil er keine lückenlose Einsicht in den geometrischen Zusammenhang gewährt. Diesen Mangel zeigt auch die landläufige Ableitung der Formel für das Volumen des Pyramidenstumpfes: man ergänzt den Stumpf zur Vollpyramide und führt die Höhe dieser sowie die der Ergänzungspyramide ein, um nachher beide als unbrauchbar wieder zu eliminieren. Nachträglich sucht man dann die erhaltene Formel geometrisch zu deuten als eine Zerlegung des Stumpfes in drei Pyramiden von gleicher Höhe, während die Ableitung auf diese Zerlegung keinen Bezug nimmt; auch wird sich der Schüler schwerlich eine zutreffende Vorstellung von dem geometrischen Mittel zweier Flächen machen, wenn er nicht erfährt, wie man dieses Mittel konstruiert.

Nun läßt sich für den dreiseitigen Stumpf die gewünschte Zerlegung in ganz derselben Weise durchführen wie bei dem dreiseitigen Prisma; man muß nur schon dort (Fig. 1) die „auf der Kante

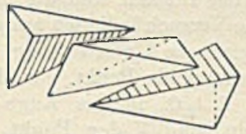


Fig. 1.

stehende" Teilpyramide, die mit dem gegebenen Prisma weder die Grundfläche noch die Höhe (im Sinne der Schulgeometrie) gemein hat, durch eine Pyramide von der Höhe des gegebenen Körpers ersetzen. Man erhält so den Satz:

Ein Tetraeder ist inhaltsgleich einer dreiseitigen Pyramide, deren Höhe mit dem Abstand zweier windschiefer Gegenkanten übereinstimmt und die jene Kanten nach Länge und Richtung als Grundkanten enthält.

Werden also die Längen der windschiefen Kanten mit a' und b, ihr Winkel*) mit γ und ihr Abstand mit h bezeichnet, so ist**) das Volumen des Tetraeders:

$$V = \frac{h}{3} \cdot \frac{a' \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}.$$

Für das bei der Zerlegung des dreiseitigen Stumpfes auftretende Tetraeder ist also die Ersatzpyramide bekannt, sobald man ihre Grundfläche konstruiert hat. Den Ausgangspunkt möge die Bodenfläche des Stumpfes bilden, die beide windschiefen Kanten a' und b der Richtung nach, die eine — b — auch der Länge nach enthält. Man hat diese Fläche im Verhältnis $a' : a$ zu verkleinern; dieses Verhältnis

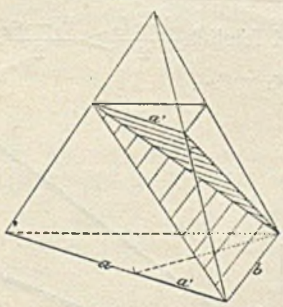


Fig. 2.

ist aber (auch für Stümpfe von beliebiger Seitenzahl) gleich dem Verhältnis aus den Wurzeln der Grundflächen; werden diese mit G' und G bezeichnet, so ist die Grundfläche der Ersatzpyramide

$$G \cdot \frac{a'}{a} = G \sqrt{\frac{G'}{G}} = \sqrt{G' \cdot G},$$

w. z. b. w. Die Ausdehnung auf mehrseitige Stümpfe geschieht ebenso wie beim Prisma.

*) Hier ist der Winkel windschiefer Geraden benutzt; es empfiehlt sich, diesen Begriff frühzeitig einzuführen, weil man dadurch manche Lehrsätze von Einschränkungen befreit, die sachlich unbegründet und nur geeignet sind, den sprachlichen Ausdruck schleppend und schwerverständlich zu machen. Man vergleiche die wohldurchdachte Anordnung der Stereometrie bei Thieme, Leitfaden der Mathematik II. — Manche Beweise, betreffend das Senkrechtstehen, beruhen auf folgenden Grundgedanken: man kennt eine Ebene, die durch eine bestimmte Gerade hindurchgeht und auf einer zweiten Geraden senkrecht steht: alsdann stehen beide Geraden auf einander senkrecht und die Ebene enthält ihr gemeinsames Lot, also ihren kürzesten Abstand. Indem man nun die Rollen der beiden Geraden vertauscht, schließt man, daß die erste Gerade senkrecht steht auf der durch die zweite und das Gemeinlot bestimmten Ebene.

**) Balser, Ueber die Verwendung der Parallelprojektion im geometrischen Unterricht. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht der Großh. Oberrealschule zu Darmstadt, Ostern 1910. Progr.-Nr. 885. Dieser Arbeit ist auch Fig. 1 entnommen.

Die Kugelgeometrie in konstruktiver Behandlung.

(Nachtrag).

Von Ludwig Balser (Darmstadt).

1. In einem unter vorstehendem Titel veröffentlichten Aufsatz*) habe ich die eindeutigen Grundaufgaben über das Kugeldreieck behandelt, die beiden doppeldeutigen Dreiecksaufgaben aber übergangen in der Befürchtung, daß ihre Lösung — unter Verzicht auf die Mittel der darstellenden Geometrie — unübersichtlich erscheinen werde. Die Schwierigkeit wird überwunden, wenn man von folgender Sonderaufgabe ausgeht:

Ein rechtwinkliges Kugeldreieck aus einer Kathete a und deren Gegenwinkel α zu konstruieren.

Man trage die gegebene Kathete a am Kugelumriß**) i. w. Gr. ab: $CB = a$ (Fig. 1); die Ecke A

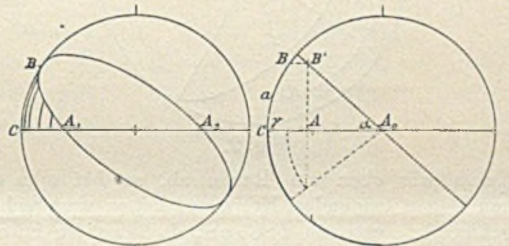


Fig. 1.

ist dann auf dem durch C senkrecht zur Tafel gelegten Großkreis zu suchen, der in Fig. 1 durch den wagerechten Durchmesser abgebildet ist und kurz als „Horizont" bezeichnet werden möge. Im vordersten Punkt A_0 der Kugel trage man nun den Winkel α an (nach CB hin geöffnet), d. h. man lege durch den senkrecht zur Tafel stehenden Kugeldurchmesser die Ebene, die mit dem Horizont den Winkel α einschließt. Der so gefundene Großkreis wird nicht durch B hindurchgehen, dagegen enthält er i. a. zwei Punkte B', B'', die, spiegelig zur Tafel, mit B auf demselben Höhenkreis liegen. Jeder derselben gelangt durch Drehung um die Scheitellinie nach B, und zwar sind beide Drehungen entgegengesetzt gleich; unterwirft man nun den ganzen Kreis $A_0 B' B''$ diesen Drehungen, so kann man aus dem Bogen, den B' bezw. B'' beschreibt, auch den Bogen ermitteln, den A_0 auf dem Horizont überstreicht und findet so den gesuchten Eckpunkt in A_1 bezw. A_2.

Soll die Aufgabe reelle Lösungen haben, so muß der höchste Punkt des Kreises $A_0 B' B''$ mindestens so hoch liegen wie B, also $\sin \alpha \geqq \sin a$; damit aber die Seiten des Dreiecks weniger als

*) Diese Zeitschrift, XV. Jahrgang, Heft 1, S. 15.

**) Die Zeichentafel sei durch die Kugelmitte gelegt; hat ein Körper eine Symmetrieebene, so wird man diese (und nicht eine zu ihr parallele) als Bildfläche benutzen, auch bei schiefer Projektion; man gewinnt dadurch sofort den Anschluß an die Rechnung, die von demselben ebenen Schnitt ausgeht. Vergl. Balser, Ueber die Verwendung der Parallelprojektion im geometrischen Unterricht. Wissenschaftl. Beilage zum Jahresbericht der Großh. Oberrealschule zu Darmstadt, Ostern 1910, Progr.-Nr. 885.

180^0 betragen, darf die Drehung, die B' nach B führt, den Winkel von 90^0 nicht erreichen, daher die Bedingung, daß a und α gleichartig in Bezug auf 90^0 sein sollen. Die bei dem rechnerischen Verfahren notwendige Entscheidung, ob die Hypotenuse c spitz oder stumpf zu nehmen sei, wird hier erspart, da man aus dem Bilddreieck alle Stücke i. w. Gr. eindeutig entnehmen kann (vergl. die frühere Abhandlung).

2. Die Durchnahme vorstehender Konstruktion dürfte dem Schüler in anschaulicher Weise vor Augen führen, wie eine in der Ebene eindeutige Aufgabe auf der Kugel doppeldeutig wird, indem eine Drehung anstelle der Parallelverschiebung tritt! Das oben beschriebene Konstruktionsverfahren überträgt sich unmittelbar auf das schiefwinklige Dreieck, das aus a, α, γ bestimmt werden soll. Trägt man nämlich (Fig. 2)

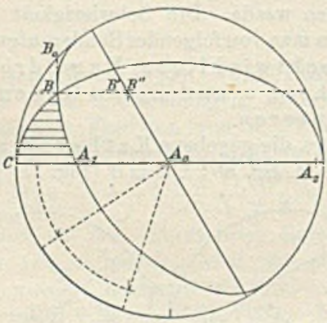


Fig. 2.

$CB_0 = a$ wie oben am Rande ab, so hat man den diesen Bogen tragenden Kreis um seinen wagerechten Durchmesser soweit zu drehen, daß seine Ebene gegen den Horizont um den Winkel γ geneigt ist. Dabei gelange B_0 nach B; die Konstruktion bleibt im übrigen dieselbe wie oben; die beiden Drehungen, die B' bezw. B'' nach B führen, haben aber jetzt nicht nur entgegengesetzten Sinn, sondern auch ungleiche Größe. Betrachtet man für den Augenblick an ihrer Stelle die entgegengesetzten Drehungen, die B nach B' bezw. B'' bringen, so lassen sich diese zusammensetzen aus einer beiden gemeinsamen Drehung an den Rand, vermehrt oder vermindert um eine und dieselbe weitere Drehung; sie erscheinen also wie die Wurzeln einer gemischt-quadratischen Gleichung, während sie in dem unter 1 behandelten Sonderfall als Wurzeln einer rein-quadratischen Gleichung gedeutet werden können.

Damit die Aufgabe reell lösbar sei, muß die Höhe des Punktes B, nämlich $\sin a \cdot \sin \gamma \leqq \sin \alpha$ sein; die Frage, ob $c \gtreqless 90^0$ zu nehmen sei, tritt bei dieser Methode nicht auf. Sollen aber nur solche Dreiecke als Lösung zugelassen werden, deren Stücke sämtlich $< 180^0$ sind, so muß man vorkommenden Falls Drehungen von 90^0 oder $> 90^0$ ausschließen, so daß eine oder auch beide Lösungen verloren gehen können.

Die duale Aufgabe läßt sich mit Hilfe des Polardreiecks erledigen.

Mathematische Untersuchung über die scheinbare Hebung eines unter Wasser befindlichen Punktes.

Von Dr. W. Jaeckel (Ohlau).

Die bekannte Tatsache, daß ein unter Wasser befindlicher Punkt dem Auge höher erscheint, als er in Wirklichkeit liegt, wird in der Regel ohne Bezugnahme auf den dazu gehörigen Versuch lediglich auf Grund einer Figur von der in 1) gedachten Art zur Anschauung gebracht. Wie wenig aber eine solche Figur zur genauen Erklärung ausreicht, zeigt Fig. 2, welche ohne zunächst ersichtlichen Widerspruch das gerade Gegenteil „lehrt“. In der Tat läßt sich die in Rede stehende Erscheinung ohne Versuch lediglich aus der Figur durch eine rein mathematische Untersuchung herleiten:

Sei L der leuchtende Punkt, von dem zwei Strahlen LA_1O_1 und LA_2O_2 in das Auge O_1O_2 des Beobachters dringen, und V der Punkt, von welchem diese beiden Strahlen herzukommen scheinen, der Punkt, dessen Höhenlage untersucht werden soll. Nach Maßgabe der Figur ist in unserem Fall $r_1 > r_2$. Da

$$\sin i_1 = n \cdot \sin r_1 \text{ und } \sin i_2 = n \cdot \sin r_2$$

ist, so ist auch $i_1 > i_2$. Es gelten also folgende Voraussetzungen:

$$1)\ r_1 > r_2, \quad 2)\ i_1 > i_2,$$
$$3)\ i_1 > r_1, \quad 4)\ i_2 > r_2.$$

Dem Brechungsgesetz zufolge gilt

$$\frac{\sin i_1}{\sin r_1} = \frac{\sin i_2}{\sin r_2} = n \quad \text{oder:} \quad \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{\sin r_1}{\sin r_2};$$

$$\frac{\sin i_1 + \sin i_2}{\sin i_1 - \sin i_2} = \frac{\sin r_1 + \sin r_2}{\sin r_1 - \sin r_2}$$

$$\frac{2 \sin \frac{i_1 + i_2}{2} \cdot \cos \frac{i_1 - i_2}{2}}{2 \cos \frac{i_1 + i_2}{2} \cdot \sin \frac{i_1 - i_2}{2}} = \frac{2 \sin \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot \cos \frac{r_1 - r_2}{2}}{2 \cos \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot \sin \frac{r_1 - r_2}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{i_1 + i_2}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{i_1 - i_2}{2} = \operatorname{tg} \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{r_1 - r_2}{2}.$$

Da $i_1 > r_1$ und $i_2 > r_2$ ist, ist auch $\frac{i_1 + i_2}{2} > \frac{r_1 + r_2}{2}$ und demgemäß $\operatorname{tg} \frac{i_1 + i_2}{2} > \operatorname{tg} \frac{r_1 + r_2}{2}$, darum weiter zufolge der letzterhaltenen Gleichung $\operatorname{ctg} \frac{i_1 - i_2}{2} < \operatorname{ctg} \frac{r_1 - r_2}{2}$, und folglich $\frac{i_1 - i_2}{2} > \frac{r_1 - r_2}{2}$, also schließlich $i_1 - i_2 > r_1 - r_2$.

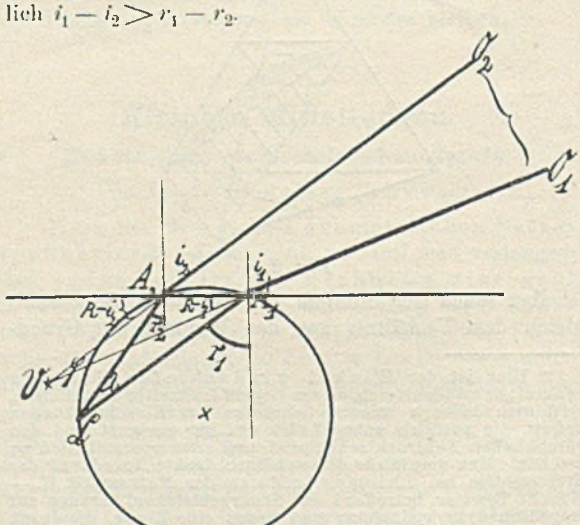


Fig. 1.

Nun ist nach dem Satz vom Außenwinkel bei $\triangle A_1 A_2 V: \sphericalangle \varphi = (R - i_2) - (R - i_1) = i_1 - i_2$; ebenso ist bei $\triangle A_1 A_2 L: \sphericalangle \lambda = (R - r_2) - (R - r_1) = r_1 - r_2$; da $i_1 - i_2 > r_1 - r_2$, wie bewiesen, so ist auch $\sphericalangle \varphi > \sphericalangle \lambda$.

Der Punkt V muß also innerhalb des Kreises liegen, den man sich durch A_1, A_2, L gelegt denken kann; und da A_2V naturgemäß über — nicht unter — A_2L liegt (Brechung in Luft vom Lot fort), so ist der durch die Sehne und den Bogen A_2L begrenzte Teil des Kreises das Gebiet, in welches Punkt V zu liegen kommen muß. Alle Punkte dieses Gebietes liegen aber höher als Punkt L, somit auch der Punkt V.

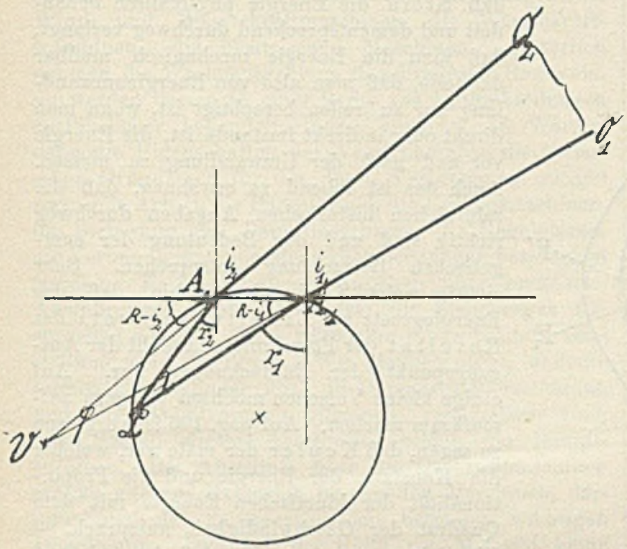


Fig. 2.

Aus dem zuletzt Gesagten ergibt sich, daß weder Figur 2 noch auch Figur 1 dem wahren Sachverhalt entsprechen, woraus dann nochmals die Unhaltbarkeit eines rein figürlichen Nachweises erhellt.

Die Bestimmung der Fehlergrenzen der durch fortgesetztes Radizieren erhaltenen Näherungswerte von π.

Von H. Bönke (Reinickendorf).

Ist $w_1 = \sqrt{2}$, $w_2 = \sqrt{2 + w_1}$, $w_3 = \sqrt{2 + w_2}$, . . . ferner $\overline{w_2} = \sqrt{2 - w_1}$, $\overline{w_3} = \sqrt{2 - w_2}$, . . . und s_n die Seite des regulären Sehnen-n-Ecks, so findet man

$$s_8 = r\,\overline{w_2},\quad s_{16} = r\,\overline{w_3},\quad s_{32} = r\,\overline{w_4}, \ldots$$

und für die entsprechenden Seiten der regulären Tangentenpolygone

$$S_8 = \frac{2}{w_2}\,s_8,\quad S_{16} = \frac{2}{w_3}\,s_{16}, \ldots$$

Daraus ergeben sich, wenn die Umfänge berechnet werden, zwei Reihen von Näherungswerten von π, nämlich

$$\pi_8 = 4\,\overline{w_2},\quad \pi_{16} = 8\,\overline{w_3},\quad \pi_{32} = 16\,\overline{w_4}, \ldots$$

$$\Pi_8 = \frac{2}{w_2}\pi_8,\quad \Pi_{16} = \frac{2}{w_3}\pi_{16},\quad \Pi_{32} = \frac{2}{w_4}\pi_{32}, \ldots$$

Daher ist

$$\Pi_8 - \pi_8 = \frac{2 - w_2}{w_2}\cdot\pi_8,\quad \Pi_{16} - \pi_{16} = \frac{2 - w_3}{w_3}\pi_{16}, \ldots$$

Das Tangentensechseck liefert

$$U_6 = 2r\cdot 2\sqrt{3} = 3{,}464\cdot 2r < 3{,}5\cdot 2r.$$

Also ist $\quad \Pi_6 < \frac{7}{2} > \pi > \pi_k.$

Daher ist

$$\Pi_8 - \pi_8 < \frac{2 - w_2}{w_2}\cdot\frac{7}{2},\quad \Pi_{16} - \pi_{16} < \frac{2 - w_3}{w_3}\cdot\frac{7}{2}, \ldots$$

Da ferner $\frac{7}{4} < w_2 < w_3 < w_4 \ldots$, so ist

$$\Pi_8 - \pi_8 < 2\,(2 - w_2),$$
$$\Pi_{16} - \pi_{16} < 2\,(2 - w_3), \ldots$$

Diese Genauigkeitsgrenzen noch enger zu machen, würde auf dem Standpunkte der Obertertia nicht zu empfehlen sein.

Ueber die Berechnung der irrationalen Werte w_k und $\overline{w_k}$ ist einiges zu bemerken. Um w_k zu berechnen, muß man k-mal radizieren. Die dabei vorzunehmende Einteilung in Gruppen von je zwei Stellen verursacht dem Schüler Bedenken, ob nicht die Genauigkeit von Fall zu Fall abnehmen müsse.

Ist a eine irrationale Zahl, b ein genäherter Wert und $a - b = \delta$, wie groß ist $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \varepsilon$?

$$\frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{\delta}{\varepsilon},\ \text{also}\ \varepsilon = \frac{\delta}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

oder

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2\sqrt{b} + \varepsilon},\ \text{also}\ \varepsilon < \frac{\delta}{2\sqrt{b}}.$$

Da $\sqrt{b}$ bei Berechnung der w_k nahezu 2 ist, wird $\varepsilon < \delta$ sein. Anders verhält es sich mit den $\overline{w_k}$, da $\lim\limits_{k=\infty} \overline{w_k} = 0$ ist.

Beispiel $\quad w_9 = 1{,}99\,999\,058\,762.$

Daher $\quad \overline{w_{10}} = \sqrt{2 - w_9} = 0{,}003\,067\,961$

Näherungswert $\quad 2^{10}\cdot\overline{w_{10}} = 3{,}141\,592\,064.$

Zu erwarten war hier, da

$$2\,(2 - w_{10}) = 0{,}000\,004\,706$$

ist, ein Fehler, der höchstens die 6. Dezimale berühren konnte.

Ergebnis: Der Näherungswert $2^k\,\overline{w_k}$ läßt einen Fehler erwarten, der unter der Grenze $2\,(2 - w_k)$ bleiben muß.

Lehrmittel-Besprechungen.

Härtel, Gust., Kegelschnittzeichner.

Wenn es auch unzweifelhaft nützlich ist, daß jeder Primaner sich selbst einige Schablonen zum raschen Zeichnen von Kegelschnitten anfertigt, so werden diese doch bald durch Benutzung ungenau, wenn sie nicht aus sehr starker Pappe hergestellt sind. In diesem Fall lassen sie sich aber schlecht im Reißzeugkasten unterbringen und gehen dann leicht verloren. Ein praktischer Ersatz hierfür ist der von Gust. Härtel erfundene, aus einem Stück Messing gestanzte Kegelschnittzeichner, der, wie die Figur zeigt, zugleich Ellipse, Parabel und Hyperbel liefert. Die Ausführung ist gut, nur darf man die Parabel nicht ganz bis zum Ende benutzen, da sie hier geradlinig geworden ist. Auch trifft man mit Hilfe der Marken die Brennpunkte nur dann genau, wenn man statt des Bleistifts eine Nadel benutzt oder mit einer feinen Zeichenfeder arbeitet. Die Dimensionen sind gut gewählt, besonders weil auch die gleichzeitige Benutzung von Millimeterpapier zulässig ist. Der Preis von 75 Pfg. ist angemessen.

An dem durch die in natürlicher Größe ausgeführte Zeichnung veranschaulichten Modell bezeichnet:

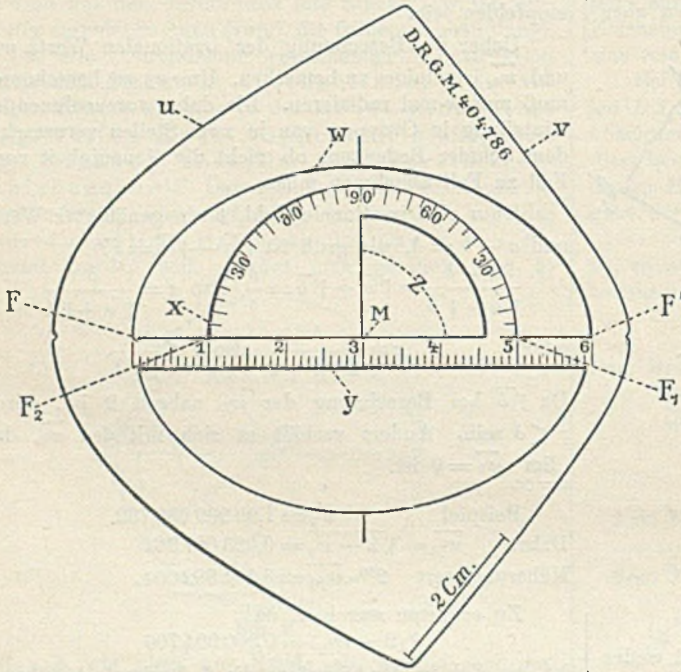
u einen Parabelbogen mit dem Brennpunkte F. Gleichung: $y^2 = 40\,x$.

v einen Hyperbelzweig mit dem Brennpunkte F', der Exzentrizität $e = 15$ mm und der Hauptachse $2a = 20$ mm (als greifbare Strecke markiert).

Gleichung: $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{125} = 1$.

v eine Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2.

Gleichung: $\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{500} = 1$.



x einen Halbkreisbogen mit Gradeinteilung und dem Mittelpunkte „M“.

y ein Lineal mit Millimetereinteilung.

z einen rechten Winkel mit dem Scheitelpunkte „M“.

A. T.

Bücher-Besprechungen.

Stein, A., Die Lehre von der Energie (Aus Natur und Geisteswelt, Bd. 257). 137 S., 13 Fig. Leipzig 1909, Teubner. Geh. 1 M, geb. 1,25 M.

Nach einer kurzen, von dem Streben der Menschen nach einer einheitlichen Weltanschauung ausgehenden Einleitung wird der die Physik als Einheitsband umfassende Energiebegriff festgelegt. Darauf werden die vier Hauptformen der Energie, die mechanische, die Wärmeenergie, die chemische und die magnetisch-elektrische Energie behandelt, unter welchen die Wärmeenergie den breitesten Raum einnimmt. Bei der chemischen Energie wird auch die für die biologischen Probleme wichtige physiologische Energie besprochen, indem die fundamentalen Untersuchungen Rubners und Atwaters in ausreichender Zusammenfassung mitgeteilt werden. Im dritten Kapitel wird ausgeführt, daß die Sonne für unsere Erde mit allem, was darauf wohnt, die einzige Energiequelle ist. Am Schlusse dieses lesenswerten Kapitels kommt der Verfasser, man möchte fast sagen leider, auch auf den sogenannten „philosophischen“ Energiebegriff. Da dieser durchaus phantastisch ist, kann es nicht wundernehmen, daß auch Stein ihm keine klaren und präzisen Sätze entlocken kann. Im folgenden Kapitel erörtert Stein die Beziehung des Energiegesetzes zum Satz von der Unmöglichkeit des perpetuum mobile, während das letzte Kapitel die Umwandlungsbedingungen der Energie von einer Form in die andere bespricht. Dabei kommt der Verfasser dann auch auf die Kreisprozesse und das Entropiegesetz. In einem Schlußwort wird endlich auch auf die Versuche hingewiesen, die psychischen Prozesse der energetischen Betrachtung zugänglich zu machen.

Was nun die Darstellung im einzelnen angeht, so muß mit Freude anerkannt werden, daß Stein die Energie physikalisch behandelt und dementsprechend durchweg verlangt, daß man die Energie mechanisch meßbar darstelle, daß man also von Energieumwandlung nur zu reden berechtigt ist, wenn man direkt oder indirekt imstande ist, die Energie vor und nach der Umwandlung zu messen. Auch das ist lobend zu erwähnen, daß die zahlreichen historischen Angaben durchweg richtig sind und der Bedeutung der energetischen Betrachtung entsprechen. Sehr richtig weist Stein darauf hin, daß das Energiegesetz als Erhaltungsgesetz das Resultat der Forschung und nicht der Ausgangspunkt der Entdeckungen war. Auf einige kleine Versehen möchten wir gern aufmerksam machen. Auf pag. 106 ist vergessen zu sagen, daß Kepler der erste war, welcher die Konstanz der Energie und die Proportionalität der kinetischen Energie mit dem Quadrat der Geschwindigkeit aussprach. — Die Behauptung (pag. 60), daß der Akkumulator ungeeignet sei, Fahrzeuge in Bewegung zu setzen, bedarf angesichts der zahlreichen elektrischen Droschken doch wohl einer Korrektur. — Während pag. 96 erklärt wird, daß das Energiegesetz auf das Universum angewandt werden dürfe, wird pag. 130 das Gegenteil behauptet. Im letzteren Falle handelt es sich freilich um das Entropiegesetz, von dem bezweifelt wird, daß man es auf das Planetensystem anwenden dürfe. Nun können wir sehr wohl die Behauptung erweisen, daß die Energieaufnahme des Sonnensystems aus der Fixsternwelt so gering ist, daß man diesen „Gewinn“ unbedenklich gleich 0 setzen kann (cfr. die Berechnung W. Thomsons) und darum dürfen wir das Entropiegesetz auf dies System anwenden. — Auf S. 45 oben muß es statt Wasser Wasserstoff heißen. Vielleicht ist das nur ein Druckfehler, deren noch einige vorhanden sind.

Im allgemeinen ist das Buch für gebildete Leser sehr empfehlenswert, weil es sich von spekulativen Betrachtungen, welche gerade auf diesem Gebiete mehr verwirrend als klärend gewirkt haben, wesentlich frei hält, und es reiht sich den besten Schriften der ganzen Sammlung würdig an. Für eine spätere Auflage möchten wir wünschen, daß der Verfasser auch die kleinen Konzessionen an die Vertreter der „Geistes“-Energie gänzlich beseitigte. Denn es ist sicher ein Gewinn für ein wissenschaftliches Buch, wenn es nur die Gebiete behandelt, welche auf wissenschaftlicher Grundlage behandelt werden können, d. h. in diesem Falle, wo der physikalische Energiebegriff anwendbar ist.

Hoppe.

* * *

Schütze, C., Die Kraftmaschinen. (Naturwissenschaftliche Bibliothek, Heller & Ulmer.) 235 S. mit vielen Figuren. Leipzig 1909, Quelle & Meyer. Geb. 1,80 M.

Für billiges Geld wird hier ein gutausgestattetes durchaus populäres Buch über Kraftmaschinen geboten. Mit großer Geschicklichkeit ist alles mathematisch formelhafte in dieser Darstellung vermieden, ohne daß die Richtigkeit dadurch gefährdet wäre. Durch graphische Darstellung von Abhängigkeiten und Analogien sucht der Verfasser für theoretische Auseinandersetzungen Verständnis zu erreichen und in den meisten Fällen wird es ihm gelungen sein Das Buch zerfällt in vier Hauptteile: die mechanischen Grundlagen, die Wind- und Wasserkraftmaschinen, die Wärmekraftmaschinen, die elektrischen Maschinen. Natürlich nehmen die Wärmemaschinen den breitesten Raum ein, sie werden darum in einer Reihe von Unterabteilungen ausführlicher behandelt, indem zunächst die Wärme, dann die Eigenschaften des Wasserdampfes, die chemischen Grundlagen für die durch Verbrennung zu gewinnende Arbeit, die Dampfkessel, die Kolbenmaschinen, die Steuerung der Dampfmaschinen, die Regulatoren, die Verbundmaschinen, die Arbeitsleistungen besprochen werden. Es folgen einige Angaben über praktische Ausführungen, wobei besonders die Steuerungen besprochen werden. Hier wäre eine etwas breitere Darstellung wohl erwünscht. Wir glauben nicht, daß die kurzen Bemerkungen über die Doppelschiebersteuerung und Präzisionssteuerung allgemein verständlich sind. Den Schluß dieses Abschnittes bilden die Dampfturbinen. Der Abschnitt über die Gaskraftmaschinen enthält alle auf Explosion beruhenden Maschinen, darunter auch den in neuester Zeit besonders wichtigen Dieselmotor. Daß bei der Fülle von Material keine erschöpfende Darstellung möglich war auf so engem Raume, ist selbstverständlich, immerhin wird das Gebotene zu weiterem Studium anregen. Hoppe.

* * *

Mehler, Dr. F. G., Hauptsätze der Elementar-Mathematik. Neubearbeitet von A. Schulte-Tigges, Direktor des Realgymnasiums in Cassel. Ausgabe A. 25. Aufl. 280 S. Berlin 1908, Gg. Reimer.

Schulte-Tigges-Mehler, Elementar-Mathematik. Ausgabe B. Oberstufe I: Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. 72 S. 1907. Ebenda. Oberstufe II: Arithmetik mit Einschluß der niederen Analysis, Trigonometrie und Stereometrie. 169 S. 1909. Ebenda. Oberstufe III: Differentialrechnung und analytische Geometrie der Ebene. 84 S. 1909. Ebenda.

Bei der Neuherausgabe des altbewährten Mehler, der aus der klassischen Schule Schellbachs hervorgegangen ist, hat der gegenwärtige Bearbeiter sich in dem Zwiespalt zwischen eigener und überkommener Auffassung dadurch zu helfen gesucht, daß er neben die dem Originale im wesentlichen treubleibende Ausgabe A ein eigenes Werk unter dem Titel Ausgabe B gesetzt hat, das den Mehler soweit benutzt, als Stoff und Form es gestatten.

Auch in der Ausgabe A finden sich eine Reihe fast ausnahmslos zweckmäßiger Aenderungen, die aber den gleichzeitigen Gebrauch älterer Auflagen nicht ausschalten. Zum Teil waren Ergänzungen durch die Lehrpläne gefordert, denen das Buch nun voll entspricht. Die Streichungen, die dadurch nötig waren, hätten vielleicht ohne Schaden noch etwas weiter ausgedehnt werden können, das alte, noch unter Schellbachs persönlicher Mitwirkung verfaßte Lehrbuch hatte nur 130 Seiten und konnte in manchem als Muster dienen. Immerhin ist es dankenswert, daß die erhebliche Stoffvermehrung nur eine relativ kleine Volumvermehrung erbracht hat. Die neuen Abschnitte: Wahrscheinlichkeitsrechnung, wiederholender Aufbau des arithmetischen Lehrgangs, Anleitung zum perspektivischen Zeichnen, Astronomie sind kurz, klar und wohlgelungen. In Einzelheiten, z. B. Einreihung der relativen Zahlen unter die rationalen — irrationale können doch auch negativ sein — kann man anderer Meinung sein; aber das Gebotene ist wissenschaftlich und pädagogisch brauchbar.

Von der Ausgabe B ist dem Berichterstatter nur die Oberstufe zugegangen. Ist diese auch erheblich umfangreicher wie der alte Mehler, so ist auch erheblich mehr an Stoff geboten. Im ersten Teil ist eine Verbindung der synthetischen Geometrie mit der neueren Geometrie einerseits, mit der darstellenden andererseits angestrebt. Eine rein projektive Geometrie haben ja andere, z. B. Herr Boeger, zu bieten gesucht; aber i. a. dürfte das Verfahren des Herrn Schulte-Tigges, obgleich es wissenschaftlich weniger hoch steht, eher auf Benutzung in der Schule rechnen können. Er beweist maßgeometrisch — die innere Teilung hätte wohl korrekter als negative bezeichnet werden können — und verallgemeinert dann durch den Projektionssatz auf die Kegelschnitte. Im übrigen ist die „synthetische“ Geometrie der Kegelschnitte eben die alte elementare Behandlung ohne Benutzung der Koordinaten, aber mit sehr eingehender Berücksichtigung der stereometrischen Entstehungsweise. Hier verdienen die sorgfältigen Zeichnungen besondere Anerkennung und der eingeschobene Abschnitt über Projektionslehre und Darstellende Geometrie findet an einem konkreten Beispiel weiteste Verwendung.

Der zweite Teil behandelt das Pensum der Oberklassen in Algebra und Arithmetik, ebener und sphärischer Trigonometrie und Stereometrie. Den geometrischen Teilen sind Uebungsaufgaben beigefügt. In den meisten Fällen wird man den Fortlassungen und Zufügungen beistimmen, allen kann man es eben nicht recht machen. Dieser liebt die diophantischen Gleichungen, die fehlen, jener die arithmetischen Reihen höherer Ordnungen, die geboten sind. Da der Verfasser selbst im dritten Teil eine Differentialrechnung gibt, wird mancher die Reihenlehre alten Stils im Teil II lieber überschlagen. Recht gelungen erscheint u. a. das Kapitel über numerische Gleichungen. Bei der Lebensversicherung hätte das Gesetz der großen Zahlen wohl schärfer hervorgehoben werden können, sonst ist die Darstellung kurz und klar und durch einige passende Uebungsaufgaben zweckmäßig erläutert. Die ebene Trigonometrie bietet auf knappem Raum viel. Zweckmäßig ist die goniometrische Ableitung der schwierigeren Dreiecksformeln. Den Schwärmern für spitzfindige Aufgaben ist die r-Methode geboten. Weise Beschränkung zeichnet die Stereometrie aus, in der sphärischen Trigonometrie ist noch etwas reichlich mit Formeln operiert, die praktisch entbehrlich sind. Hübsch sind die Aufgaben aus der Kristallographie, gut ausgewählt die aus der Astronomie.

Der dritte Teil enthält die Differentialrechnung und die analytische Geometrie der Ebene. Beide Abschnitte sind methodisch wohlgelungen und nicht zu umfangreich. Eigentümlich und recht brauchbar erscheinen gewisse Uebersichtstafeln, z. B. für $y' \; y'' \; y'''$ bei allen einfachen Funktionen. Die analytische Geometrie der Kegelschnitte ist wesentlich dadurch entlastet, daß die synthetisch leichter beweisbaren Sätze im 1. Teil erledigt sind. Auch die Oberstufe von Ausgabe B ist also ein brauchbares Schulbuch.

A. T.

* * *

Heis-Druxes, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. Teil 1 für U III, O III, U II. 115. Aufl. 285 S. Teil 2 für O II, U I, O I. 112. Aufl. 273 S. Köln 1910, Du Mont-Schauberg.

Druxes, Obl. Dr. J., Ausführlicher Lehrgang der Arithmetik und Algebra nach modernen Grundsätzen mit vollständigen Lösungen der Aufgaben der Sammlung von Beispielen und Aufgaben von Heis. Für Lehrer und Studierende. Bd. I. 445 S. Ebenda 1910.

Unter den älteren algebraischen Aufgabensammlungen hat die von Heis immer einen besonderen Rang eingenommen. Man spürte in ihr den Geist eines Mathematikers, der über seinem Stoff stand, der höhere Ziele verfolgte, als Schüler mit Kärnerarbeit zu belasten. Gewiß waren die Aufgaben schwer, manchmal zu schwer, aber sie waren nicht dieser Schwierigkeiten wegen gestellt, sondern weil der Lösende gezwungen werden sollte, tief einzudringen in mathematisch wichtige Probleme. Gelegentlich gab Heis auch schon direkt von solchen in Anfangsabschnitten Proben, für Schwache eine Klippe, aber für die guten Köpfe ein anspornender Lichtblitz. Es war das rechte Buch in der Zeit, wo auf den Schulen nur wenige wirklich Mathematik lernten, diese aber um so gründlicher und weitgehender. In dieser Gestalt paßt der alte Heis nicht mehr in unseren Schulbetrieb, wo eben alle, die nicht ganz hoffnungslos unfähig sind, eine gewisse Summe mathematischen Könnens und Wissens in sich aufnehmen müssen. Aber es wäre schade gewesen, wenn der Geist der Heisschen Aufgabensammlung ganz aus der Schule verschwunden wäre, nur war es ein schwieriges Unternehmen, das Buch zu modernisieren ohne ihm die alten Vorzüge zu rauben. Trotzdem ist es dem jetzigen Bearbeiter, Herrn Druxes, gelungen. Das war nur dadurch möglich, daß der Herausgeber sich in den Geist des Verfassers hineinversetzte. Nicht „Wie macht man es heute meistens?" hat er gefragt, sondern „Wie würde Heis heute eine Aufgabensammlung schreiben?" Wenn man das nicht beachtet, so wird man allerdings an manchen Stellen den Kopf schütteln. Hier scheint von Grund aus geändert, dort wieder merkwürdig zähe festgehalten. Gewiß, der alte Heis konnte nicht auf die Idee kommen, die allgemeinen arithmetischen Sätze an ganzen Zahlen zu beweisen, oder die Systeme quadratischer Gleichungen graphisch zu lösen — die Fortschritte von Wissenschaft und Methodik wären aber an ihm nicht spurlos vorbeigegangen, wenn er auch nicht alles, bloß weil es neu ist, gutgeheißen hätte. Natürlich kann man an mancher Stelle anderer Ansicht sein als der Herausgeber, auch von obigem Gesichtspunkt aus. Gerade in der Ausnutzung der graphischen Darstellung z. B. fühlt man in diesem Buch, ebenso wie fast ausnahmslos bei anderen Schulbüchern, das Tasten in ein noch unerprobtes Gebiet hinein. Hier sind wir tatsächlich alle Anfänger, denn noch ist kein Jahrzehnt seit den ersten Versuchen vergangen. Jeder ist meist von seinen Erfolgen zuerst befriedigt und macht es doch mit dem nächsten Schülerjahrgang anders. Was an guten Vorarbeiten vorlag, hat Herr Druxes übrigens benutzt. Daß er andererseits nicht alle Kapitel, die heute in üblem Geruch stehen, gestrichen hat, wird ihm doch auch dieser und jener danken. Wem die diophantischen Gleichungen, die Zahlenkongruenzen, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung nicht behagen, der kann sie eben fortlassen. Aus Geometrie und Physik ist vieles hineingebracht, was man sonst nicht in arithmetischen Aufgabensammlungen sucht, beim Kurszettel wird manchem vielleicht eine Gänsehaut überlaufen. Modernes Leben pulsiert in dem Buch — das war aber auch seinerzeit im alten Heis, und so ists eine brauchbare und wertvolle Neubearbeitung. Auch das ergänzende Handbuch, das nur für den Lehrer und nicht für den Schüler bestimmt ist, ist in seinem I. Teil, der allein bis jetzt vorliegt, als wohlgelungen zu bezeichnen. Manches ist ja ein wenig breit dargestellt, anderes liegt etwas weit von dem gewöhnlichen Schulbetrieb ab. Aber vielfach hat der Verfasser auch gerade Dinge einmal gründlich erörtert, nach denen die Schüler gern fragen und über die sich der Lehrer nicht so leicht orientieren kann. Da sei z. B. auf die Streitfrage über die Logarithmen negativer Zahlen hingewiesen. Weniger gefallen hat dem Referent der Abschnitt über den logarithmischen Rechenschieber. Sicher gehört er in das Buch und die Bekanntschaft nicht nur, sondern die Vertrautheit mit dem Gebrauch dieses für den Techniker längst unentbehrlichen Hilfsmittels sollte für Lehrer und Schüler der Oberrealklassen obligatorisch sein. Aber zur ersten Erläuterung sind einfachere Systeme als das von Nestler-Rietz schon wegen des Preises — Pappschieber sind allerdings wertlos — vorzuziehen. Die zeitraubende künstliche Bestimmung der Stellenzahl sollte ganz fortbleiben. Gerade in der Ueberschlagsrechnung liegt ein großer pädagogischer Wert und sie sichert allein gegen grobe Irrtümer aus falsch angewandten Regeln. Dafür könnten die Manipulationen eingehender behandelt und durch mehr Beispiele erläutert werden. Der Abschnitt über Isoplethen und Logarithmenpapier liegt ja vorläufig der Schule wohl noch fern, für den Lehrer ist es aber eine angenehme Orientierung. Besonders sei auf § 49 (Zahlensysteme) aufmerksam gemacht. Hier findet sich vieles, was schon früher verwandt werden kann. Ueberhaupt sollte das Buch nicht als ein Schlüssel für die einzelnen Paragraphen verwandt werden, wenn es auch da gute Dienste tut, sondern als Ganzes dem Studium jüngerer und älterer Kollegen empfohlen werden. Die ersteren werden mehr methodisch, die letzteren wissenschaftlich profitieren. Man darf dem 2. Teil vertrauensvoll entgegensehen.

A. T.

* * *

Physik für die Oberstufe, mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse norddeutscher Lehranstalten, herausgegeben von Prof. Dr. Max Nath und Joh. Kleiber. Oldenbourg, Berlin und München 1910.

Das vorliegende Buch hat sich schon in seinen früheren Auflagen viele Freunde erworben, während es von anderer Seite bei aller Anerkennung seiner Vorzüge als Ganzes Ablehnung erfuhr (so z. B. in der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, herausgegeben von Poske). Diese zwiespältige Beurteilung ist in der eigenartigen Anlage des Werkchens begründet: die Erarbeitung der Resultate ist meist nur kurz skizziert, hier und da fehlt sie ganz. Dafür sind die Ergebnisse außerordentlich klar und wohlgeordnet zusammengefaßt. Diese scharfe Gliederung des Stoffes bis ins Einzelne herab, die in ihrer Wirkung durch äußere Mittel wie Hervorheben des Wesentlichen durch Fettdruck oder Unterstreichen, sowie eine große Zahl sehr anschaulicher, z. T. geradezu drastischer Abbildungen noch unterstützt wird, erleichtert dem Schüler ungemein das Einprägen des Gelernten, weshalb das Buch schon in seinen früheren Auflagen von der Kritik als ein in dieser Eigenart geradezu einzigartiges „Lernbuch" anerkannt worden ist. Wohl hat das Kleibersche Buch auch die Fehler seiner Vorzüge, und gerade hier setzt die ablehnende Kritik ein, die ihm von einigen Seiten zu Teil geworden ist: in dem Bestreben, alles möglichst einfach und klar darzustellen, vereinfache es, so wurde ihm vorgeworfen, den Stoff selbst, so daß der Schüler zu der falschen Auffassung kommen müsse, daß die Ergebnisse der Physik mit Leichtigkeit gewonnen worden seien und jederzeit ohne Mühe bestätigt werden könnten; drastisch ausgedrückt: es stelle für den Schüler eine Eselsbrücke dar, die ihm jede Schwierigkeit abnehme. Ich muß demgegenüber dem Neuherausgeber (Nath) recht geben, wenn er im Vorwort betont, daß, falls diese Wirkung sich zeige, die Schuld den Unterricht und nicht (oder wenigstens in geringerem Maße) das Buch treffe. Sache des Lehrers sei es, auf die mannigfachen Schwierigkeiten bei Erarbeitung der physikalischen Forschungsergebnisse aufmerksam zu machen. Wird so durch den Unterricht der kritische Sinn der Schüler geweckt und dauernd wach erhalten, dann scheint mir die Gefahr nicht vorzuliegen, daß die kritischen Gedankengänge sich verflüchtigen und nur „Formeln und Schablone" übrig bleiben, zumal wenn der Schüler in physikalischen Uebungen, wie sie ja immer mehr sich verbreiten, jene Schwierigkeiten an sich selbst erlebt. Jeder erfahrene Lehrer muß doch zugeben, daß er — nicht nur bei schwachen Schülergenerationen — bei der ersten Inangriffnahme eines schwierigeren Gebiets immer zu stärkerem Schematisieren genötigt ist, wenn er erreichen will, daß zunächst einmal die Hauptlinien und Grundzüge des Gebietes erfaßt werden. Ein Rest von solchem berechtigten Schematisieren bleibt auch bei der genaueren Behandlung, jedenfalls in der Schule, oft sogar in der hohen Wissenschaft. Ob das Kleibersche Buch in diesem Schematisieren zu weit gehe, darüber kann man verschiedener Ansicht sein. Ich für meine Person glaube, daß es sich als recht brauchbar erweisen wird unter der Voraussetzung, daß sein Gebrauch durch einen kritisch gerichteten, auf induktiver Grundlage aufgebauten Unterricht vorbereitet und ergänzt werde.

Einen besonderen Vorzug des Buches sehe ich in der großen Anzahl von Aufgaben, die auf die einzelnen Abschnitte verteilt sind. Sie sind sehr geschickt den mannigfaltigsten Gebieten der Natur und Technik entnommen, beziehen sich fast ausnahmslos auf einfache, leicht zu verwirklichende Fälle und regen gerade dadurch den Schüler zum Selbstexperimentieren an, wie sie z. T. ja auch unmittelbar als „Experimentierfragen" gestellt sind. Ebenso ist der kleine historische Anhang dankbar zu begrüßen.

Bei der Knappheit der Darstellung ist eine erfreuliche Reichhaltigkeit des Inhalts möglich. Als Beispiel nenne ich die Darstellung der Zusammensetzung von Kräften in einer Ebene mit Hilfe des Kräftepolygons und Seilpolygons, sowie die Behandlung des Kräftepaares.

Zum Schluß noch einige kleine Ausstellungen. In der Mechanik ist der Massenbegriff ohne Definition eingeführt (§ 3). Die auf S. 17 sich findende Stelle, wonach das Produkt $M \cdot a$ auch „Trägheitswiderstand" der Masse genannt wird, ist zum mindesten anfechtbar, da ja die Masse eines Körpers vielfach als Maß für seinen Trägheitswiderstand gilt. Die Erledigung des „allgemeinen Falles" der Energieumsetzung in der Mechanik (S. 28) schließt nach meiner Meinung eine petitio principii in sich. Die ganze Behandlung des spezifischen Gewichtes an das Archimedische Prinzip anzuschließen nur aus dem Grunde, weil dieses eine bequeme Methode der Volumenmessung darbietet, ist zwar vielfach üblich, scheint mir aber sachlich unberechtigt und für die Schüler irreführend zu sein. Die willkürliche Annahme, die in der § 70 gegebenen Definition der Kalorie steckt, und die Möglichkeit ihrer Prüfung an der Erfahrung müßten angedeutet werden. Quantitative Beziehungen, deren Herleitung mit den Hilfsmitteln eines Schulbuches nicht möglich ist, sollten möglichst vermieden werden: die Poissonsche Formel für die adiabatische Zustandsänderung eines Gases könnte also wohl fehlen. Bei der Wärmeleitung wäre wohl ein Hinweis darauf nicht unangebracht, daß alle Versuche, die nur ein schnelleres Fortschreiten der Temperatur in dem einen von zwei Körpern zeigen, einen Vergleich der Wärmeleitfähigkeit nur dann zulassen, wenn man entweder die spez. Wärme berücksichtigt oder den stationären Strömungszustand abwartet. Die Behauptung (S. 222), strahlende Wärme habe die Eigenschaft, durchsichtige Körper zu durchdringen, ist in dieser Allgemeinheit falsch (Glas!). Bei der Herleitung der Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elastischer Wellen (S. 223) findet sich ein Druckfehler: in $p = \frac{L}{\triangle} \cdot E$ muß der Bruch umgekehrt sein, also $\frac{\triangle}{L}$. Bei der Darstellung der Reflexion von Wellen bedürfen die Ausdrücke „dichter" und „dünner" nach meinem Empfinden einer Erläuterung. Die Erklärungen der Reflexion und Brechung von Wellen nach Huygens sollten entweder beide in der Wellenlehre oder beide in der Optik behandelt werden. Figur 388 ist falsch: der Punkt A erscheint nicht einfach senkrecht gehoben, sondern auch nach dem Beschauer hin verschoben. Der Inhalt des § 106 wäre naturgemäßer an § 124 anzuschließen; er nimmt unnötigerweise vorweg, was aus § 124 als natürliche Folgerung sich ergibt.

Trotz dieser kleinen Mängel, die ja bei einer Neuauflage sich leicht beseitigen lassen, glaube ich, daß das Buch sich bei Ergänzung durch einen geeigneten Unterricht an der Hand des Schülers gut bewähren wird. Dr. Lony (Hamburg).

* *
*

Simmel, Georg, Hauptprobleme der Philosophie. Leipzig 1910, G. J. Göschensche Verlagsbuchhandlung.

Der vorliegende Band der verdienstvollen Sammlung Göschen, der die stolze Zahl 500 trägt, verdient allgemeines Interesse sowohl durch die Wahl wie die Behandlung des Themas. Will doch das Buch Hauptprobleme der Philosophie nicht als fertige, zugespitzte Resultate des Denkens in logisch geschlossener Form darstellen, wie es die meisten Lehrbücher der Philosophie tun, sondern uns einen Einblick geben in „die lebendig-kontinuierliche Strömung des Schaffensprozesses". Es will uns die Probleme und ihre Lösungen nicht nur mitteilen, sondern nachempfinden lassen.

Diese Absicht ist dem Verf. zweifelsohne oft gelungen. Besonders glänzend erscheint mir in dieser Hinsicht im zweiten Kapitel (Sein und Werden) die Darstellung der Parmenideischen Seinsphilosophie und ihrer Beziehung zur Substanz Spinozas. — Im vierten Kapitel (Von den idealen Forderungen) gefällt mir vor allem eine vorzügliche Kritik des Eudämonismus und die Skepsis des Verfassers gegenüber einer befriedigenden Lösung des Problems vom „Konflikt der Pflichten". — Für uns Naturwissenschaftler hat der erste Teil des Buches (Vom Wesen der Philosophie) besonderes Interesse, weil Simmel in ihm eine Wertschätzung metaphysischer Systeme jenseits der in ihnen enthaltenen objektiven Wahrheit zu geben versucht. Für ihn besitzen diese Spekulationen noch heute ungeschwächten Wert als die verschiedenartigen Reaktionen der verschiedenen Typen menschlicher Geistigkeit gegenüber der Welt. Sie entspringen aus dem unstillbaren Sehnen der menschlichen Seele, die Welt als Einheit zu schauen. Weil sich aber die Welt in verschieden veranlagten Menschen verschieden spiegelt, müssen und dürfen diese Einheitssysteme verschieden, ja entgegengesetzt ausfallen. Wenn sie mit der objektiven Wirklichkeit in Widerspruch geraten, so ist das nicht zu verwundern, weil in ihnen der kleine menschliche Geist die Lösung einer unendlichen Aufgabe versucht. Die verschiedenen geistigen Typen werden das ihnen zusagende System ersehnen und lieben, auch wenn es in vielen Einzelheiten widerlegt ist. — So will dies Kapitel des Buches eine Rechtfertigung der Metaphysik auch für unsere Tage geben.

Leider fehlt meiner Meinung nach dem Buch ein wichtiges Kapitel, — ein Kapitel, das der Naturwissenschaftler besonders vermißt —, das von dem Zustandekommen unserer Erfahrung, vom Erkenntnisproblem handeln müßte. Daß dieses Hauptproblem vom Verfasser wirklich lange nicht genug gewürdigt ist, beweist die Tatsache, daß Demokrit, Locke, Hume im ganzen Buche nicht erwähnt werden, daß vor allem Kant nur als Moralphilosoph auftritt. — Von der erkenntniskritischen Tat Kants kaum ein Wort! — Wohl aber eine 14 Seiten lange Darstellung Hegelscher Gedanken! — Infolgedessen ist die Bedeutung, welche die Naturwissenschaften für die Philosophie besitzen, weil sie in wichtigen und erfolgreichen Perioden der Geschichte der Philosophie im Mittelpunkt des Interesses standen, gar nicht gewürdigt worden. Es mag sein, daß Philosophen wie Mach, Avenarius, Riehl in den letzten Jahrzehnten die Naturwissenschaft zu einseitig in den Vordergrund gestellt haben, so daß eine gemäßigte Gegenströmung, wie sie etwa Dilthey und Windelband befürworteten, wohl verständlich ist. Aber als ein schwerer Fehler eines Buches, das Hauptprobleme der Philosophie behandeln will, muß es erscheinen, wenn es allein logisch-zergliedernde und spekulative Elemente benutzt.

Eine „empirisch wohlfundierte, von den Tatsachen behutsam aufsteigende Metaphysik", wie sie heute versucht wird, und die auch für viele Naturforscher Wert haben mag, setzt doch wohl vor allem eine gründliche naturwissenschaftliche Kenntnis zu ihrer Fundamentierung voraus. Ohne sie könnte sonst auch die neue Metaphysik nur allzu schnell wieder im „Reich der ideellen Inhalte" wie Hegels „objektiver Geist" phantasieren.

Dr. P. Groebel (Hamburg).

Kowalewski, G., Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen. Ein Lehr- und Uebungsbuch für Studierende zur Einführung in die Infinitesimalrechnung. VIII u. 383 S., gr. 8⁰, mit 127 Fig. Leipzig 1910. W. Engelmann. Geb. 16.50 M.

Es ist wohl auffallend, wenn ein und derselbe Verfasser zwei Jahre nach Veröffentlichung eines Werkes („Grundzüge der Differential- und Integralrechnung", Leipzig 1908, Teubner) über denselben Gegenstand wieder ein Buch bei einem anderen Verleger herausgibt. Denn der jetzt gewählte Titel tut recht wenig zur Sache. Er soll nur den neuen Standpunkt etwas andeuten, den der Verfasser hier einnehmen will. Er will das Interesse des Lernenden beleben durch Hereinziehung historisch-persönlicher Momente. Wenn man aber selbst Anhänger eines solchen Verfahrens ist, sieht man enttäuscht, wie wenig es eigentlich hier zur Geltung kommt. Ueber ein paar Notizen kommt der Verfasser eigentlich nicht hinaus. Hierfür bietet die allzuhäufige Verweisung auf die Ostwaldsche Klassikersammlung keinen Ersatz. Wenn wir nun aber davon absehen, so ist die Darstellung hier, wie in den „Grundzügen", bei aller modernen Strenge eine recht flüssige und der Verfasser vermeidet es geschickt, sich zu sehr mit seinem früheren Buche zu berühren. Einem ganz Unerfahrenen möchten wir das Buch aber nicht empfehlen. Abgesehen davon, daß die ε-Beweise, mit denen sofort begonnen wird, doch eine ziemlich große Abstraktionsfähigkeit voraussetzen, werden auch die Grundzüge der analytischen Geometrie und die mehrfach benutzten Determinanten als bekannt angenommen. Bezüglich der letzteren verweist der Verfasser allerdings auf seine 1909 bei Veit & Cie. (Leipzig) erschienene „Einführung in die Determinantentheorie". Dem Lehrer aber, der etwa schon Infinitesimalrechnung zu unterrichten hat, empfehlen wir das Buch sehr. Er wird aus ihm in jedem Falle ermessen können, was die strenge Darstellung erfordern würde. Das wird er dann mit der Fassungskraft seiner Schüler in Ausgleich zu bringen haben. Figuren der im Text behandelten Kurven dürften mehr vorhanden sein. Statt „Keppler" sollte man „Kepler", statt „de Beaune" „Debeaune" schreiben.

H. Wieleitner (Pirmasens).

* * *

Dr. Ad. Koelsch, Von Pflanzen zwischen Dorf und Trift. Ein Buch für Schönheitssucher. Preis 1 M.

Der Verfasser führt uns zunächst an einem Tauwettertage hinaus und zeigt uns die ersten Frühlingsblumen. An Sommer- und Herbsttagen wandern wir mit ihm, um die Kinder Floras auf unbebautem Lande an trockenen und nassen Stellen zu beobachten. Dann betrachten wir mit ihm das Pflanzenleben des bebauten Landes — Monat für Monat. Besonders lehrreich sind die biologischen Belehrungen, von denen ich folgende herausgreifen will: Biologie der Blütenschließbewegungen, Kampfmittel der Pflanzen gegen die Dürre, Jungfernzeugung im Pflanzenreiche, Bedeutung des Anthozyan in neuer Beleuchtung. Der Leser wird vielfach zu eigenem Forschen angeregt. Das Buch sei angelegentlichst empfohlen, ebenso wie desselben Verfassers: „Biologische Spaziergänge durch die Kleintier- und Pflanzenwelt."

F. Hoeber (Bochum).