Jahrgang XVII. 1911. No. 7.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe** und **Friedrich Pietzker**,
von diesem geleitet bis 1909, zurzeit herausgegeben von
Prof. Dr. **A. Thaer**,
Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentore in Hamburg.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Dir. Thaer, Hamburg 36, erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (5 Mk. Jahresbeitrag) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 8 Nummern ist 4 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Die Behandlung des Planktons im Schulunterricht.

Vortrag, gehalten auf der XX. Hauptversammlung in Münster i. W.
von Prof. Dr. R. v. Hanstein (Gr.-Lichterfelde).

Die Frage, in welcher Weise das Plankton im biologischen Unterricht der höheren Schulen zu berücksichtigen ist, ist in den letzten Jahren vielfach Gegenstand der Erörterung gewesen, seitdem O. Zacharias*) in einer Reihe von Schriften auf die große Wichtigkeit und auf die vielfache unterrichtliche Verwertbarkeit dieses Teiles der Biologie nachdrücklich hingewiesen hat. Zacharias gibt wiederholt der Ueberzeugung Ausdruck, daß das Plankton besser als jede andere Lebensgemeinschaft geeignet ist, den Schüler in das Wesen der Biozönose einzuführen; daß die gegenseitigen Beziehungen der Organismen, die ja das Wesen der Biozönose bilden, hier klarer erkennbar seien, sich dem Beobachter leichter darbieten als in anderen Gemeinschaften; daß die Anpassungen an das Wohnelement sich unmittelbar ergeben, daß die Bedeutung des Planktons im Gesamthaushalt der Natur, die Wichtigkeit desselben für die Ernährung der größeren Wassertiere, die hinwiederum dem Menschen zur Nahrung dienen, einen bequemen Einblick in den Gesamtstoffwechsel der Natur gestatten, daß die Durchsichtigkeit vieler planktonischer Lebewesen sie zu trefflichen Objekten für das Studium der tierischen Organe und ihrer Funktionen machen, und daß endlich die Lebewelt des Planktons auch der ästhetischen Naturbetrachtung eine Fülle von Anregungen gebe. Zacharias ist nicht dabei stehen geblieben, für seinen Gegenstand durch Wort und Schrift zu werben, er hat auch in dankenswerter Weise durch Einrichtung von Ferienkursen all' denen, die sich in die Kenntnis der Planktonorganismen einarbeiten wollen, Gelegenheit hierzu gegeben, und seine Bestrebungen haben den Erfolg ge-

*) O. Zacharias, Das Plankton als Gegenstand eines zeitgemäßen biologischen Schulunterrichts. Arch. f. Hydrobiol. Bd. 1, 1905, 247—344; — Das Plankton als Gegenstand der naturkundlichen Unterweisung in der Schule. Leipzig 1907, Thomas; 2. Aufl. 1909; — Das Süßwasserplankton. Berlin und Leipzig 1907, Teubner (Aus Natur und Geisteswelt, Bd. 156); — und eine Anzahl weiterer kleinerer Veröffentlichungen im Arch. f. Hydrobiologie und Planktonkunde.

habt, eine ganze Reihe von Lehrern an Schulen verschiedenster Art auf die Bedeutung des Planktons aufmerksam zu machen und seiner Anschauung von dem didaktischen Werte gerade dieser Biozönose zahlreiche Anhänger zu gewinnen.

Die hohe Wertschätzung des Planktons als Lehrgegenstand für Schulen spricht sich in einer Reihe teils im Archiv für Hydrobiologie, teils in den Monatsheften für den naturwissenschaftlichen Unterricht veröffentlichten Aufsätzen aus. So sagt z. B. E. Krüger*): „Wohl keine andere Biozönose zeigt die Wechselwirkung zwischen Tier und Pflanze gleich vorzüglich, keine gleich großartig die Schönheit organischer Gebilde auf so kleinem Raum den erstaunten Blicken als das Plankton“, er will dasselbe als „Typus einer Biozönose“ behandelt wissen, und ein so klar denkender und sorgfältig abwägender Schulmann wie B. Landsberg**) empfiehlt die Behandlung des Planktons als „einführende Lebensgemeinschaft“, er sieht in ihr eine Biozönose „von ganz besonderer Abgeschlossenheit, Klarheit der Beziehungen und Zugänglichkeit“, die es ermöglicht, „durch exakte Methoden Gesetzmäßigkeiten des Naturwaltens in der belebten Natur nachzuweisen“. Mehrfach ist auch schon über praktische Versuche auf diesem Gebiete berichtet worden, und auch diejenigen, die nicht in allen Punkten den Anschauungen von Zacharias folgen können, haben seinen Schriften manche Anregung entnommen.

Die nachfolgenden Ausführungen, in denen ich bei grundsätzlicher Anerkennung der großen Wichtigkeit dieses Gegenstandes, einigen meines Erachtens zu weitgehenden Aussprüchen von Zacharias widersprechen muß, beruhen auf mehrjähriger Erfahrung im Unterricht in der Prima des Königstädtischen Realgymnasiums in Berlin. Vorab möchte ich betonen, daß das, was im Unterricht und in praktischen Uebungen erreicht werden kann, natürlich sehr wesentlich von gewissen äußeren Bedingungen abhängt. Zuerst von der verfügbaren Zeit, dann aber auch von der Leichtigkeit der Materialbeschaffung. In letzterer Beziehung scheint Berlin in verhältnismäßig günstiger Lage zu sein: eine reiche Fülle von größeren und kleinen Teichen, Seen und Wasserläufen aller Art umgibt die Stadt von allen Seiten; andererseits aber bedarf es, um zu diesen Seen zu gelangen und die Schüler durch eigene, direkt an Ort und Stelle gewonnene Anschauung in die Lebewelt des Planktons einzuführen, doch immer zeitraubender Bahnfahrten. Im Innern der Stadt fehlen geeignete Wasserbecken ganz, und die in den Parkanlagen befindlichen kleinen Teiche können — falls von der Parkverwaltung die Benutzung derselben zu Unterrichtszwecken gestattet wird — wohl manches liefern, sie sind aber gerade für die Demonstration der nur in größeren Gewässern wahrzunehmenden Erscheinungen — Gegensatz von Uferformen und echtem Limmplankton, von Oberflächen- und Tiefenplankton usw. — nicht ausreichend. Da nun die Zeit unserer Primaner gegenwärtig recht vielseitig besetzt ist, der naturwissenschaftliche Unterricht auch noch auf anderen Gebieten durch geologische Ausflüge, Besuche von Fabrikanlagen usw. Zeit in Anspruch nimmt, so lassen sich Exkursionen zum Zweck an Ort und Stelle vorzunehmender Planktonstudien nicht allzu oft unternehmen.

Kommt zudem, wie dies an unserer Anstalt zurzeit noch der Fall ist, auf jeden Schüler nur eine wöchentliche Uebungsstunde, so kann in dem einen Sommer, der für die Süßwasserbiologie zur Verfügung steht, nicht allzu viel Stoff wirklich durchgearbeitet werden. Kleinere Orte, die unmittelbar an einem größeren See liegen, und Anstalten, die in der Einführung der Biologie in die oberen Klassen schon weiter vorgeschritten sind, können in dieser Beziehung naturgemäß mehr leisten.

Bevor ich nun darlege, wie das Plankton etwa in den Unterrichtsplan ohne allzu große Schwierigkeit eingeführt werden kann, muß ich auf einige der von Zacharias und den anderen genannten Autoren zugunsten des Planktons ausgeführten Gedanken etwas näher eingehen. Zunächst halte ich es nicht für richtig, daß das Plankton als Biozönose unsern Schülern leichter erkennbar und verständlich sei als etwa solche Lebensgemeinschaften wie Wald, Feld, Wiese, Moor usw. Vor allem ist das Studium des Planktons nur mittels des Mikroskops ausführbar. Was wir in der Ausbeute des Planktonnetzes mit unbewaffnetem Auge sehen, ist recht wenig. Die Schüler können also auf diesem Gebiete nicht zu eigenem, selbständigem Beobachten im Freien angeleitet werden, wie dies in den anderen erwähnten Biozönosen der Fall ist. Wenn nun eine wesentliche — heutzutage namentlich in der Großstadt durchaus nicht leichte — Aufgabe unseres Unterrichts darin besteht, unsern Schülern wieder die Augen zu öffnen für das Naturleben, sie womöglich dahin zu bringen, daß sie auch auf allein oder mit Genossen unternommenen Ausflügen dem Tier- und Pflanzenleben ihre Aufmerksamkeit schenken, so kommt für diese Erziehung das Plankton nicht in Betracht. Dasselbe gilt von den biozönotischen Beziehungen und dem Gesamtstoffwechsel. Ueber Ernährung und Wechselbeziehung der Organismen lassen sich in Wald und Flur viel leichter

*) Ueber das Plankton und seine Verwendung im naturkundlichen Unterricht. Arch. f. Hydrobiol. IV, 276—86.

**) Didaktik der Botanik. Leipzig und Berlin 1910, Teubner. S. 174—190.

Beobachtungen machen als auf dem Gebiet des Planktons; daß im Walde andere Tier- und Pflanzenformen vorkommen als auf der Wiese oder im Ackerfeld, daß Moor und Heide ihre charakteristische Form beherbergen, drängt sich dem Auge, das zu beobachten gelernt hat, ohne weiteres auf, während es beim Plankton längerer mikroskopischer Beobachtungen bedarf, um zu gleichem Ziel zu gelangen. Mit Recht hat Schiller*) schon vor einigen Jahren darauf hingewiesen, daß die Ernährung der Planktontiere doch nur in seltenen Fällen einmal direkt beobachtet wird. Wie vielfach beobachten wir dagegen im Walde die Ernährung der Raupen, vieler Käfer, Vögel, mancher Säugetiere. Also ich muß gerade im Gegensatz zu Zacharias die größere Unmittelbarkeit der Anschauung für die auch ohne Mikroskop zu beobachtenden Biozönosen in Anspruch nehmen. Was der Schüler selbst über diese Verhältnisse am Plankton beobachten kann, ist recht wenig. Und dasselbe möchte ich von den Anpassungserscheinungen behaupten. Ich stimme Zacharias — im Gegensatz zu Schiller — durchaus zu, wenn er sagt, daß der Begriff des Formwiderstandes und die Bedeutung der Schwebapparate einem reiferen Schüler durchaus klargemacht werden können. Aber eigene Beobachtung und eigenes Denken wird ihn so leicht nicht darauf führen; selbst „erarbeiten" kann er sich diese Begriffe nicht. Hat es doch recht lange gedauert bis die Wissenschaft dazu kam, das Wesen dieser Anpassungen und ihre Beziehungen zu den Verhältnissen des Wohnelements zu erkennen. Die Variabilität mancher Planktonten, wie z. B. der Hyalodaphnien, im Laufe des Sommers, und die feinen Anpassungsbeziehungen zwischen diesen Formveränderungen und der Aenderung der Viskosität des Wassers, wie sie sich aus den neueren Planktonforschungen ergeben haben, gehören zweifellos zu dem Interessantesten, was die Biologie uns bietet, aber das kann vom Schüler nicht in wenigen Unterrichtsstunden „erarbeitet" werden; wollen wir ihm einen Einblick in diese sehr feinen Beziehungen gewähren — und ich meine, daß wir das tun sollen — so müssen wir ihn selbst dazu führen. Dann aber kommt diesen Anpassungen in didaktischer Beziehung keinerlei besonderer Vorzug vor anderen zu. Um die Punkte, in denen ich mit Zacharias nicht übereinstimme, zunächst alle zu erledigen, will ich noch hinzufügen, daß auch die Durchsichtigkeit der Planktonten und die hierdurch erleichterte Erkenntnis ihres Körperbaues meist durch ihre geringe, immer auf das Mikroskop als unentbehrliches Hilfsmittel hinweisende Größe aufgewogen wird, und daß die Planktonwesen uns zwar fraglos eine Fülle schönster und zierlichster Formen und Strukturen zeigen, daß aber die ästhetische Naturbetrachtung doch auch in Wald und Feld, Wiese und Moor reiche Anregung findet, so daß hierfür das Plankton nicht unentbehrlich wäre.

Trotz der hier erörterten Meinungsverschiedenheiten bin ich aber mit Zacharias und all denen, die sich über diese Frage geäußert haben, darin einverstanden, daß die Bedeutung des Planktons im Naturleben eine so große und wichtige ist, daß der biologische Schulunterricht dasselbe durchaus nicht unberücksichtigt lassen darf. Kann ich dem Plankton als Biozönose nicht die unbedingte Vorzugsstellung einräumen, die Zacharias*) und Krüger ihm zuweisen wollen, so halte ich es doch für einen so außerordentlich wichtigen Gegenstand, daß ich an den sechs mir gegenwärtig in den oberen Klassen zur Verfügung stehenden Semestern biologischer Uebungen eins ganz auf die Biologie des Süßwassers, insbesondere das Plankton verwende. Selbstverständlich müssen dabei die von Zacharias hervorgehobenen wichtigen Punkte: die Veränderungen im Laufe des Jahres, die Variabilität einzelner Formen, die Schwebevorrichtungen, die biozönotischen Beziehungen Berücksichtigung finden, nur wird man darauf verzichten müssen, alles selbst beobachten zu lassen. Die Veränderung in der Zusammensetzung des Planktons läßt sich natürlich nur durch in Abständen von einigen Wochen aufeinanderfolgende Fänge nachweisen. Um dabei die Schüler ohne zu große Inanspruchnahme ihrer Zeit alle zu beteiligen, teile ich die Klasse in Gruppen von vier bis fünf Schülern, deren je eine an einer solchen Exkursion teilnimmt. Auf diese Weise erhält jeder einen Einblick in die Fangmethode, während jedesmal die Ausbeute, soweit möglich, zur Bearbeitung in der nächsten Uebungsstunde aufbewahrt wird. — Ich möchte gleich hier hinzufügen, daß von jedem Planktonfang sich eine recht große Menge interessanter und den Schülern neuer und lehrreicher Formen recht gut mehrere Tage lebend erhalten läßt, ja, die Unterschiede zwischen Fängen an der Oberfläche und in einigen Metern Tiefe treten dann noch recht charakteristisch hervor. Es ist also auf diese Weise möglich, das unter Beteiligung einiger Schüler gewonnene Material der Beobachtung aller wenigstens zum großen Teil zugänglich zu machen. Es wird dabei möglich sein, die

*) Die Originalarbeit liegt mir nicht vor, ich zitiere nach einer kritischen Besprechung von Zacharias, Arch. f. Hydrobiol. V, 47 ff.

*) Sowohl Zacharias als Krüger verwahren sich dagegen, daß sie das Plankton zum alleinigen Gegenstand des biologischen Unterrichts machen, es in den Mittelpunkt desselben stellen wollen; daß sie ihm aber den übrigen Biozönosen gegenüber eine weitgehende Vorzugsstellung einräumen, geht aus den zitierten und aus vielen anderen Stellen ihrer Schriften deutlich hervor.

Schüler auf die Veränderungen in der Zusammensetzung hinzuweisen, ja diese von ihnen selbst herausfinden zu lassen. Daß aber ein und dieselbe Art zu verschiedenen Zeiten in verschiedenen Formen auftritt, das wird sich nicht direkt beobachten lassen, es sei denn, es spielte ein glücklicher Zufall uns Individuen in die Hand, die anders gestaltete Nachkommen im Brutraum bergen. Fänden wir z. B. an einer Stelle, an der vor einigen Wochen Hyalodaphnien mit stumpfem Kopf und gedrungener Gestalt gefangen wurden, später solche von gestreckter Form mit spitzem Kopf, so wird der Schüler diese natürlich — gerade wie lange Zeit die systematisch arbeitenden Forscher — für verschiedene Arten halten, gerade wie er gewohnt ist, auf derselben Wiese im Hochsommer andere Pflanzen blühen zu sehen als im Frühjahr oder im Herbst. Daß es sich hier um eine zyklische Variation handelt, kann in diesem Fall nicht selbst beobachtet werden; wollen wir also unsern Schülern dieses vorzügliche Beispiel von Anpassung nicht ganz vorenthalten, so dürfen wir uns uns nicht scheuen, unsere Unterweisung hier einmal „in Mitteilungsunterricht verflachen“ zu lassen. Daß dabei der Begriff des Formwiderstandes durch passende Beispiele aus der Erfahrung des Schülers — wie sie z. T. Zacharias selbst angegeben hat — zu klarem Verständnis gebracht werden muß, bedarf keiner besonderen Erwähnung.

Was das Studium des Planktons nun in der Tat in ganz besonders klarer Weise erkennen läßt, ist die Verbreitung der kleinsten Organismenformen. Es ist in der Tat ein „Erlebnis“ für die Schüler, wenn sie zum ersten Mal das Gewimmel der winzigen Organismen in der aus dem Planktonnetz entleerten Flüssigkeit mit eigenen Augen sehen. Aber auch der in Laienkreisen noch immer vorhandenen übertriebenen Vorstellung, daß in jedem Wassertropfen „Hunderte“, ja „Tausende“ kleiner Lebewesen sich tummeln, kann hier die unmittelbare Beobachtung entgegenwirken: schöpft man mit einem Glase vom Boot aus Wasser aus dem See, so entdeckt das Auge in diesem fast nichts; es bedarf vielmehr des „Filtrierens“ einer größeren Wassermenge, um eine große, auch dem unbewaffneten Auge auffallende Zahl von Organismen einzufangen. Eine weitere Beobachtung, die sich unmittelbar an Ort und Stelle machen läßt, ist der größere Reichtum an Plankton in den tieferen, dem Licht und der Wärme weniger zugänglichen Wasserschichten. Stellt man während einer einstündigen Bootfahrt mehrere Fänge an recht verschiedenen Stellen — beleuchtete und schattige Teile der Oberfläche, verschiedene Tiefen, Ufer- und Hochseewasser — an, und läßt die in verschiedenen, sofort etikettierten Gläsern aufbewahrten Fänge sofort nachher am Ufer mittels eines schwachen Mikroskops vergleichend beobachten, so ergibt sich unmittelbar zweierlei: erstens die große Mannigfaltigkeit der nun auf engem Raum zusammengedrängten Formen, zweitens die auffallende Verschiedenheit in der Zusammensetzung, das Zurücktreten des Crustaceenplanktons im hell beleuchteten Wasser der Oberfläche, das Vorherrschen derselben in größeren Tiefen und an beschatteten Stellen usw. All' dies wirklich einmal an Ort und Stelle selbst miterlebt und mitbeobachtet zu haben, ist für die biologische Erkenntnis von so großer Wichtigkeit, daß dieser Einblick in das Naturleben keinem Schüler vorenthalten bleiben sollte. Es bedarf für den, der solche Planktonfänge mit Schülern öfter ausgeführt hat, nicht der Erwähnung, daß diese unmittelbar nach dem Fange im Freien vorgenommene Beobachtung immer nur eine vorläufige, mehr flüchtige sein kann. Es wird in der Regel doch nur ein kleines Mikroskop mitgenommen werden können, und wenn von jedem Fang eine oder mehrere Proben von den Teilnehmern durchmustert werden sollen, so steht nicht viel Zeit zur Verfügung. Es kann sich hier also nur um die Erkenntnis einiger Hauptzüge handeln, deren Ergänzung und Vertiefung dann Sache der Uebungsstunden ist. Diese werden zunächst eine orientierende Formenkenntnis zu bringen haben. Ob eigentliche Bestimmungsübungen vorgenommen werden können, wird von der verfügbaren Zeit abhängen. Wo diese knapp ist, dürfte es völlig genügen, wenn der Schüler Würmer, Rädertiere, Infusorien und die Hauptgruppen der planktonischen Krebse — also Phyllopoden, Copepoden, Ostracoden — unterscheidet, wenn er die Naupliuslarven kennt, und darüber hinaus einige wichtige Charakterformen — etwa Bosmina, Daphne, Diaptomus, Cyklops, einige etwa besonders häufige Rotiferen, wie Asplanchna, Amuraea usw., sowie Diatomeen, einige charakteristische Algen usw. kennen lernt. In weiteren Bestimmungsübungen würde ich — im Einverständnis mit den Ausführungen Landsbergs a. a. O. — nur ein Mittel sehen, dem Schüler die Mannigfaltigkeit der Formen eindringlich vor Augen zu führen. Neben diesen Beobachtungen würden bionomische Erörterungen, soweit als möglich durch Beobachtungen gestützte Besprechungen über Lebens-, Ernährungs- und Fortpflanzungsweise und sonstige biozönotische Beziehungen so reichen Stoff geben, daß je eine wöchentliche Uebungsstunde während eines Sommers kaum ausreichend erscheint. Ich möchte daher besonders betonen, daß m. E. auch hier, wie überall im biologischen Unterricht, viel weniger Wert auf systematische Vollständigkeit als auf wirklich klare Erkenntnis großer leitender Gesichtspunkte zu legen ist, und daß die stoffliche Auswahl des zu Beobachtenden sich selbstverständlich nach dem vorliegenden, bequem zur Verfügung stehenden Material zu richten hat.

Zur Einführung in den Begriff der Biozönose halte ich für besonders geeignet ein Beispiel, das sich auf möglichst kleinem Raum beobachten läßt. Also etwa ein kleines, längere Zeit möglichst sich selbst überlassenes Aquarium, in dem höchstens ab und zu das verdunstete Wasser ersetzt wird. Hier hat man es mit einer kleinen, vollkommen zu übersehenden Biozönose zu tun, und der an diesem kleinen Beispiel erläuterte und „erarbeitete" Begriff kann dann auf größere Verhältnisse übertragen werden. Die Biozönose auch nur eines kleinen Teiches ist bereits zu groß und zu kompliziert, um als Schulbeispiel dienen zu können.

Die vorstehend angedeutete Art, wie auch bei wenig Zeit ein gewisses Verständnis des Planktons in den oberen Klassen angebahnt werden kann, setzt nun m. E. eine Vorbereitung im Unterricht der mittleren Klassen voraus. Ich stehe mit dieser Auffassung im Einklang mit Krüger, Schiller u. A., aber im Widerspruch zu Landsberg, der sich von einer solchen Vorbereitung nicht viel verspricht, und befürchtet, daß das Gefühl: „das haben wir schon gehabt", das Interesse der Schüler am Gegenstande herabmindern könne. Er will daher erst in den oberen Klassen „diese Kleinlebewelt als Ganzes in ihrer ganzen Unendlichkeit und Schönheit auftreten und Staunen, Bewunderung und damit auch wahren Forschungseifer auslösen" lassen. Ohne die Berechtigung solcher Erwägungen verkennen zu wollen, muß ich doch sagen, daß eine gewisse Vorbereitung mir wenigstens so lange unerläßlich scheint, als der biologische Unterricht nicht — wie es die Meraner Lehrpläne, die Landsberg seinen Ausführungen zugrunde legt, fordern — über je zwei verbindliche Wochenstunden in den oberen Klassen verfügt. An Anknüpfungspunkten fehlt es im Unterricht der unteren und mittleren Klassen durchaus nicht. Mir gibt die Besprechung der Wale schon in Quinta stets eine solche Gelegenheit. Da ich diese Tiere nicht im Klassenunterricht, sondern gelegentlich eines — in jedem Winter mit jeder Klasse unternommenen — Besuchs im zoologischen Museum bespreche, so drängen die zwischen den großen Walskeletten aufgestellten Gläser mit den winzigen Nährtieren dem Schüler von selbst die Erwägung auf, daß so gewaltige Körper ungemein große Mengen so kleiner Tiere verschlingen müssen, um ihren Bedarf zu decken. Aehnliche Erwägungen wiederholen sich in Quarta bei Besprechung der Fische und ihrer Ernährung, z. B. der Karpfen, der Heringe. Kleine Berechnungen, z. B. über die ungefähre Zahl der täglich in Berlin allein verkauften Heringe und ihres Nahrungsbedarfs, führen wiederum zu der Vorstellung der ungeheuren Menge und der gewaltigen Vermehrungsfähigkeit dieser Tiere. Da den meisten Berliner Jungen die Daphnien als Aquarienfuttertiere wohl bekannt sind, so bereiten solche Besprechungen schon in den unteren Klassen keinerlei Schwierigkeiten. Die große Eierzahl mancher Tiere, z. B. der Frösche, der Fische, deren Eierstöcke den Schülern ja bekannt sind, im Verein mit der von mir schon in den unteren Klassen vielfach vorgenommenen Zählung der Samen gewisser häufiger Pflanzen haben den Schülern schon früh einen Begriff von der ungemeinen Vermehrungsfähigkeit der Organismen gegeben. In Tertia pflege ich nach den größeren Krebsen im Unterricht stets auch die Daphnien kurz zu behandeln, die, wie gesagt, meinen Schülern in der Regel schon bekannt sind, und ich lasse die Aehnlichkeit derselben mit dem Flußkrebs — Panzerbildung, zwei Fühlerpaare, kiementragende Brustgliedmaßen — feststellen. In Obertertia endlich bietet die lehrplanmäßige Besprechung der niederen Tier- und Pflanzengruppen Gelegenheit, eine Reihe planktonisch lebender Organismen den Schülern zu zeigen. Sind so die Formen den Schülern der oberen Klassen nicht mehr ganz fremd, so daß hier einige Zeit gespart werden kann, so wirkt doch der Anblick der durch das Planktonnetz eingefangenen wimmelnden Lebewesen immer noch als etwas Neues, das den Schülern eine Aeußerung des Staunens abzwingt. Was im einzelnen bisher an sie herantrat, das tritt ihm nun als Gesamtheit in der natürlichen Vergesellschaftung entgegen, und die neuen Gesichtspunkte, die in der Behandlung des Stoffes hier auftreten, werden dem Interesse reichliche neue Nahrung bieten. Wenn Landsberg „gerade bei Einführung in eine neue bedeutsame Stufe" Wiederholung zu vermeiden wünscht, so ist doch andererseits auch die Beleuchtung desselben Gegenstandes von verschiedenen Seiten her etwas Bildendes und Anregendes.

Vorstehende Ausführungen können natürlich nur meinen subjektiven Standpunkt auf Grund meiner bisherigen Erfahrungen darlegen. Unter anderen Verhältnissen wird sich manches anders darstellen und andere Wege nötig machen. Möge der dankbare Stoff, den das Plankton uns bietet, überall ausgenutzt werden, wo sich Gelegenheit dazu bietet, nicht als bevorzugter, aber als sehr wichtiger und wesentlicher Teil biologischer Unterweisung.

Der heutige Stand der Lehre vom Lichtwechsel der Fixsterne.

Vortrag, gehalten am 7. Juni 1911 zu Münster auf der 20. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts von Prof. Dr. J. Plaßmann (Münster i. W.)

Seitens des Vertreters unseres Ortsausschusses ist vorgestern in den Begrüßungsworten mit Recht betont worden, daß wir uns hier in Münster, wo Eduard Heis gewirkt hat, an einer klassischen Stätte des mathematischen Unterrichtes befinden. Und derselbe Name tönt uns entgegen, wenn es gilt, mit einfachsten instrumentalen Mitteln, aber mit voller Hingabe der freien Zeit und mit ausgiebigster Benutzung geschärfter und im Laufe des Beobachtens sich mehr und mehr schärfender Sinne die Lichtänderungen zu erforschen, welchen jene durch unbegreifliche Zwischenräume von uns getrennten Himmelskörper unterworfen sind, die wir als sonnenähnlich zu betrachten uns gewöhnt haben, obschon die meisten von unserem Tagesgestirn in spektraler Hinsicht beteutend abweichen und obschon gerade dieses Gestirns Natur uns trotz der relativ großen Nähe doch noch immer rätselhaft genug ist.

Als vor nunmehr 70 Jahren August Argelander in Bonn seine berühmte Beobachtungsreihe über β Lyrae begann, war der Gymnasiallehrer Eduard Heis in Aachen seine einzige Hilfskraft. Ihn weihte er in seine Methode ein, die Helligkeit eines veränderlichen Sternes an die der lichtkonstanten Nachbarsterne anzuschließen, durch ein Schätzungsverfahren, das, so roh es auf den ersten Blick erscheint, doch einer fortschreitenden Verfeinerung und einer vollkommenen Verwertung durch mathematische Abstraktion fähig ist. Die durch einige Jahre fortgesetzten Beobachtungen ergaben, und zwar unabhängig in Aachen und in Bonn, die merkwürdige, noch heute nicht ganz erklärte Lichtkurve mit den zwei nahezu gleich hohen Maximis und den zwei voneinander sehr verschiedenen Minimis. Man darf da von Glück sprechen, denn die im ganzen konstante Form dieser Kurve war an sich nicht zu erwarten, und doch ermöglichte nur diese Beständigkeit das Beziehen der Einzelbeobachtungen, die Hunderte von Tagen auseinanderlagen, auf dieselbe Epoche und Periode. Ein schönes Wort von Schiller anwendend, kann man sagen, daß auch hier mit dem Genius die Natur im Bunde gestanden hat. Noch mehr: indem diese zweigipfelige Kurve eine gute Bestätigung für die Richtigkeit des Verfahrens abgab, stellte sie zugleich ein bedeutsames Beispiel von psychophysischem Parallelismus dar. In der Tat, was zwei geschulte Beobachter auf solche Weise übereinstimmend feststellten, konnte nur eine wirklich objektive Tatsache sein, die nach einer physikalischen Deutung rief. So stellt die Kurve von β Lyrae auch einen Markstein in der Geschichte der Psychophysik dar. Den Astronomen war das Gesetz von dem logarithmischen Zusammenhange zwischen Empfindung und äußerer Ursache praktisch längst geläufig, ehe es die Psychologen in Worten aussprachen, es kodifizierten.

Wie ist bei diesen und ähnlichen Objekten der Lichtwechsel zu erklären? Während für die Feststellung der Tatsache Beobachtungen sehr einfacher Art genügen, denen nur noch durch gleichzeitige photometrische Feststellungen, die aber naturgemäß in weit geringerer Zahl erfolgen, die nötige Sicherheit zu geben ist, muß man zur Ermittelung der Ursache auch die Ergebnisse der Spektroskopie und Spektrographie heranziehen. Bekanntlich tritt hier das Dopplersche Prinzip in seine Rechte, nach welchem die Spektrallinien einer Lichtquelle eine Verschiebung zum brechbareren oder zum minder brechbaren Ende erleiden, je nachdem der Abstand der Lichtquelle von uns abnimmt oder zunimmt. Bei vielen von den kurzperiodischen Veränderlichen hat im Laufe der letzten zwei Jahrzehnte die Spektrographie die Richtigkeit der alten Vermutung erhärtet, daß hier ein lichtschwächerer Stern um einen helleren in einer Ebene kreist, die mit der Richtung zum Sonnensystem nur einen kleinen Winkel macht. Das gilt in erster Linie von Algol oder β Persei und mehreren anderen hellen Sternen des nach ihm benannten Algoltypus, so daß wir wohl annehmen dürfen, es verhalte sich auch bei denjenigen so, deren Spektra wir mangels geeigneter optischer Mittel jetzt noch nicht auflösen können. In den Fällen, wo die Verschiebung der Linien zu messen war, sei es nur der des helleren oder auch der des schwächeren Gestirns, erhält man die Geschwindigkeiten der Schwerpunkte; und da man die Umlaufszeit, die der Periode des Lichtwechsels und der Linienverschiebungen gleich ist, sehr genau kennt und aus dem Charakter der Lichtkurve auf das Verhältnis der Radien der beiden Weltkörper untereinander und zu ihrem Abstande schließen kann, läßt sich die Größe der Bahn und auch die Größe und Masse der Körper selbst berechnen mit Hilfe des dritten Keplerschen Gesetzes in der Fassung, die ihm Newton durch Zufügung des Massenfaktors gegeben hat. Man kann diese Schlüsse ziehen, ohne die Entfernung des Sternpaares zu kennen, ja man muß das gewöhnlich, da die meisten Veränderlichen lichtschwach und vermutlich so weit entfernt sind, daß wir die Parallaxen wohl so bald nicht finden werden. Natürlich kann man, sobald über die Größe des Sternpaares etwas auszusagen ist, daran eine Vermutung über den Abstand knüpfen, indem man die Helligkeit mit der der Sonne vergleicht. Freilich muß man da vielfach mit ganz andereren Leuchtkräften rechnen.

Diese Ermittelungen sind indessen noch mit manchem Wenn und Aber behaftet. Ein sehr unsicheres Element ist z. B. die Neigung i der Bahnebene gegen die Sphäre, d. h. gegen die zur Gesichtslinie senkrechte Ebene. Daß diese Neigung größer als Null sein muß, wenn sich Linienverschiebungen herausstellen sollen, ist ja klar. Sie kann aber ziemlich klein sein, sogar bis zu 30^0 herab, und dennoch bereits Linienverschiebungen in meßbarem Betrage hervorrufen. So erhält man aus den beobachteten Verschiebungen im allgemeinen nicht die wahren Geschwindigkeiten, sondern ihre Produkte mit $\sin i$, und weiterhin ergibt sich nach Anwendung des dritten Keplerschen Gesetzes, daß nicht die Massen selbst gefunden werden, sondern die sogenannte Massenfunktion

$$m_2^3 \sin^3 i : (m_1 + m_2)^2.$$

Hier sind m_1 und m_2 die Massen des helleren und des schwächeren Körpers, und es wird vorausgesetzt, daß wir nur bei dem helleren die Linien beobachten können. Geht das bei beiden Sternen, so bekommt man die zwei Größen

$$m_2^3 \sin^3 i \text{ und } m_1^3 \sin^3 i$$

besonders. Nun gestattet allerdings da, wo sich die Duplizität nicht nur durch Verschiebungen, sondern auch durch einen Lichtwechsel verrät, die Kenntnis eben dieses Lichtwechsels eine plausible Annahme über i, da eine gut bestimmte Kurve die Ableitung sehr vieler Konstanten ermöglicht. Ja noch mehr: wenn wir auch nur den Lichtwechsel kennen, aber wegen der großen Lichtschwäche im ganzen auf spektrographisches Arbeiten verzichten müssen, können wir doch, wie eine leichte Ueberlegung zeigt, wenigstens die Dichtigkeit des Systems bestimmen, wenn auch nicht die Größe und Masse selbst. Da wir in diesen Fällen meistens auch nicht den Abstand des Systems kennen, ist eine solche Bestimmung eine physikalisch-methodologische Merkwürdigkeit. Und noch merkwürdiger ist eine unleugbare Tatsache, daß nämlich alle Dichtigkeitsbestimmungen solcher Art weit geringere Zahlen ergeben haben als wir sie bei der Sonne und bei den ihr in der Konstitution ähnlicheren Planeten Jupiter und Saturn kennen. Beträge von einem Drittel bis zu einem Fünfzigstel der Sonnendichte herab sind nachgewiesen worden bei den 10 Algolsternen, die Graff in Hamburg untersucht hat. Bei β Lyrae jedoch ist die gesamte Dichte nur mit der der atmosphärischen Luft bei einem Quecksilberstande von 580 mm zu vergleichen, und dabei scheint die Masse des Sternpaares das 27fache der Sonnenmasse zu betragen.

Manches ist hier noch ungewiß. Gerade bei β Lyrae, einem der wenigen Sterne mit hellen Wasserstoff- und Heliumlinien, die den dunkeln superponiert sind, hat man lange Zeit keine glatte Uebereinstimmung zwischen der symmetrischen Argelanderschen Kurve einerseits und dem ziemlich asymmetrischen Wandern der hellen und dunkeln Linien andererseits feststellen können. Erst vor wenigen Jahren gelang Belopolsky in Pulkowa der Nachweis, daß eine Absorptionslinie des Magnesiums im blauen Teile genau denselben symmetrischen Verschiebungsgang zeigt wie die Lichtstärke auch. Sie gehört der Komponente an, durch deren Bedeckung das Hauptminimum hervorgerufen wird, also wohl der helleren. Und jene Ungleichmäßigkeiten bei den anderen Linien sind vielleicht am einfachsten in der Richtung zu erklären, daß sie auf Gezeitenwirkungen in den Atmosphären der beiden Komponenten zurückgehen. Denn diese zwei Körper, deren Mittelpunkte nur 30 Millionen Kilometer auseinanderstehen, d. h. nur halb so viel als Merkur von der Sonne absteht, sind durch dieselbe Gezeitenwirkung zu langen Ellipsoiden auseinandergezogen, durch deren Umschwung zunächst bewirkt wird, daß auch außerhalb der Zeiten des Hauptminimums, wo der kleine vor den großen und des Nebenminimums, wo der große vor den kleinen tritt, das Licht niemals konstant ist. Die Atmosphären berühren sich fast, und in ihnen scheinen die Strömungen stattzufinden, die anfangs die Deutung der Spektrogramme erschwerten.

Wir dürfen nun aber nicht glauben, die Tätigkeit der Beobachter nach der Methode von Argelander sei wenigstens bei diesem Sterne jetzt überflüssig. Die Kurve verläuft regelmäßig und symmetrisch, und die Periode ist konstant, aber alle diese Sätze sind nur relativ wahr. Tatsächlich lassen sich die in den letzten zwei Menschenaltern beobachteten Minima durch eine konstante Periode nicht darstellen. Die seinerzeit von Schur aufgestellte Formel für die mittlere Bonner Zeit des Hauptminimums

$$1855 \text{ Jan. } 6^d\, 15^h\, 28^m,0 + 12^d\, 21^h\, 47^m\, 23^s,72\, E + 0^s,315938\, E^2 - 0^s,0000121\, E^3,$$

wo E die seit dem Ausgangsminimum abgelaufene Zeit bedeutet, ist ein empirischer Ausdruck, an dessen Konstanten fortgesetzt wird gebessert werden müssen, ehe wir sie mit theoretischen Erwägungen über die etwaige Ursache der Veränderlichkeit der Periode zusammenhalten dürfen. Hier kann nur anhaltender Fleiß in der Anwendung der einfachsten Beobachtungsmittel zum Ziele führen. Auf dem Wege winken aber noch andere Preise. Etwa seit 1893, wo Lindemann in Pulkowa die Frage anschnitt, wissen wir, daß die konstante Form der symmetrischen Lichtkurve auch nicht mehr zu halten ist. Vergleichungen zwischen dem Material, das Argelander und Heis aufgehäuft und den späteren Zahlen lassen erkennen, daß die vier Hauptpunkte die Kurve nicht mehr streng in vier gleiche Abschnitte teilen und daß die beiden Maxima nicht mehr durchaus gleich hoch sind. Die Ergebnisse dieses Deutschrussen sind später von dem holländischen Astronomen Pannekoek ein wenig modifiziert worden. Und seit einigen Jahren wird von verschiedenen Astronomen betont, daß auch der Unterschied zwischen Haupt- und Nebenminimum nicht konstant ist, vielmehr deutlich wahrnehmbaren Schwankungen unterliegt, die wir vorläufig, da wir ihre Periode nicht kennen, noch als säkular bezeichnen müssen. Ja, auch die Annahme, daß wenigstens zwei oder drei aufeinanderfolgende Wellen des Lichtwechsels innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler als kongruent anzusprechen seien, ist wohl nicht ganz richtig. Gerade dieser Stern, der schon durch seine spektralen Eigenschaften zu den interessantesten Himmelskörpern überhaupt gehört, schreit förmlich nach neuen und immer besseren, immer dichteren Beobachtungsreihen.

Nun verzeichnet das neueste, zu Ende 1910 von Hartwig in Bamberg herausgegebene Verzeichnis der veränderlichen Sterne nicht weniger als 1057 einzelne Objekte. Das sind keineswegs alle überhaupt bekannten; denn in manchen Sternhaufen sind sie zu Dutzenden vereinigt, und in den beiden großen Milchstraßenfetzen, die man die Wolken nennt, gar zu Hunderten. Es sind vielmehr nur die Objekte, wo die Elemente des Lichtwechsels mit einiger Sicherheit bekannt sind, in das Verzeichnis aufgenommen. Darunter haben wir 88 Algolsterne und 104 weitere „kurzperiodische", wo der Lichtwechsel, wie bei β Lyrae, durch eine einigermaßen konstante Kurve, von der kein Teil wagerecht verläuft, darzustellen ist. Zu dem Subgenus, das durch β Lyrae selbst dargestellt wird, gehören noch einige andere, und man hat darunter einen Fall, nämlich U Pegasi, wo vielleicht an die birnförmige Gleichgewichtsfigur zu denken ist, die Poincaré behandelt hat, also an einem einzigen Körper, der aber, je nach der kosmogonischen Auffassung, aus zweien bestanden hat oder sich bald in zwei zerlegen wird. Die Betrachtungen von Sir Georges Darwin sowie von See in Washington sind der zweiten Annahme nicht entgegen. Zeigen sie doch, daß die Flutwirkungen gelegentlich einen solchen Körper spalten können und dann eine geraume Zeit im Sinne einer Vergrößerung des Abstandes und auch der Exzentrizität arbeiten. Im Einklange damit ergibt übrigens die Statistik der spektroskopischen Doppelsterne, um die sich in den letzten zwei Jahren die Herren Schlesinger in Pittsburgh und Ludendorff in Potsdam sehr verdient gemacht haben, daß mit wachsendem Abstande der Komponenten die Exzentrizität wächst. Ebenso ist es bei den visuellen Doppelsternen.

Unter den kurzperiodischen Veränderlichen nimmt die nach δ Cephei benannte Unterabteilung insofern einen besonderen Platz ein, als hier die Symmetrie der Lichtkurve von β Lyrae geschwunden ist und das zweite Maximum nur mehr in Wellen und Beulen, die in dem absteigenden Aste auftreten, erkennbar bleibt. Man kann hier an absorbierende Flutwellen denken, die dem verfinsternden Satelliten nachziehen, und der Gang der Linien im Spektrogramm spricht gerade nicht dagegen. Aber das Mißverhältnis zwischen der schnellen Zunahme und der langsamen Abnahme der Lichtfülle finden wir auch bei den meisten roten Veränderlichen, die überhaupt die Mehrzahl bilden. Nun kann ja dieselbe Erscheinung in den zwei Fällen auf verschiedene Ursachen zurückgehen; das Verdrießliche ist nur, daß sich die roten Veränderlichen mit den weißen durch zahlreiche Zwischenglieder verbinden.

Die Sterne vom Typus δ Cephei, deren bekannteste Vertreter, δ Cephei selbst und η Aquilae, übrigens auch mit geringen Mitteln beobachtet werden können, gleich β Lyrae, und zwar δ Cephei wegen seiner Zirkumpolarität fast das ganze Jahr hindurch sehr bequem — diese Objekte stellen auch spektrographisch einen Ausnahmefall dar. Schlesinger findet nämlich, offenbar im Sinne der Entwickelungslehre, daß die spektroskopischen Sternpaare der früheren Spektraltypen kreisähnliche, die der späteren mehr exzentrische Bahnen haben. Die spektroskopischen Paare überhaupt haben desto länglichere Bahnen, je länger die Periode, d. h. im ganzen, je größer der Abstand ist. Das gilt aber nicht von den δ Cephei-Sternen, die vielmehr bei kurzer Periode, $3^d,7$ bis $17^d,1$, sehr exzentrische Bahnen aufweisen. Die Exzentrizitäten halten sich hier zwischen 0,1 und 0,5; überhaupt scheinen hier ganz besondere Verhältnisse obzuwalten.

Möglicherweise stellt eine andere Abart der Veränderlichen, der besonders in den letzten Jahren vielgenannte Antalgoltypus, nur eine Variation des Typus δ Cephei dar. Wie der Name andeutet, soll hier die umgekehrte Algolkurve vorliegen. Das Licht soll während des größten Teiles der Periode konstant sein, dann plötzlich anschwellen und nach einem relativ hohen Maximum ziemlich schnell wieder abfallen zur normalen Stärke. Folgende Uebersicht über die zwölf bis jetzt bekannten Objekte dieser Art beruht auf dem erwähnten Verzeichnisse von E. Hartwig.

Wo ein † steht, sind die Zahlen nur roh bekannt, wo ein — steht, noch gar nicht. Wie man sieht, ist auch hier in allen bekannten

*	Dauer des Anstieges	Dauer des Abstieges	Periode	Maximum
Y Lyrae	$1^1/_2{}^h$	$8^1/_2{}^h$	$12^h\ 3^m,9$	10.11
UY Cygni	$1^h 56^m$	—	13 27 ,4	9.10
RZ Lyrae	$1^h,5$	$5^h,3$	12 16 ,2	10
XZ Cygni	$2^1/_2{}^h$	5^h	11 11 ,9	9.10
RV Capricorni	$1^3/_4{}^h$	$5^h +$	10 44 ,6	9.10
RW Draconis	$2^h +$	$4^h +$	10 37 ,8	10
ST Virginis	1^h	$1^h +$	9 52 ,4	9.10
RS Bootis	$1^h 21^m$	$4^h 50^m$	9 3 ,4	9.10
SU Draconis	3^h	7^h	15 51 ,0	9
SW Draconis	3^h	$10^h,5$	13 40 ,3	9.10
RT Scuti	—	—	11 53 ,7	9
XX Cygni	—	—	3 14 ,2	9.10

Fällen die Dauer des Anstieges kürzer als die des Abstieges. Die größte Helligkeit ist in der letzten Spalte nach Sterngrößen angegeben. Die Perioden sind bis auf die letzte, die im mittleren Tage fast $7^1/_2$mal enthalten ist, alle von derselben Größenordnung. Unter den helleren Sternen sind noch keine zum Antalgoltypus zählenden gefunden worden.

Die Antalgolsterne sind erst seit einigen Jahren bekannt, das Beobachtungsmaterial ist noch nicht sehr reich, und da beim Kurvenziehen Willkür nicht immer zu vermeiden ist, begreift man, daß die systematische Stellung dieser Himmelskörper noch etwas zweifelhaft ist. Betrachtet man Kurven wie die von Stanley Williams für UY Cygni gegebene, so wird man weit mehr an Objekte wie δ Cephei und η Aquilae erinnert, als an die umgedrehte Algolkurve.

Als jetzige Auffassung kann wohl bezeichnet werden, daß die kurzperiodischen Veränderlichen fast sämtlich Sternpaare in Statu nascendi sind, vielleicht auch manchmal größere Systeme in der Entwickelung. Dagegen ist man ja gewohnt, die langperiodischen Veränderlichen als absterbende Sonnen zu betrachten, da sie meistens der dritten Spektralklasse angehören. Allerdings ist auch hier noch manches unaufgeklärt. Ist es die bloße Achsendrehung eines roten Gestirns, die uns, im Sinne von Zöllner und Gyldén, nach und nach die verschiedenen Teile seiner Oberfläche zuwendet? Oder haben wir mit Klinkerfues an umlaufende Planeten zu denken, die die Atmosphären der Hauptsterne entstellen und die Absorption der brechbareren Strahlen hier mehren, dort mindern? Oder endlich mit Arrhenius an kosmischen Staub, der, zwischen uns und den Sternen vorbeiziehend, die brechbareren Strahlen ihrer Spektra in ähnlicher Weise auslöscht wie der großstädtische Rauch und Staub es mit dem Sonnenspektrum macht? Oder sind gar, der überlieferten Auffassung zuwider, die roten Sterne großenteils gar nicht als absterbende, sondern auch noch als werdende Welten anzusehen, da uns Norman Lockyer gelehrt hat, daß jeder Stern die rote Phase zweimal durchlaufen muß, einmal vor und einmal nach dem Siriusstadium? Wir können nur immer weiteres Beobachtungsmaterial sammeln in der Hoffnung, daß sich doch zuletzt ein Kepler dafür finden werde. Bei der relativen Leichtigkeit des Beobachtens der helleren Veränderlichen liegt der Gedanke, ihren Lichtwechsel für Schülerübungen auszunutzen, ziemlich nahe. Solche Uebungen würden der Wissenschaft hier und da einen tüchtigen Hilfsarbeiter für die spätere Zeit zuführen. Natürlich hat man nicht die Zeit, hiervon vieles zu behandeln. Was sich aber gelegentlich gut beobachten läßt, ist ein Algolsminimum im Winter. Diese Erscheinung läuft in wenigen Stunden ab, und es lassen sich z. B. die Phasen der schnellsten Ab- und Zunahme in je 20 Minuten leicht feststellen. Ferner bringt jedes Jahr wenigstens ein Maximum von Mira Ceti. Allerdings liegen diese Maxima nicht in allen Jahren gut. Wer aber seine Schüler auf das allmähliche Auftauchen dieses Gestirns aus der Unsichtbarkeit für freie Augen hinweisen könnte, um es dann einige Wochen lang in ziemlich hellem Glanze zu zeigen, dann in langsamer Abnahme, der würde schon allerhand wertvolle didaktische Anregungen bekommen. So bezüglich der periodischen Störung des Beobachtens bei diesem der Ekliptik nahestehenden Objekte durch den Mondschein, namentlich aber bezüglich der durch den Jahreslauf der Sonne bewirkten Acceleration der Gestirne. Beim Algol läßt sich die tägliche Bewegung nebenbei betrachten, ähnlich wie bei Mondfinsternissen und Konstellationen, wo ja auch die Aufmerksamkeit von vornherein durch ein außergewöhnliches Schauspiel gefesselt ist. Bei mehreren roten Sternen, ich erinnere an die Arbeiten von Guthnick über Mira Ceti und von Rosenberg über χ Cygni, ist der anscheinend so unregelmäßige Lichtwechsel immerhin schon etwas genauer analysiert worden, so daß wir sagen dürfen, wir stehen hier vielleicht bald so weit wie die Alten mit ihren Epizykeln in der Planetentheorie. Vielleicht wird es später noch möglich werden, auch die jetzt so schwer zu bemeisternden roten Sterne von schwacher Veränderlichkeit gründlicher zu erforschen. Es finden sich darunter sehr helle, wie α Tauri und α Orionis, solche von mittlerer Helligkeit, wie α Cassiopeiae, β Pegasi, ε Aurigae, auch schwächere, wie der Granatstern μ Cephei.

Zur Erklärung des Aufleuchtens und Lichtwechsels der Novae oder neuen Sterne ist die Annahme von Seeliger, daß ein großer Himmelskörper in eine Nebelmasse eindringt, mit Recht heute die beliebteste. Die Explosionshypothese, wonach ein ursprünglich heißer und dann erkalteter Himmelskörper noch einmal seine harte Rinde sprengt und überflutet, ist als unwahrscheinlich aufgegeben, und von der Vermutung, daß zwei feste Himmelskörper durch ihren Zusammenstoß das Aufflammen einer Nova bewirken, ist man gleichfalls abgekommen, weil auch sie mit einem zu seltsamen Zufall rechnet. In der Tat, betrüge der Abstand der Sonne von uns nur das Hundertfache ihres Durchmessers und der Abstand des nächsten Fixsternes nur das 200000fache des Sonnenabstandes, wäre ferner dieser Fixstern so groß wie die Sonne selbst, so könnte man sie mit zwei Kügelchen, etwa Nadelköpfen von 1 mm Durchmesser vergleichen, deren Abstand dann auf 20 km anzusetzen wäre. Tatsächlich sind die Gestirne, abgesehen von den Sternhaufen, noch nicht einmal so dicht verteilt, und ein so häufiges Zusammenstoßen, wie es die geschichtlich beglaubigten Erscheinungen von neuen Sternen verlangen, ist kaum möglich. Dagegen sind, wie man heute weiß, ausgedehnte nichtleuchtende Nebelmassen von solcher Größe, daß sie Sterne einfangen könnten, wohl zu denken.

Aus Nebelmassen scheinen sich die Sternhaufen zu bilden, in denen wieder die Veränderlichen von sehr kurzer, nur nach Bruchteilen unseres Tages zählender Periode besonders häufig sind. Möglicherweise fühlen wir in den raschen Lichtschwankungen dieser sogenannten Cluster variables den Pulsschlag keimenden Lebens, zukünftiger Planetensysteme im Weltall.

Materie und Gedächtnis*).

Von Erich Becher (Münster i. W.)

Wenn wir eine Landschaft gesehen, ein Lied gehört haben, so ist es uns nachher möglich, das Gesehene oder Gehörte innerlich wiederaufleben zu lassen, ohne daß die äußeren Reize vorhanden sind: die Eindrücke sind also in uns irgendwie festgehalten worden.

In der körperlichen Natur gibt es mancherlei Analogien zu diesem Festhalten von Nachwirkungen. So gräbt sich eine Wassermenge durch ihr Strömen ein dauerndes Bett in den Boden. Dementsprechend deutet man die Nachwirkungen (Residuen) von Eindrücken („Nervenströmen") als materielle Veränderungen im Gehirn.

Unsere Organe, z. B. die Muskeln, werden durch Gebrauch gekräftigt. So wird auch ein Nervenreiz, der eine Gehirnpartie in Funktion versetzt, diese kräftigen und somit eine Nachwirkung hinterlassen. Vielfach wird angenommen, daß diese Gebrauchskräftigung das Residuum, die im Gedächnis festgehaltene Nachwirkung des Eindrucks, darstelle. Indessen ist die Nachwirkung einer einzelnen Muskelspannung unmerklich klein, während eine einzige Wahrnehmung unter Umständen genügt, ein eindrucksvolles Bild fürs ganze Leben festzuhalten. Neben diesem quantitativen Unterschied besteht ein anderer. Zur Erneuerung einer Muskelkontraktion ist eine Wiederholung des auslösenden Nervenimpulses notwendig. Wir können aber im Gedächtnis ein Bild erneuern, ohne daß der Reiz wiederholt werden müßte, der bei der ersten Wahrnehmung des betreffenden Gegenstandes erforderlich war. Der Vergleich der Gedächtnisleistung mit der Gebrauchskräftigung vermag also die erstere nicht zu erklären.

Wenn wir eine Landschaft anschauen, so wird unsere Netzhaut in ihrer ganzen Ausdehnung mehr oder weniger in Reizzustand versetzt. Auf den zahllosen Fasern des Sehnerven werden die nervösen Erregungen der Rindenfläche unseres Großhirn-Hinterhauptlappens zugeleitet, so daß dort eine Art von Abbildung des Netzhautbildes entsteht. Diese Abbildung müßte nach der materialistischen Hypothese des Gedächtnisses von der Hirnrinde irgendwie festgehalten werden. Nun ändert sich aber das Bild auf unserer Netzhaut fortwährend. Auf denselben Sehnervenbahnen müssen also immerfort neue und andere Bilder zur Hirnrinde transportiert werden, und da diese Bahnen dauernd in die gleichen Rindenteile führen, müßten die fortwährend wechselnden Bilder von ein und derselben Hirnrindenpartie festgehalten werden. Die aufeinanderfolgenden Bilder müßten sich überdecken, verwischen und verderben wie die Bilder auf einer photographischen Platte, die immer wieder zu neuen Aufnahmen belichtel wird. Die Gedächtniserscheinungen zeigen diese Schädigung nicht; wir vermögen in der Erinnerung zahlreiche Bilder sehr wohl auseinanderzuhalten.

Noch in anderer Hinsicht versagt die materialistische Gedächtnishypothese. Wenn aufeinanderfolge Wasserströme zehnmal den gleichen Weg einschlagen, so wird das Strombett tiefer und tiefer eingegraben. Man kann aber dem Strombett nicht ansehen, ob es durch eine langdauernde Strömung oder durch zehn kürzer anhaltende Strömungen eingegraben wurde. Im Gedächtnis aber wissen wir sehr wohl zu unterscheiden zwischen einem dauernden und einem wiederholt, aber kürzer erklungenen Ton.

Von zwei gleichzeitigen Erlebnissen vermag das eine später das andere ins Gedächtnis zurückzurufen. Beim Lesenlernen sieht das Kind das Zeichen a und hört zugleich den Laut. Die zwischen Zeichen und Laut entstehende Verbindung faßt die materialistische Gedächtnishypothese als eine „ausgeschliffene", d. h. leicht gangbare nervöse Bahn zwischen den Residuen

*) Aus dem Vortrag des Verfassers auf der Hauptversammlung in Münster i. W.

des Zeichens und des Lautes auf. Sehen wir das Zeichen a, so strömt die nervöse Erregung vom Gesichtsresiduum auf der ausgeschliffenen Bahn zum Gehörsresiduum; auch das letztere gerät so wieder in nervöse Erregung und der Laut a wird wieder in uns lebendig. Wenn nun aber a an anderer Stelle in unserem Gesichtsfelde gesehen wird, also auf eine andere Netzhautstelle sich abbildet und zu einer anderen Hirnrindenstelle hingeleitet wird, so trifft es gar nicht auf den Ausgangspunkt der ausgeschliffenen Bahn. Man versteht nicht, wie trotzdem der Laut a in uns erweckt wird, obgleich eine ausgeschliffene Bahn von der jetzt erregten Stelle zum Residuum des Lautes a nicht vorhanden ist.

Auch hier versagt die materialistische Erklärung. Es wird daher naheliegen, zur Auffassung des täglichen Lebens zurückzukehren, die das Gedächtnis als eine seelische Fähigkeit betrachtet, die freilich an körperliche Bedingungen gebunden erscheint*).

Einführung in die Differential- und Integralrechnung auf Grund von Mittelwertsätzen.

Von Prof. Dr. A. Wendler in Erlangen.

Soviel mir bekannt ist, sind die „Mittelwertsätze" bisher für die Zwecke des Unterrichtes nicht herangezogen worden, wenigstens nicht zur Begründung der Differential- und Integralrechnung. Es soll dies in den folgenden Zeilen versucht werden.

Ich gehe von irgend einer bekannten „Stammkurve" aus, entsprechend einer der Funktionen $y = x^n$, a^x, ${}^b\log x$, $\sin x$ usw., deren graphische Darstellungen beim Schüler als bekannt vorausgesetzt werden. Der Vorteil der graphischen Darstellung gegenüber einer tabellarischen Zusammenstellung der x- und $y$werte liegt ja nun darin, daß man die Gesamtheit des Funktionsverlaufes sozusagen auf einmal überblickt mit allen Besonderheiten im Steigen und Fallen. Auch der Schüler empfindet das Bedürfnis, aus einem solchen Diagramm noch mehr herauszulesen, als was in der numerischen Wertetabelle enthalten ist. Insbesondere verlangt er nach einem rechnerischen Maßstab für jenes charakteristische Steigen und Fallen und für die Größe der Fläche zwischen Abszisse, Kurve und zwei beliebigen Ordinaten.

Was das erstere betrifft, so ist ihm ohne weiteres klar, daß die sich mit x kontinuierlich ändernde Tangentenrichtung das maßgebende ist. Zu jedem x gehört also nicht nur eine Ordinate (bezw. eine endliche Anzahl von Ordinaten) $y = f(x)$, sondern noch eine zweite Funktion $\operatorname{tang} \alpha = f'(x)$, die man sich als $y' = f'(x)$ als begleitende Kurve ebenfalls graphisch dargestellt denken kann. Wir nennen diese Funktion die „Ableitung" (Derivierte") oder auch aus später einzusehenden Gründen „Differentialfunktion".

Hinsichtlich der zweiten Frage ist von vornherein klar, daß die Fläche zwischen der Abszisse, der Kurve $y = f(x)$, einer festen Ordinate $f(x_0)$ und der laufenden Ordinate $y = f(x)$ wiederum eine Funktion $Y = F(x)$ ist. Wir nennen ihre graphische Darstellung, die also zu $y = f(x)$ eine weitere Begleiterin ist, „Integralkurve". Nun suchen wir in das Wesen der Funktionen $f'(x)$ und $F(x)$ auf natürliche Weise einzudringen. Die Symbole $\frac{dy}{dx}$ und $\int y\,dx$ führen wir erst ein, wenn Veranlassung dazu vorliegt.

I. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Zeichnet man (Fig. 1) durch irgend einen Punkt $P(x, y)$ eine beliebige Sehne PQ mit der Abszissen-

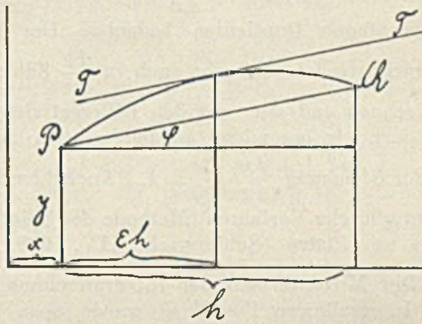


Fig. 1.

projektion h, so ist die Sehnenrichtung PQ durch $\operatorname{tang} \varphi = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ bestimmt und damit auch die Richtung aller zu PQ parallelen Geraden, wie z. B. die der Tangente TT, deren Berührpunkt zwischen P und Q liegend die Abszisse $x + \varepsilon \cdot h$ haben wird, wo ε ein unbestimmter, nicht näher bekannter Bruchteil von h ist. Nach der oben von $f'(x)$ gegebenen Definition hat man somit den Cauchyschen Mittelwertsatz:

$$\text{I.} \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \varepsilon \cdot h)\text{*)}.$$

Die Unbestimmtheit, welche ε bei einem beliebigen endlichen h hat, verschwindet, wenn h gegen 0 abnimmt. Die rechte Seite stellt dann die Tangentenrichtung $f'(x)$ im Punkt $P(x\,y)$ dar und ist also durch

$$\text{I}'. \quad \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

gegeben. Nun würde sich die Differentiation der bekannteren Funktionen anschließen, wobei mir die kürzlich von Prof. Dr. Bochow in diesen Blättern veröffentlichte Methode, die sich auf Funktionalgleichungen stützt, besonders empfehlenswert erscheint**). Daran würden sich sämtliche Anwendungen anschließen, die mit der ersten Abgeleiteten zusammenhängen, insbesondere die Maximum-Minimumaufgaben.

Die Behandlung des Wendepunktes ($f''(x) = 0$) und der Taylorschen Reihe erfolgt wohl am vorteilhaftesten wieder in engem Anschluß an die graphische Darstellung (vergl. z. B. Schülke: Differential- und Integralrechnung im Unterricht, pag. 17, und das oben zitierte Werk von F. Klein, pag. 489 ff.).

---

*) Genauere Durchführung des Dargelegten und Untersuchung der Konsequenzen findet man in des Verfassers soeben erschienenem Buche: Gehirn und Seele. Heidelberg, C. Winters Universitäts-Buchhandlung.

*) Diese aus der unmittelbaren Anschauung fließende Ableitung ist bei der prinzipiell zugelassenen approximationsmathematischen Behandlung durchaus am Platz. Der präzisionsmathematische Beweis setzt bekanntlich das Existenztheorem von Weierstraß voraus (s. auch Klein „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus". I. Teil).

**) XVII, 1911, Nr. 4, pag. 63.

Jetzt ist es Zeit auf den Differenzen- bew. Differentialquotienten einzugehen. Setzt man $x+h=x_1$, somit $h=x_1-x$ und $f(x_1)=y_1$, so erhält man aus I und I′ die Gleichungen:

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\triangle y}{\triangle x}=f'(x+\varepsilon\cdot(x_1-x))$$

und
$$\lim_{x_1=x}\frac{y_1-y}{x_1-x}=\lim_{\triangle x=0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

Es wurde oben gezeigt, daß man bequem mit Hilfe des Mittelwertsatzes eine symbolfreie Darstellung der Differentialrechnung geben kann. Geht man aber, was aus naheliegenden Gründen wünschenswert ist, auf den Differentialquotienten ein, so ist der Hinweis wohl unerläßlich, daß das Symbol $\frac{dy}{dx}$ nicht wie $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ einen rechnungsmäßigen Quotienten bedeutet. Der Beweis muß erbracht werden, daß man auch in $\frac{dy}{dx}$ Zähler und Nenner trennen und also mit den Differentialen selbst rechnen darf. Insbesondere handelt es sich um den Beweis der Gleichung $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$. Auch hier scheint mir das graphische Verfahren (Methode der Spiegelung) besonders am Platze (Schimmack, XIV, 1908, Nr. 2).

II. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Die Integralkurve $Y=F(x)$ wurde oben bereits eingeführt, indem $F(x)$ den Flächeninhalt zwischen einem festgewählten x_0 und dem laufenden x bedeuten sollte. (Also in Fig. 2 die schraffierte Fläche $ABCD$).

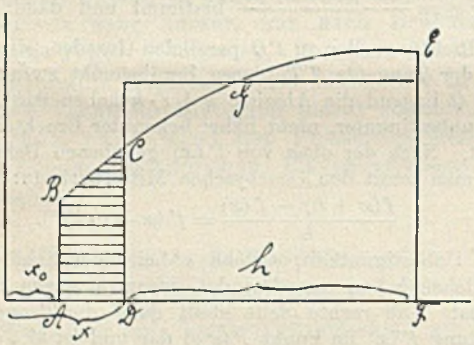


Fig. 2.

Es ist somit $F(x+h)$ die Fläche $ABEF$, $F(x+h)-F(x)$ die Fläche $CDEF$, $F(a)=\left[Fl\right]_{x_0}^{a}$, $F(b)=\left[Fl\right]_{x_0}^{b}$, $F(b)-F(a)=\left[Fl\right]_{x_0}^{b}-\left[Fl\right]_{x_0}^{a}=\left[Fl\right]_{a}^{b}$ usw.

Setzt man die Fläche $CDEF=F(x+h)-F(x)$ einem Rechteck gleich, so muß dessen Decklinie den Kurvenzug CE offenbar in mindestens einen Punkt G schneiden, dessen Abszisse $\xi=x+\varepsilon\cdot h$ ist, wo ε wieder einen unbestimmten Bruch bedeutet. Die Rechtecksfläche ist aber $h\cdot f(\xi)=h\cdot f(x+\varepsilon h)$, somit ist:

$$\text{II.}\quad \frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x+\varepsilon h)$$

und im Grenzfall

$$\text{II}'.\quad \lim_{h=0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{dF(x)}{dx}=f(x).$$

Die Kurve $y=f(x)$ steht also als Abgeleitete der Kurve $Y=F(x)$ ebenso gegenüber, wie $y'=f'(x)$ der Stammkurve $y=f(x)$. Dabei hängt die eine Begleitkurve mit den Steigungsverhältnissen, die andere mit den Flächenwerten der Stammkurve zusammen. Man sieht insbesondere auch, wie man eine Tabelle für die Ableitungen der Hauptfunktionen benutzen kann zur Aufstellung von Fundamentalintegraden (Unt.-Bl. XVI, 1910, Nr. 3: „Zur Einführung in die Integralrechnung“ von Prof. Dr. Thaer.)

Das Wesen der Integrationskonstanten läßt sich sehr deutlich an dem in $F(x)$ steckenden willkürlichen x_0 erkennen.

Auch bei der Berechnung des Flächeninhaltes ist zunächst von einem Symbol, dem Integralzeichen, kein Gebrauch gemacht worden. Auf Grund der Gleichung II′ und weil die Differentiale nach der obigen Spiegelungsmethode selbständig behandelt werden dürfen, kann man nun $dF(x)=f(x)\cdot dx=y\cdot dx$ setzen. Die Summe aller Flächenzuwächse zwischen a und b, symbolisch durch $\int_a^b dF(x)=\int_a^b y\cdot dx$ ausgedrückt, ergibt aber die Fläche zwischen a und b, ist also $\left[Fl\right]_a^b=F(b)-F(a)$. Man erhält somit

$$\text{III.}\quad \int_a^b f(x)\cdot dx=\int_a^b y\cdot dx=F(b)-F(a),$$

wobei $F(x)$ die Integralfunktion von $f(x)$ ist. Man spricht jetzt von einem bestimmten Integral, da die Größe x_0 und somit die Unbestimmtheit durch die Differenzbildung $F(b)-F(a)$ beseitigt ist. Die Gleichung III führt nunmehr von selbst zu der Auffassung des zwischen a und b liegenden Flächeninhaltes als Summe unendlich vieler, unendlich schmaler Rechteckslamellen.

Da man $y=f(x)$ immer graphisch als Kurve dargestellt denken kann, auch wenn x und y irgend welche (geometrische oder physikalische) Größen sind, so folgt aus III ganz allgemein die Bedeutung des Integrals als Summe von unendlichvielen unendlich kleinen Bausteinen $(y\cdot dx)$ und also insbesondere der Wert der Integralrechnung für die Naturwissenschaften.

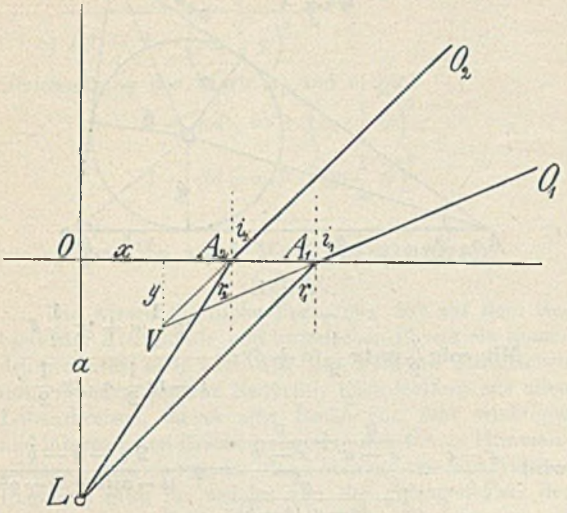
Ueber das virtuelle Bild eines unter Wasser befindlichen Punktes.

Von Dr. H. Wieleitner (Pirmasens).

Ein unter Wasser befindlicher Punkt L erscheint einem über Wasser befindlichen Auge O_1 »gehoben«. Ueber diese Tatsache hat in unseren Blättern auf Seite 34/35 d. Jahrg. Herr W. Jaeckel eine sehr hübsche Betrachtung mitgeteilt, die den Ort des virtuellen Bildes V in engere Grenzen einschließt. Da man aber den genauen Ort von V ohne Schwierigkeit angeben kann, ist vielleicht eine Mitteilung hierüber manchen Kollegen erwünscht.

Vor allem möchte ich sagen, daß man von dem genauen Ort für V nur sprechen kann, wenn man den Strahl O_2A_2L unendlich nahe an den ins Auge führenden Strahl O_1A_1L heranrückt. Denn wenn man alle von L ausgehenden Strahlen LA_i sich gezogen denkt, so hüllen bekanntlich die gebrochenen Strahlen A_iO_i eine Kurve ein, die sog. »Diakaustik« des Punktes L in bezug auf die brechende Linie, und der jeweilige Berührungspunkt V_i des gebrochenen Strahles mit der Brennlinie ist, als Schnittpunkt zweier konsekutiven Strahlen, das jeweilige virtuelle Bild von L. Zwischen zwei durch eine endliche Strecke A_1A_2 getrennten Strahlen A_2O_2 und A_1O_1 würde also eigentlich ein ganzes Bogenstück V_2V_1 der genannten Brennlinie liegen.

Wir verlängern nun die zunächst getrennten austretenden Strahlen O_1A_1 und O_2A_2 bis zum Schnittpunkte V und bestimmen die Grenzlage V, wenn der Strahl $L A_2$ dem Strahl $L A_1$ unendlich nahe rückt. Indem wir das aus der Figur leicht zu entnehmende



Koordinatensystem zugrunde legen und die Entfernung des Punktes L vom Wasserspiegel mit a bezeichnen, sehen wir, daß

$$A_1 A_2 = a(\operatorname{tg} r_1 - \operatorname{tg} r_2)$$
$$= -y(\operatorname{tg} i_1 - \operatorname{tg} i_2).$$

Wir haben also sofort

$$y = -a \cdot \frac{\operatorname{tg} r_1 - \operatorname{tg} r_2}{\operatorname{tg} i_1 - \operatorname{tg} i_2}.$$

Gehen wir zur Grenze für $r_1 = r_2$ über, so gibt das

$$y = -a \cdot \frac{d(\operatorname{tg} r_1)}{d(\operatorname{tg} i_1)}$$
$$= -a \cdot \frac{\cos^2 i_1}{\cos^2 r_1} \cdot \frac{d r_1}{d i_1}.$$

Nun ist aber $\qquad \sin i_1 = n \sin r_1,$

also $\qquad \cos i_1 \, d i_1 = n \cos r_1 \, d r_1$

und $\qquad \frac{d r_1}{d i_1} = \frac{\cos i_1}{n \cos r_1},$

woraus $\qquad y = -\frac{a}{n} \cdot \frac{\cos^3 i_1}{\cos^3 r_1}$,

oder, wenn wir alles durch r_1 ausdrücken

$$y = -\frac{a}{n} \cdot \frac{\sqrt{(1 - n^2 \sin^2 r_1)^3}}{\cos^3 r_1}.$$

Dieser Ausdruck kann leicht auf die Form gebracht werden

$$\text{(I)} \qquad y = -\frac{a}{n}\left[1 - (n^2 - 1)\operatorname{tg}^2 r_1\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Die Grenze für die Realität von y bildet natürlich der durch

$$\sin r_g = \frac{1}{n}$$

bestimmte Grenzwinkel. Für ihn wird $y = 0$; das Bild steigt bis an die Oberfläche des Wassers. Für alle kleineren r_1 ist jedenfalls der Klammerausdruck bei y kleiner als 1 und da außerdem $n > 1$, so ist immer $|y| < a$, also das Bild gehoben. Bei senkrechtem Daraufblicken — für $r_1 = 0$ — wird $y = -\frac{a}{n}$, also $-\frac{3}{4}a$, wenn man für Luft-Wasser den abgerundeten Brechungsindex $\frac{4}{3}$ nimmt.

Die Abszisse x von V zu berechnen ist nun leicht. Man hat

$$x = \lim \left\{ a \operatorname{tg} r_2 + y \operatorname{tg} i_2 \right\}_{\substack{i_2 = i_1 \\ r_2 = r_1}}$$
$$= a \operatorname{tg} r_1 \left(1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} r_1} \cdot \frac{\cos^3 i_1}{\cos^3 r_1}\right)$$
$$= a \operatorname{tg} r_1 \left(1 - \frac{\cos^2 i_1}{\cos^2 r_1}\right)$$

und schließlich

$$\text{(II)} \qquad x = a(n^2 - 1)\operatorname{tg}^3 r_1.$$

Der Wert von x ist also auf alle Fälle positiv, so daß schon dadurch beide Lagen, die Herr Jaeckel durch nicht genügend genaue Zeichnungen darstellte, ausgeschlossen werden; V liegt also jedenfalls in dem $\triangle O L A_1$, das mit $O L A_2$ in der Grenze zusammenfällt.

Die Elimination von r_1 aus (I) und (II) gibt aber nun sofort die Gleichung des Ortes von V, d. i. die Gleichung der Brennlinie in der Form

$$\text{(III)} \qquad \left(\frac{x\sqrt{n^2-1}}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y\,n}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Für $n > 1$ ist das die Evolute einer Ellipse. Die eine Spitze des für uns hier in Betracht kommenden Quadranten dieser Evolute liegt in L, die andere in jenem Grenzpunkte auf der x-Achse, für den der austretende Strahl die Wasseroberfläche streift. Seine Abszisse ist

$$x_g = \frac{a}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Die Halbachsen der zugehörigen Ellipse sind, wie man ja jedem Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung entnehmen kann,

$$p = a\sqrt{n^2 - 1} = \frac{a}{\operatorname{tg} r_g}, \quad q = a n = \frac{a}{\sin r_g}.$$

Da $q^2 - p^2 = a^2$, so ist L in diesem besonderen Falle auch noch Brennpunkt der Ellipse. Die Zeichnung der Ellipse und ihrer Evolute kann sich ja jeder Leser nach den gegebenen Daten selbst machen.

Was ich hier ausführte, ist durchaus nicht neu. Man sehe die Arbeiten von K. L. Bauer in den Annalen der Physik **153** (1874), von W. Saltzmann in der Zeitschr. Math. Phys. **32** (1887), ferner E. Verdet, Leçons d'optique physique, t. I (I, 4) und M. Sturm, Compt. Rend. Ac. Paris **20** (1845); bezüglich der Brennlinien die Werke über spezielle Kurven von G. Loria und vom Verfasser.

Soll und kann man das nun in der Schule durchnehmen? Den Grenzpunkt V kann man nach meiner Ansicht gewiß überall bestimmen. Vor allem wird eine Zeichnung, wo beide gebrochenen Strahlen konstruiert werden, ohne weiteres den wahren Sachverhalt ersehen lassen. Aber auch der Grenzübergang, den ich mittels der gewöhnlichen Bezeichnung der Differentialrechnung durchführte, läßt sich, auch wo diese (noch) nicht zur Verfügung steht, in eine so einfache Form bringen, daß er nicht mehr Schwierigkeiten bietet als jener, der zum Kugelvolumen führt. Für den Schüler sind eher die Umrechnungen der trigonometrischen Funktionen unangenehm. Ferner kann man überall die Brennlinie zeichnen lassen, wo man nicht bis zu ihrer Gleichung vordringen will. Und ob man es soll? Das wird von der zur Verfügung stehenden Zeit und vom Mathematiker abhängen. Denn dem Physiker wird in den meisten Fällen der ins Wasser gehaltene Stock und der Versuch mit der Münze auf dem Boden eines Gefäßes genügen. Die Aufgabe bietet aber doch ein hübsches Beispiel für die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf ein im Grunde doch physikalisches Problem.

Kleinere Mitteilungen.

Von C. Herbst, Dipl.-Ing. (Bochum).

1. Mechanisches Verfahren zur Erreichung einer gewünschten Stellenzahl beim Multiplizieren.

Ist auf n Dezimalen das Produkt $z_1 \cdot z_2$ zu berechnen, wo z_2 vor dem Komma a Stellen hat, so zählt man vom Komma des Faktors z_1 um $n + a$ Stellen nach rechts und erhält so ganz mechanisch die abzuwerfenden Stellen.

$75{,}4836 \cdot 8{,}\overset{*}{4}76$ (zu rechnen auf 4 Stellen; $n = 4$, $a = 1$, $n + a = 5$. Bei $\overset{*}{4}$ beginnt die Abrundung.)

p sei die Dezimalensumme von z_1 und z_2, es sind daher $p - n$ Stellen abzuwerfen. Rechts vom ersten Komma stehen insgesamt $p + a$ Stellen; geht man auf diesen um $n + a$ nach rechts, so kommen in der Tat in Fortfall $p + a - (n + a) = p - n$ Stellen.

Im allgemeinen pflegt man $n - 1$ Stellen zu garantieren, bei höheren Ansprüchen können jedoch nur $n - 2$ Stellen verbürgt werden, was im folgenden geschehen soll.

$375{,}483\overset{*}{6} \cdot 98{,}476$ (zu garantieren Zehner; zu rechnen mit $n = 1$, $a = 2$, $n + a = 3$)

$$
\begin{array}{r}
\underline{375{,}484 \cdot 98{,}476} \\
337936 \\
30038 \\
1502 \\
262 \\
22 \\
\hline
36976{,}0 \sim 36980
\end{array}
$$

$87{,}32\overset{*}{8} \cdot 0{,}59678$ (z. gar. Einer $n = 2$, $a = 0$)

$$
\begin{array}{r}
\underline{87{,}33 \cdot 0{,}5968} \\
4366 \\
786 \\
52 \\
6 \\
\hline
52{,}10 \sim 52.
\end{array}
$$

Derartige Rechnungen werden natürlich völlig illusorisch, wenn z_1 und z_2 nur Näherungswerte genauer Zahlen z' und z'' angeben, aus denen sie durch irgendwelche Abrundung hervorgegangen sind. z_1 habe k, z_2 habe $k + m$ Dezimalen. Nimmt man ungünstigerweise bei z_1 und z_2 eine Abrundung im gleichen Sinne an, etwa $z_1 < z'$ und $z_2 < z''$, so hat man bei den absoluten Einzelfehlern f_1 und f_2

$$z' \cdot z'' = (z_1 + f_1)(z_2 + f_2) \sim z_1 z_2 + f_2 z_1 + f_1 z_2,$$

da $f_1 f_2$ belanglos. Demnach wird der maximale Gesamtfehler $f_{max} = f_2 z_1 + f_1 z_2$. Mit

$$f_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^k}, \quad f_2 = \frac{1}{2 \cdot 10^{k+m}}$$

wird

$$f_{max} = \frac{1}{2 \cdot 10^{k+m}} (z_1 + 10^m \cdot z_2)$$

Ist bei unbekannter Abrundung gegeben

$$z_1 \cdot z_2 = 395{,}483 \cdot 4{,}997,$$

so ist $k = 3$, $m = 0$ $f_{max} = 0{,}20024$, so daß hier schon die erste Dezimale von $z_1 \cdot z_2$ unrichtig wird. Die Bestimmung von f_{max} zeigt, daß nur auf $n = 3$ Dezimalen zu rechnen ist.

$$
\begin{array}{c}
395{,}483 \cdot 4{,}\overset{*}{9}97 \quad (n + a = 4) \\
\hline
1976{,}228.
\end{array}
$$

Nimmt man $\pm f_{max}$ hinzu, so folgt 1976,4 bezw. 1976,0; daher kann 1976 garantiert werden.

Für $z_1 \cdot z_2 = 3786{,}54 \cdot 0{,}5396$ wird $k = 2$, $m = 2$, $f_{max} = 0{,}192$ und mit $n = 3$ folgt

$$z_1 \cdot z_2 \pm f_{max} = 2043{,}217 \pm 0{,}192 = 2043{,}4$$

bezw. 2043,0; zu gar. 2043.

II. Bestimmung von ϱ (Fig. 1).

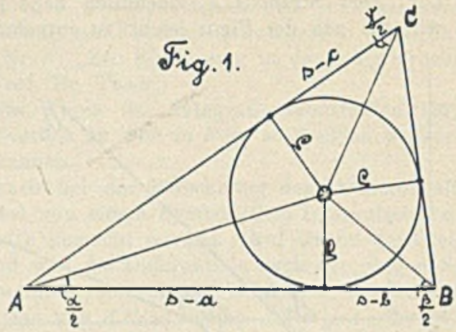


Fig. 1.

$$\text{Mit } \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta}$$

$$\text{wird} \quad \frac{s - c}{\varrho} = \frac{\frac{\varrho}{s - a} + \frac{\varrho}{s - b}}{1 - \frac{\varrho^2}{(s - a)(s - b)}} = \varrho \cdot \frac{2s - a - b}{(s - a)(s - b) - \varrho^2}$$

$$(s - a)(s - b)(s - c) = \varrho^2 \cdot s; \quad \varrho = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}}$$

III. Ist in Fig. 2 $h \perp OB$ und $h \perp OC$, so ist in Ebene E für ein beliebiges OD auch $h \perp OD$.

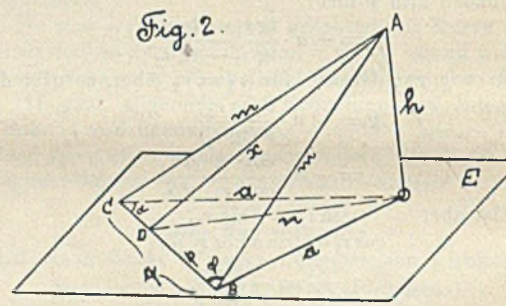


Fig. 2.

$$\text{Es ist } \frac{q}{2} = m \cdot \cos \varphi = a \cdot \cos \alpha$$

$$x^2 = m^2 + p^2 - 2mp \cdot \cos \varphi =$$
$$= h^2 + a^2 + p^2 - 2ap \cdot \cos \alpha = h^2 + n^2; \text{ also } h \perp OD.$$

Geometrische Ableitung der Formeln für $(1 \pm \cos \varphi)$.

Von Dr. Karl Bochow (Nordhausen).

AB ist der Durchmesser eines Halbkreises mit dem Radius r, $BMC = \varphi$ ein Zentriwinkel, also $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \varphi$, und wenn $CD \perp AB$, so ist auch $\sphericalangle BCD = \frac{1}{2} \varphi$.

Man liest aus der Figur ab:

I a) $AD = r + r \cos \varphi = r(1 + \cos \varphi)$

b) $\left.\begin{array}{l} AD = AC \cdot \cos \frac{1}{2} \varphi \\ AC = AB \cdot \cos \frac{1}{2} \varphi \end{array}\right| AB = 2r$, also

c) $AD = 2r \cdot \left(\cos \frac{1}{2} \varphi\right)^2$.

II a) $BD = r - r \cos \varphi = r(1 - \cos \varphi)$

b) $BD = BC \cdot \sin\frac{1}{2}\varphi$, $BC = BA \cdot \sin\frac{1}{2}\varphi$ $\Big|$ $AB = 2r$, also

c) $BD = 2r \cdot \left(\sin\frac{1}{2}\varphi\right)^2$.

Gleichsetzung der Werte a) und c) gibt

$$1 + \cos\varphi = 2 \cdot \left(\cos\frac{1}{2}\varphi\right)^2$$

$$1 - \cos\varphi = 2 \cdot \left(\sin\frac{1}{2}\varphi\right)^2.$$

Vereine und Versammlungen.

Aufruf.

Die wissenschaftliche Forschung hat auf dem Gebiete der Astronomie und kosmischen Physik ein immer dringenderes, aber auch für das gesamte Kulturleben immer bedeutsameres Bedürfnis nach Helfern aus allen Lebenskreisen, da es eine Reihe von sehr wichtigen und interessanten Erscheinungen in den fernen Himmelsräumen, wie auch in den oberen atmosphärischen Regionen gibt, für welche von der geringen Zahl der astronomischen Fachmänner und der Sternwarten nur Vereinzeltes oder Unvollständiges geleistet werden kann. Verlaufen doch diese Erscheinungen vielfach so, daß sie nur bei gleichzeitiger und über weite Räume verteilter Ausschau möglichst vieler Beobachter tiefer erforscht werden können.

Die Vereinigung von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik wendet sich deshalb mit der Bitte um Mitarbeit an alle, welche sich in den verschiedensten Tages- und Nachtzeiten im Freien aufzuhalten pflegen und sich dabei des Ausblickes auf den Himmel mit Interesse und einigem Verständnis für die dortigen Vorgänge erfreuen, insbesondere an die Lehrer aller Unterrichtsstufen, die Geistlichen aller Bekenntnisse, an alle mathematisch oder naturwissenschaftlich speziell Vorgebildeten, wie Aerzte, Tierärzte und Apotheker, Uhrmacher, Bau-, Eisenbahn- und Bergbeamte und Techniker aller Art, Militärs, Land- und Forstwirte, sowie Geschäftsleute verschiedenster Art, Natur- und Sportsfreunde aus allen Berufskreisen, wesentlich auch an die Luftfahrer, sowie in besonderer Weise an die gebildeten Deutschen in den Kolonien, überhaupt in den andern Erdteilen und auf Seereisen, und bittet sie, ihre Adressen zwecks näherer Information und Verständigung an F. Dümmler, Berlin W 30, Rosenheimerstraße 12, zu senden.

Eingehende mathematische Kenntnisse werden bei solcher Mitarbeit nicht vorausgesetzt; doch soll das Verständnis der Erscheinungen und die daraus hervorgehende tiefere Freude an denselben durch das Zusammenwirken in besonderer Weise gepflegt werden.

Die Vereinigung
von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik.

Für den Vorstand:
Geheimrat Prof. W. Foerster in Charlottenburg, Westend, Kaiserdamm 84.
Geheimrat Prof. W. Schleyer in Hannover, Alleestraße 4.
Prof. J. Plaßmann in Münster i. W., Nordstraße 47.

Ueber Auskunftsstellen für die Berufswahl macht Prof. O. Presler-Hannover in der Monatsschrift des Vereins deutscher Ingenieure bemerkenswerte Vorschläge: „Aus den Erfahrungen heraus, die ich in langjähriger Tätigkeit auf dem Gebiete der Auskunfterteilung für Berufswahl gesammelt habe, bin ich der Ansicht, daß der großen Rückständigkeit auf diesem wichtigen Gebiete nur durch planmäßig erwogenes Zusammenwirken von Staat, städtischen und privaten Körperschaften abgeholfen werden kann. Meine Vorschläge gehen dahin: Es sind Bestimmungen zu treffen für diejenigen Personen, welche bei der Berufswahl Auskunft erteilen. Sie werden unterschieden in solche, die dies im Nebenamte tun, und solche, die es hauptberuflich tun. Für die erstgenannten schlage ich den Namen Berufsbeiräte, für die letzteren die Bezeichnung Berufsanwälte vor. Die Berufsanwälte sollten akademisch gebildet sein; für die Ausbildung der Beiräte, an die zunächst nur geringere Anforderungen zu stellen wären, müßte durch besondere Kurse gesorgt werden. Die Hauptsache wird ein sozial gebildeter und sozial empfindender Charakter sein. Diese Beiräte und Anwälte würden gleichzeitig geeignet sein, auch im Sinne des neuesten Erlasses vom 18. Januar auf allen Gebieten der Fürsorge für die schulentlassene Jugend tätig zu sein. Die Angliederung solcher Auskunftsstellen an Wohlfahrts- und berufliche Vereinigungen aller Art wird mit Aufwendung geringer Mittel zu erreichen sein, besonders dann, wenn sich die Auskunft zunächst nur auf den jedesmal am nächsten liegenden Beruf beschränkt. Vielfach werden ja jetzt durchaus zweckentsprechende Auskünfte von solchen Vereinen erteilt; so gelangen z. B. an die Geschäftsstelle des Vereins deutscher Ingenieure Jahr für Jahr eine große Anzahl von Anfragen über die Möglichkeiten der technischen Ausbildung und der technischen Berufe, und werden von ihr in entgegenkommender Weise erledigt. Auch die Städte könnten zunächst in kleinerem Umfange derartige Auskunftsstellen begründen, da nicht sofort die Mittel vorhanden sein werden, im großen Maßstabe vorzugehen. Der Staat endlich, der das allergrößte Interesse daran hat, daß jeder Bürger den seinen Anlagen und Fähigkeiten entsprechenden Beruf findet, ferner daran, daß eine Ueberfüllung möglichst vermieden wird, würde der Sache wesentlich dienen, wenn auch er an den geeigneten Stellen der Verwaltung Berufsbeiräte einstellen wollte. Eine weitere sehr wichtige Aufgabe würde ihm zufallen in dem Ausbau der Berufsstatistik. Die Feststellung, wieviel Stellen ein Beruf hat, wie groß der jährliche Abgang ist, ist für die Berufswahl von großem Interesse. Die Ergebnisse dieser Statistik sowie die Bestimmungen für die Aufnahme in die verschiedenen Berufe müßten den Auskunftstellen leicht zugänglich gemacht werden, etwa in Form eines Handbuches für Berufswahl, das zu einem geringen Preise — in der Art des Gesundheitsbüchlein, das vom Reichs-Gesundheitsamt herausgegeben wird — für jedermann erschwingbar ist. Im Ministerium müßte ähnlich der Auskunftsstelle für Lehrbücher in den Schulen eine Sammelstelle vorhanden sein, die sich nur mit der Organisation und Förderung des Auskunftwesens für Berufswahl beschäftigt. Es würde mir eine große Genugtuung sein, wenn durch meine Ausführungen viele Mitglieder des Vereins deutscher Ingenieure veranlaßt würden, sich für die Organisation der Auskunftstellen zu erwärmen und an ihr zu beteiligen."

Indem wir der Hoffnung Ausdruck geben, recht bald Auskunftsstellen für Berufswahl entstehen zu sehen, verweisen wir auf einen ausführlichen Artikel der

Kölnischen Zeitung vom 27. April d. J. und auf den Artikel „Berufswahl" im Handbuch für Kinderschutz und Jugendfürsorge, dessen letzte Lieferung soeben erschienen ist.

Mögen die Auskunftsstellen zugleich dazu beitragen, daß der Zudrang zu den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern mehr nachläßt, damit der drohenden Ueberfüllung noch rechtzeitig vorgebeugt wird. Die Redaktion.

Lehrmittel-Besprechungen.

Ein neues Lunarium nach Perregaux.

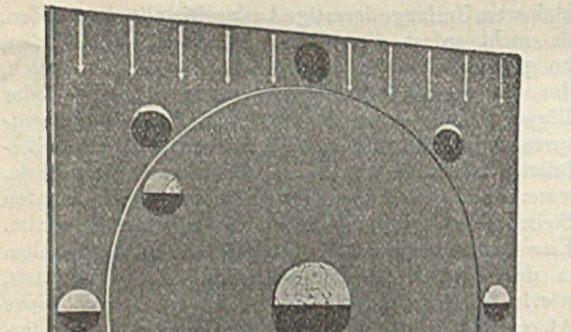
D. R.-G.-M. 461 772.

Von Dr. Kiesewetter.

Während die bekannten Mangschen Apparate und ähnliche besonders ihrer universellen Verwendung wegen eine so eingehende und zeitraubende Vorbereitung erfordern, daß sie vielleicht nicht immer und überall in der Schulpraxis die Anwendung finden, die ihnen sicherlich zu wünschen wäre, ist der hier zu besprechende, von Herrn Ch. Perregaux angegebene Apparat bei größter Uebersichtlichkeit so einfach in seiner Konstruktion und Handhabung, daß er in der Tat auch nicht die geringste Vorbereitung erfordert.

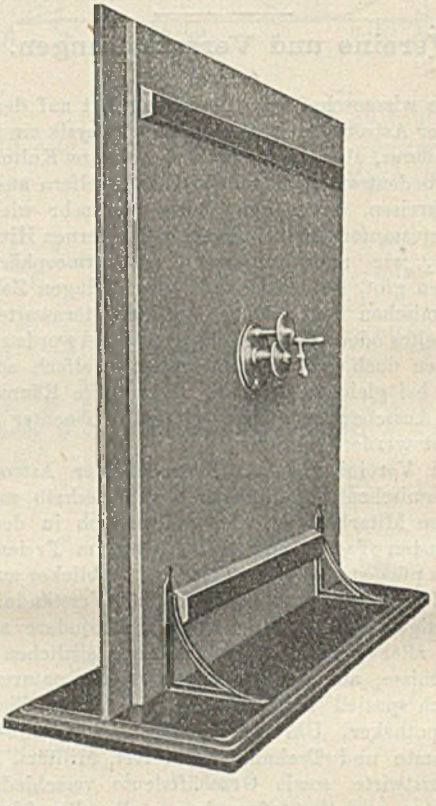
Gleichzeitig sind ihm für alle Auditoriengrößen ausreichende Abmessungen gegeben worden, so daß er allen Unterrichtsverhältnissen gerecht wird.

An der oberen Kante einer großen dunkelblauen vertikalen Scheibe deuten einige helle parallele Pfeile die Richtung der Sonnenstrahlen an, welche die im Zentrum des Apparates drehbare, durch eine Scheibe dargestellte Erdkugel und den um diese rotierenden Mond beleuchten.



Durch eine an der Rückseite des Apparates befindliche Handkurbel und ein Zahnradgetriebe, welches entsprechend der mittleren synodischen Mondumlaufszeit zwischen Perihel und Aphel der Erde übersetzt ist, kann sowohl die Erdscheibe in der Mitte gedreht, als auch die Mondscheibe im Kreise um die Erde herum bewegt werden, und zwar, wie gesagt, entsprechend der synodischen Umlaufszeit des Mondes.

Um die von der Sonne beschienenen Teile der Erde und des Mondes von den dunklen Teilen recht anschaulich zu unterscheiden, sind vor den beiden, Erde und Mond darstellenden Scheiben schwarze, halbmondförmige Metallscheiben pendelartig aufgehängt, welche also bei der Rotation stets die der Sonne abgewandte Seite von Erde und Mond verdecken und dunkel erscheinen lassen.



Die aus der dauernd veränderten Stellung des Mondes gegen Sonne und Erde resultierenden wechselnden Lichtgestalten (Mondphasen) sind dadurch in sehr klarer Weise auch einem größeren Hörerkreise zur Anschauung gebracht worden und zwar nicht nur durch eine zeichnerische Darstellung, sondern durch fortlaufendes Entstehenlassen der Phasen vor den Augen des Hörers. Zur bequemen Fixierung der einzelnen Umlaufsphasen sind acht Stellungen des Mondes auf dem Rande des Apparates durch feste Zeichnungen dargestellt, welche genau mit den Phasen des jeweils vorübergeführten Mondbildes übereinstimmen.

An dem Apparate, der als D. R.-G.-M. von der Firma Ferdinand Ernecke, Berlin-Tempelhof, fabriziert wird, lassen sich mit großer Anschaulichkeit die für den Unterricht hauptsächlich in Betracht kommenden Begriffe demonstrieren wie: Neumond, erstes Viertel, Vollmond, letztes Viertel, Neuerde, Vollerde u. a. m. Auch zeigt der Apparat, daß der Mond sich bei jedem Umlauf einmal um sich selbst dreht und der Erde stets dieselbe Kugelhälfte zuwendet.

Bücher-Besprechungen.

Natorp, P., Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. 416 S. B. G. Teubner. M 6.60.

Die Wechselbeziehungen zwischen Philosophie und exakten Wissenschaften stehen seit dem Neuerwachen des Kantianismus wieder im Mittelpunkt des philosophischen Interesses. Philosophen wie Mathematiker und Naturforscher suchen die erkenntnistheoretischen Probleme, die sich hier bieten, zu bewältigen. Dabei ist ein Gegensatz nicht zu verkennen: die meisten Philosophen suchen die neuen, grundlegenden Entdeckungen der exakten Wissenschaften in Uebereinstimmung mit den wichtigsten Kantischen Lehren zu bringen; sie erstreben den Nachweis, daß auch heute noch in den wesentlichen Punkten die Ideen Kants über die Grundlagen der Mathematik und der mathematischen Physik gelten. — Die Naturwissenschaftler hingegen glauben durch ihre neuen, fundamentalen Entdeckungen Kant überwunden zu haben. Die erste Waffe im Kampfe gegen das Apriori der Erkenntnistheorie gab ihnen die Metageometrie, die neueste ist das Relativitätsprinzip von Einstein und Minkowski. — Wenn eine Einigung in diesem langen Streite so schwer zu erzielen ist, so liegt das hauptsächlich an den Vertretern der exakten Wissenschaften, weil sie sich meist mit etwas lückenhafter philosophischer Bildung an die philosophische Behandlung dieses schwierigen Zwischengebietes wagten. Ich denke dabei natürlich nicht etwa an Männer wie Haeckel, sondern an Gauß, Riemann, Georg Cantor Helmholtz; Denker, die zweifelsohne philosophische Richtung hatten, aber deren philosophische Schulung nicht tief und geübt genug war, um diese subtilsten Fragen erfolgreich behandeln zu können. Hingegen kann man den Vorwurf zu geringer naturwissenschaftlich-mathematischer Bildung einer Reihe Philosophen nicht machen. Das gilt vor allem auch von Natorp, wie sich deutlich in dem zur Besprechung vorliegenden Buche zeigt. Der Verfasser betont selbst in seinem Vorwort, daß er eine umfassende Vertrautheit mit den exakten Wissenschaften als erste Grundlage für eine philosophische Behandlung derselben für nötig hält, und das Verzeichnis der von ihm benutzten Literatur zeigt, wie ernst er es mit dieser Vertrautheit meint.

Das Buch Natorps zerfällt in zwei Teile, einen rein erkenntnistheoretischen und einen zweiten, der die im ersten Teile gewonnene Erkenntnis auf die vorliegenden mathematischen und physikalischen Probleme anwendet. Der erste Teil könnte eine moderne „Kritik der reinen Vernunft" genannt werden. Er fußt natürlich auf Kant und steht in Beziehung zu Cohens „Logik der reinen Erkenntnis". Dieser Teil ist für den Naturwissenschaftler nicht leicht zu lesen, nur der, welcher sich schon eingehender mit Kants Problemen beschäftigt hat, wird ihn ohne große Mühe verstehen können. Einem nicht mit Kant Vertrauten aber kann er als ein vorzügliches Lehrbuch der transzendentalen Logik, empfohlen werden, wenn sein Interesse die Mühe, die das Eindringen in die Erkenntnistheorie fordert, überwinden will. Dieser erste Teil bietet meiner Meinung nach mehr, als zum Verständnis des zweiten unbedingt erforderlich ist. Aber er ist in dieser Vollständigkeit nötig, wenn das Buch nicht bloß eine — wenn auch im besten Sinne — populäre Darstellung werden sollte. Das lag Natorp sicher völlig fern.

Der zweite Teil des Buches bringt uns eine zusammenfassende, kritische Untersuchung über die mathematischen und mathematisch-physikalischen Grundbegriffe und Grundsätze. Da werden alle die Dinge im Zusammenhang besprochen, von denen man auf der Universität so gut wie nichts hört, von denen man in der mathematischen und physikalischen Literatur sehr zerstreut bald das eine, bald das andere, geschickt oder ungeschickt behandelt, findet. — Natorp beginnt mit einer Aufstellung der Zahlengrundreihe, bespricht dann die Begriffe Null und Eins und — etwas breit — die grundlegenden Rechnungsarten, wobei besonders das Problem der Erweiterung der Zahlenreihe (z. B. das Permanenzprinzip Hankels) kritisch beleuchtet wird. Im nächsten Kapitel folgen außerordentlich wertvolle Untersuchungen über Unendlichkeit und Stetigkeit. Die verschiedenen Arten des Unendlichen, wie sie Georg Cantors tiefsinnige Untersuchungen über Punktmächtigkeiten geschaffen haben, das Problem des Irrationalen, mit seinen Lösungsversuchen von Weierstraß, Cantor, Veronese, der Funktionsbegriff, der Differentialquotient, alles das wird kritisch besprochen, anerkannt oder verbessert. — Eine Rechtfertigung der Einführung der Begriffe Dimension und Richtung in die Zahl leitet nunmehr über zur Betrachtung von Raum und Zeit. Für Natorp ist die Zahl der einzige Grundbegriff der reinen Mathematik. Zeit und Raum sind zwar auch Setzungen der reinen Erkenntnis, haben aber zunächst mit reiner Mathematik nichts zu tun. Da sie aber Gebilde vom Typus des Mathematischen sind, können ihre Gesetze ohne jede Erfahrung durch Mathematik erschlossen werden. Hierbei sind aber Zeit und Raum rein als mathematische Gebilde aufzufassen. Davon zu trennen ist eine zweite Betrachtung, die Zeit und Raum als Grundbedingungen der Existenzbestimmung in möglicher Erfahrung behandelt (Mechanik). Als rein mathematischer Begriff unterliegt der Raum keinerlei Einschränkung hinsichtlich der Anzahl seiner Dimensionen und der Wahl seiner Grundgebilde. So wird Platz für die verschiedenen metageometrischen Systeme. Aber in der zeitlich-räumlichen Anordnung der Erscheinungen treten Einschränkungen in der Zahl der Dimensionen usw. auf. So sind Kants Ideen im wesentlichen zu deuten, und so ist er durch die Metageometrie nicht überwunden, sondern ergänzt. (Erwähnt sei an dieser Stelle noch die ausführliche und günstige Beurteilung, die Natorp in seinem Buche dem Werke J. Wellsteins über „die Grundlagen der Geometrie" zuteil werden läßt.)

Das letzte Kapitel des Buches behandelt Grundbegriffe und Grundsätze der mathematischen Physik: Sind „absolute" Zeit und „absoluter" Raum nur müßige Gedankendinge, die in Erfahrung nicht aufgezeigt werden können, daher weder praktischen noch wissenschaftlichen Wert besitzen (Machs Empirismus)? — Können Experimente und Beobachtungen etwas über den Raum entscheiden, oder läßt sich jede physikalische Empirie mit jeder Geometrie durch geeignete Voraussetzungen rechnerisch in Einklang bringen (Poincaré)? — Sind es Grundbegriffe, die all unserer wissenschaftlichen Bestimmung von Existenz vorangehen, deren Wissen das sicherste ist (Natorp)? — Sind Substanz und Energie und ihre Erhaltungsgesetze notwendige Voraussetzungen physikalischen Erkennens oder empirische Erkenntnis? — Ist Masse unzerstörbar oder nur eine Folge der Energieverteilung, der Ausdruck bestimmter „innerer Arbeit", so daß ihr Unzerstörbarkeit nicht zugeschrieben werden kann (Planck)? — Was soll es bedeuten, wenn wir von „Prinzipien" der Mechanik reden? — Es sind nicht Sätze, die den Verlauf von Bewegungen in der Natur beschreiben, sondern die obersten Voraussetzungen, durch die eine wissenschaftliche Darstellung der wirklichen Bewegungen erst möglich wird. — Zum Schluß bespricht der Verfasser die neueste Entdeckung auf dem Gebiete der mathematischen Physik, das Relativitätsprinzip von Lorentz, Einstein und Minkowski. Er gibt hier, wie er selbst sagt, nur „einen ungewissen letzten Ausblick", aber soviel erscheint ihm sicher, daß diese gänzliche Relativierung der Zeitbestimmung nur die Bestätigung der fundamentalsten Sätze Kants ist, und daß die so entstehende vierdimensionale Gestalt der mathematischen Physik keineswegs „eine neue Einsicht in die logische Bedeutung und den logischen Grund der rein mathematischen Bestimmung des Zeit- und Raumbegriffs; geschweige deren Abdankung" bedeutet.

Dr. P. Groebel (Groß-Flottbek).

* * *

Schimmack, Oberl. Dr. **R.**, Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland. Abhandlungen der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (I M U K) Bd. III, Heft 1, 146 S.

Dem Heft ist eine bemerkenswerte Einführung von Herrn F. Klein beigegeben, die sich auf den ganzen III. Band der I M U K Abhandlungen „Einzelfragen des höheren mathematischen Unterrichts" bezieht. Der internationale Anstoß hat zunächst eine gewaltige Menge nationaler Spannkraft ausgelöst. Wenn auch Deutschland zurzeit noch einen großen Vorsprung hat, indem hier bereits 10 Abhandlungen (von den projektierten 32) in der Stärke von 5—10 Bogen erschienen sind, die den mathematischen Unterricht schildern, wie er in den einzelnen Staaten Deutschlands auf den verschiedenartigen Lehranstalten betrieben wird, so sind doch auch in anderen Ländern, besonders Oesterreich, Italien, Frankreich, England gleich umfassende und eingehende Untersuchungen in Vorbereitung, die schwerlich ohne den Wettbewerb zutage getreten wären. Wird es eine spätere Aufgabe sein, internationalen Nutzen hieraus zu ziehen, so ist es schon jetzt möglich, sich von dem nationalen Besitz in Deutschland ein annäherndes Bild zu machen und dies wird befruchtend auf den Unterricht einwirken.

Herrn Schimmacks Abhandlung entwirft nun ein Bild von dem gegenwärtigen Standpunkt der Reformbewegung, das durch seine objektive Würdigung der fördernden und hemmenden Einflüsse sowie des langsamen Gesamtfortschritts durch die oft ihrer Zeit weit voraneilenden und zum Teil noch lange nicht realisierbaren Vorschläge selbst in hohem Maße anregend wirkt. Natürlich kann zurzeit ja nur dargestellt werden, was und wie auf den Anstalten und in den Lehrbüchern, die sich ausgesprochenermaßen auf den Reformstandpunkt stellen, gelehrt wird. Von Erfolgen nach so kurzer Wirkungsdauer zu sprechen wird i. A. mit Recht vermieden, auch die Kritik der Versuche, Teile der Reformvorschläge dem alten Lehrgang einzufügen, ist maßvoll, wenn solche auch prinzipiell verworfen werden und einheitliche Durchführung verlangt wird. Ganz besonders soll auf den bescheiden in den Anhang verwiesenen Entwurf einen mathematischen Lehrplans für Oberrealschulen hingewiesen werden, der eine gediegene wohldurchdachte Arbeit des Herrn Verfassers darstellt. Gerade daß er von dem geltenden Lehrplan äußerlich nicht zu sehr abweicht und doch allen charakteristischen Forderungen der Reform sowohl an den einzelnen Stellen als auch in der ganzen Anlage volle Geltung verschaffe, macht ihn zu einem wesentlichen Hilfsmittel des Fortschritts. In Einzelheiten kann man anderer Meinung sein. Als eifriger Verehrer des Rechenschiebers und der projektiven Geometrie möchte ich warnen, beide nach Untersekunda zu verlegen. Vom Rechenstab wird hier entweder nur ein bischen Theorie gegeben, oder die Schüler, die einmal die Vorzüge des Rechenschiebers schätzen gelernt, lernen überhaupt nicht die Tafel gründlich und gewandt benutzen. Von Obersekunda an ist diese Gefahr selbst bei durchaus freigegebener Benutzung des Rechenschiebers kaum noch vorhanden. Für die projektive Geometrie sind die Schüler aber erst nach eingehender Behandlung der Trigonometrie und Stereometrie reif. Es widerspricht direkt dem Geist der Reformbewegung, durch maßgeometrische Betrachtungen ein paar projektive Sätze abzuleiten, die das Wesen der Geometrie der Lage eher verschleiern als enthüllen. Hat man keine Zeit, Sätze wie den Desargues zu behandeln, den Pascal gleich auf alle Kegelschnitte anzuwenden, so soll man lieber das ganze Gebiet streichen und der Hochschule überlassen. Zurzeit gehört es noch nicht zur „allgemeinen mathematischen Bildung"; im Schulunterricht sind wir erst eben mühsam der Wissenschaft bis in den Anfang des XVIII. Jahrhunderts gefolgt. Gleichzeitig ins XIX. einzudringen ist vielleicht zu viel, wenn aber, dann gründlich.

A. T.

* * *

Lietzmann, Dr. **W.**, Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher. Leipzig 1909, B.G.Teubner.

Dieser im Auftrage der internationalen mathematischen Unterrichtskommission bearbeitete Bericht gibt eine Uebersicht der Haupttypen der im mathematischen Unterricht der höheren Schulen Norddeutschlands benutzten Bücher und entwirft auf dieser Grundlage ein Bild des im allgemeinen von diesen Anstalten durchgenommenen Stoffes und der dabei angewandten Methoden. Insbesondere zeigt er, wie die neueren Reformbestrebungen, die im Sinn der Meraner Vorschläge in der Stoffauswahl auf ausgiebiges Heranziehen der Anwendungen, in der Methode auf Anschaulichkeit der Darstellung hinzielen, sich auch in der Lehrbuchliteratur schon durchgesetzt haben; sei es, daß neue, in ihrer ganzen Anlage auf diesen Grundsätzen aufgebaute Bücher erschienen sind, sei es, daß alte bewährte Schulbücher in Form eines Anhanges oder durch Aenderung der Darstellung sich den neuen Bestrebungen angepaßt haben. Im allgemeinen scheint, soweit man auf Grund der Lehrbücher allein urteilen kann, die bei uns übliche Methode die Mitte zu halten zwischen einem anschaulichen, vielfach die Induktion benutzenden Verfahren und einem Betriebe, der durch Herausarbeiten eines möglichst lückenlosen „Systems" unter starker Bevorzugung der Deduktion in erster Linie die formal (insbesondere logisch) bildenden Elemente der Mathematik zur Geltung bringen will; und zwar so, daß von unten nach oben die vorwiegende Herrschaft des ersten Verfahrens ergänzt und ersetzt wird durch die des zweiten.

Alles in allem bietet das Buch einen Ueberblick über den derzeitigen Stand des mathematischen Schulunterrichts in Norddeutschland und dürfte — abgesehen von dem internationalen Zweck, den es verfolgt — namentlich jüngeren Kollegen ein willkommenes Orientierungsmittel auf diesem heute so viel umstrittenen Gebiete sein. Lony (Hamburg).

* *

Kühtmann, G., Rechentafeln. XV, 500 Seiten Dresden, G. Kühtmann. 18 M.

Der Gebrauch von Rechentafeln ist in Lehrerkreisen nicht so verbreitet wie er es verdiente. Selbst wenn man ein entschiedener Anhänger des Rechenstabes ist, kann man es doch nicht umgehen, bisweilen Multiplikationen mehrziffriger Zahlen mit einer Genauigkeit ausführen zu müssen, daß selbst siebenstellige Logarithmen nicht ausreichen, wenn man nicht ein sehr künstliches Verfahren anwendet (Zerlegen in Summanden, Korrektur der letzten Ziffer durch Multiplikation). Das gewöhnliche Verfahren beansprucht allerdings ohne *PP* nur 3 Aufschlagungen, 3 Ablesungen und eine Addition, liefert aber nur 5 Ziffern (7 Operationen, 4 Fehlerquellen). Die *PP* verlangen aber je 4 Operationen mit je 4 Fehlerquellen, d. h. 19 Operationen mit 16 Fehlerquellen ergeben 7 Ziffern. Bei Anwendung einer drei- und dreistelligen Multiplikationstafel hat man bei dreiziffrigen Zahlen 1 Aufschlagung, 2 Ablesungen und 1 Addition (4 Operationen, 3 Fehlerquellen), bei sechsziffrigen Zahlen 2 Aufschlagungen, 8 Ablesungen, 1 (allerdings große) Addition, die man doppelt rechnen kann, d. h. 12 Operationen mit 10 Fehlerquellen, erhält aber dann 12 genaue Ziffern. Mit einer Multiplikationstafel arbeitet man also stets rascher, sicherer und in der Regel genauer. Allerdings wird dieser Vorteil z. T. dadurch aufgewogen, daß eine Log-Tafel 200 Seiten, eine Multiplikationstafel 500 Seiten beansprucht. Dementsprechend würde der Preis sein, doch enthalten die Logarithmentafeln meist auch trigonometrische Tafeln, so daß die gangbarsten wie Vega und Bruhns M 5,50 kosten. Dietrichleins Tafel kostet allerdings nur 3 M, liefert aber auch nur 5 Ziffern. Die drei- und zweistellige Multiplikationstafel von Zimmermann für 3 M ist unzweifelhaft ein sehr nützliches und bequemes Buch (200 S.). Von drei- und dreistelligen ist die von J. Ernst (Verlag von Vieweg & Sohn) durch praktische Anordnung, klaren Druck und Zuverlässigkeit ausgezeichnet, kostet auch gebunden nur 5 M.

Ein durchaus originelles Werk ist nun auf diesem Gebiet die Rechentafel von Kühtmann. Aeußerlich zeichnet sie sich durch überraschende Handlichkeit und prachtvoll große Ziffern aus. Sehr angenehm ist auch, daß man stets nur mit vierziffrigen Zahlen zu tun hat, was gegenüber den sonst nötigen sechsziffrigen, die der Durchschnittsmensch nicht mit einem Blick zu erfassen vermag, die Arbeit nahezu um die Hälfte erleichtert. Das ist nur möglich gewesen durch eine ganz eigenartige Zerlegung der Produkte. Ist etwa 367 mit 786 zu multiplizieren, so werden von dem Produkt $367 \cdot 780 = 286260$ die beiden letzten Ziffern fortgelassen. man findet also 2862, darunter in einer Zeile 0 in kleinen Ziffern $_{60}$. In der Zeile 6 ist dann in Kolonne 0 $367 \cdot 6 = 22_{02}$, in Kolonne 80 aber $22_{02+60} = 22_{62}$ aufgeführt. Die großen Ziffern sind zu addieren, also 2884 die kleinen hinzuzufügen. Ergebnis 2884_{62}. Die Probe $786 \cdot 367$ liefert

$$2829_{00} + 55_{62} = 2884_{62}.$$

Die Ernstsche Tafel gibt

$$282960 + 5502 = 288462,$$

das ist auf den ersten Blick leichter verständlich, aber eine Addition von vierstelligen Ziffern im Kopf ist nur bei ungewöhlicher Rechenfertigkeit auszuführen, während sie bei der Kühtmannschen Tafel sofort gelingt. Die kleine Mühe, sich in das System hineinzufinden, wird also reichlich belohnt. Erleichtert wird die Addition noch dadurch, daß die Summanden stets untereinander stehen. Der Vorteil wird noch größer bei der Division, denn man kann hier wirklich sofort 3 Stellen des Quotienten feststellen, während man bei der Ernstschen Tafel praktisch nur 2 Ziffern gewinnt, also nicht mehr als bei der Zimmermannschen.

In erster Linie sollen diese Zeilen überhaupt auf Rechentafeln hinweisen; es ist wirklich nicht eines Mathematikers unwürdig, sie zu benutzen. Dann aber sei ein Versuch mit der Kühtmannschen empfohlen, die leider durch ihren hohen Preis die Anschaffung erschwert. A. T.

* * *

Neuendorff, R., Oberl. a. d. Kgl. Maschinenbauschule in Kiel. Praktische Mathematik. I. Teil Graphisches und numerisches Rechnen. 104 S. Bd. 341 der Sammlung Aus Natur und Geisteswelt. Leipzig 1911. B. G. Teubner. M 1.25.

Das Bändchen ist aus populären Vorträgen hervorgegangen und bringt einerseits eine nützliche Zusammenstellung interessanter Kapitel aus dem Gebiet des graphischen und numerischen Rechnens, anderseits einige gute Abschnitte, die nicht jedem mathematischen Lehrer geläufig sind. Hier wäre eine ausreichende Beschreibung und Erklärung des Amslerschen Polarplanimeters und des Odhnerschen Schaltrads an Rechenmaschinen zu erwähnen. Recht brauchbar sind auch die graphischen Eisenbahnfahrpläne und die Untersuchungen über die Genauigkeit beim Multiplizieren und Dividieren praktisch gefundener Zahlen, die naturgemäß zu dem zwar schon von Bürgi erfundenen aber noch immer in den Schulen recht stiefmütterlich betriebenen abgekürzten Rechnen führen. Allerdings ist hier bei der Multiplikation der Multiplikator noch untergesetzt statt ihm daneben zu schreiben, auch bei der logarithmischen Rechnung fällt es auf, daß das Quadrat durch Multiplizieren gebildet wird, statt einfach den Logarithmus noch einmal darunter zu schreiben. Das sind aber Kleinigkeiten, die aus dem alten Haushalt der Rechenkunst stammen, sonst ist modern möbliert. A. T.

* * *

Auerbach, F., und **Rothe, R.**, Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. 2. Jahrgang. Leipzig und Berlin 1911. B. G. Teubner.

Der vorliegende 2. Jahrgang des Taschenbuches für Mathematiker und Physiker gibt in gedrängtester Form eine sehr vollständige Uebersicht der Begriffe, Resultate und Formeln der verschiedenen Teilgebiete der Mathematik und Physik, sowie der Elektrotechnik und der allgemeinen Chemie. Die erstaunliche Fülle des Stoffes, die hier auf engem Raum, aber sehr übersichtlich zusammengestellt ist, macht das Werk zu einem Nachschlagebuch, das jedem Fachgenossen auf das allerwärmste empfohlen werden kann. Einige aktuelle Kapitel sind in Sonderdarstellungen behandelt, so aus der Mathematik der Fermatsche Satz, die Grundzüge der Mengenlehre, Integralgleichungen, aus der Physik die Relativitätstheorie und die Radioaktivität. Am Schluß des Buches findet sich eine Uebersicht der Zeitschriften für Mathematik und Physik sowie der neuerschienenen Bücher aus beiden Gebieten, ferner ein Verzeichnis der Hochschullehrer, ein Ueberblick über die wichtigsten Bezugsquellen für Apparate und Lehrmittel sowie eine Totenschau. Einem der großen hier aufgezählten Toten, Herrn Minkowski, ist ein mit einem Bildnis geschmückter Nachruf zu Anfang des Taschenbuches gewidmet. Lony (Hamburg.)

* * *

Schnell, H., Elementare Ableitung der Pendelformel. Pg. d. K. Realschule Landsberg a. Lech. 48 S.

Außer einer Ableitung der Pendelformel gibt der Verfasser eine Berechnung von π unter Benutzung einiger goniometrischen Definitionen und Formeln. Er vermeidet aber den Fehler, die Werte der goniometrischen Funktionen zu benutzen. Man kann diesen Weg bei der Repetition in Prima jedenfalls einmal einschlagen, wenn man auch Bedenken trägt, ihn in Sekunda zu benutzen. Einen Merkvers für π, unter Benutzung der ersten Zeile aus einem in Schottens Zeitschr. 1905, S. 225 mitgeteilten, hat er als Hymnus auf Archimedes verfaßt und teilt ihn mit leiser Selbstironie mit:

Dir, o Held, o edler Philosoph!
du hehrer Geist, den viele Tausende bewundern,
dauernd erstrahlt, was du uns beschert.
Noch klarer in Fernen wird das uns leuchten,
was du erdacht, Erzdenker!
Stets unerschöpft, du edelster Erfinder!

„Unerschöpft“ steht hier für Null.

Für Liebhaber historischer Anekdoten ist auch eine kurze Notiz wertvoll, die rasch gestattet, durch Rechnung den Zusammenhang von g und der Mondbewegung zu prüfen. Die kleine Schrift ist lesenswert und sehr lesbar geschrieben, trotzdem mancher einige Fragezeichen setzen wird. A. T.

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Witting, Prof. Dr. A., Der mathem. Unterricht im Königreich Sachsen. IMUK II, 2. Leipzig 1910, Teubner. M 2.20.
Wossidlo, P., Leitfaden d. Mineralogie u. Geologie f. höh. Lehranstalten. 2., verb. Aufl. Berlin 1910, Weidmann. geb. M 3.40.
Wurm, Dr. W., Waldgeheimnisse. 3. Aufl. Bearb. von G. Schlenker und Dr. K. Floericke. Stuttgart, Kosmos.
Zeitschrift für Lehrmittelwesen und pädagog. Literatur, herausgeg. von Franz Frisch. VI. Jahrg., Heft 2, 3, 4, 8. Wien 1910, Pichlers Wwe & Sohn.
Zepf, K., Experimentelle Einführung in die Grundlehren der Chemie. Lehrbuch f. d. Hand von Lehramtskandidaten. Karlsruhe 1910, Braun. geb. M 5.—.
Zimmer, C., Anleitung zur Beobachtung der Vogelwelt. Leipzig 1910, Quelle & Meyer. M 1.—, geb. M 1.25.
Zimmermann, L., Mathematische Formelsammlung. Mit 5 Textfig. Essen 1910, Baedeker. M 1.50.
Anschütz, Beschreibung des Kreiselkompasses. Kiel, Anschütz & Co.
Auerbach, F., und Rothe, R., Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. 2. Teil. Leipzig 1911, B. G. Teubner. geb. M 7.—.
Behrendsen-Götting, Lehrbuch der Mathematik f. höhere Mädchenbildungsanstalten. Leipzig 1911, B. G. Teubner. geb. M 3.—.
Brandstetter, Dr. J. L., Die Dezimalbruchperioden. Luzern 1908, J. Schills Erben.
Brocke, E., Ueber die Benutzung der Beziehungen zwischen Mengen und Zahlen. Zabern 1909, Xaver Gilliot.
Brücher, Obl. K., Anschauung i. d. Arithmetik. Bamberg 1911, C. C. Buchner. M 1.60.
Budde, Prof. G., Der Kampf um die Vorherrschaft der Antike im Unterricht der höheren Knabenschulen. Inaug.-Diss. Jena 1910.
Carlebach, Dr. J., Lewi ben Gerson als Mathematiker. Berlin 1910, Louis Lamm. M 5.—.
Circolo Matematico di Palermo. Annuario Biografico. Palermo 1910.
Claßen, Prof. Dr., Das Entropiegesetz. Naturw. Zeitfragen, Heft 8. Godesberg 1910, Keplerbund.
Cohn, Emil, Physikalisches über Raum und Zeit. Leipzig 1911, B. G. Teubner. geh. M 0.60.
Cramer, Prof. H., Der mathematische Unterricht im Großherzogtum Baden. Leipzig 1910, B. G. Teubner. M 1.60.
Dahms, An der See. Naturw. Schülerbibliothek. Leipzig 1911, B. G. Teubner.
Deutscher Ausschuß f. d. mathem. u. naturw. Unterricht. Mathem. u. Naturw. a. d. höh. Mädchenschulen. Wie erhalten wir die erforderlichen Lehrkräfte? Leipzig 1909. B. G. Teubner.
L'Enseignement Mathématique, Revue Internationale dirigée par C. A. Laisant et H. Fehr avec la collaboration de A. Buhl. XIIme Année, No. 3—6; XIIIme Année, Nr. 1—2. Paris 1910/11, Gauthier-Villars; Genève, Georg & Comp.
Färber, Prof. Dr. C., Arithmetik. Bd. I der Grundlehren der Mathematik von E. Netto und C. Färber. Leipzig 1911, B. G. Teubner. M 9.—.
Fehr, H., Compte rendu des Séances et des Conférences faites à Bruxelles du 10 au 16 août 1910. Genève 1910. M 0.60.
Frenzel, Prof. C., Fundamente für eine Einleitung in die Differential- u. Integralrechnung. Leipzig 1910, B. G. Teubner.
Gärtner-Neuzeit, Zentralorgan f. d. Fortschritt im Gartenbau. Herausgeg. v. Andreas Voß. 4. Jahrg. Heft 2 und 3. Berlin-Schöneberg 1911.
Geck, Prof. Dr. E., Der mathematische Unterricht im Königreich Württemberg. Leipzig 1911, B. G. Teubner. M 2.60.
Ghiber, O., Der moderne Utraquismus. Inaug.-Diss. Jena 1910.
Ghidionescu, V., Moderne pädagog. Strömungen in Frankreich. Inaug.-Diss. Jena 1910.
Grimsehl, Dir. Prof. E., Lehrbuch der Physik für Realschulen. Leipzig 1911, B. G. Teubner. geb. M 2.40.
Grünbaum, Dr. H., Der mathematische Unterricht a. den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie. Ebenda. M 2.60.
Gruner, Prof. Dr., Probleme der modernen Physik. Naturw. Zeitfragen. Heft 9. Godesberg 1910, Keplerbund.
Gutzmer, Prof. Dr. A., Bericht über die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses f. d. mathem. u. naturw. Unterricht i. J. 1908. Leipzig 1909, B. G. Teubner; i. J. 1909. Leipzig 1910, F. C. W. Vogel. M 0.40.
Herz, Dr. R., Lehrbuch der Chemie nebst den Elementen der Krystallographie und Geologie f. d. Unterricht in den Oberklassen der realen höh. Lehranstalten. Leipzig 1911, G. Freytag. M 3.—.
Hoch, Prof. J., 1000 eingekleidete Gleichungen insbesondere für technische Fachschulen und Baugewerkschulen. Essen 1910, G. D. Baedeker. M 2.—.
Ihering, Geh. Reg.-R. A. v., Die Mechanik d. festen Körper. Aus Natur und Geisteswelt. Leipzig 1910, B. G. Teubner. M 1.25.
Internationale Mathematische Unterrichtskommission (IMUK), F. Klein, G. Greenhill, H. Fehr, Bericht IV. Ebenda.
Internationale Hygieneausstellung Dresden 1911.
Jenkner, Prof. Dr. H., Rätsel aus Erd- und Himmelskunde. 2. Aufl. Berlin 1910, L. Oehmigke. geb. M 4.—.
Kambly-Thaer, Mathematisches Unterrichtswerk. 1. Arithmetik, 39. Aufl.; II. Planimetrie, 151. Aufl.; III. Trigonometrie, 32. Aufl.; IV. Stereometrie, 32. Aufl. Ausg. A: für Gymnasien. Pr. geb. je M 2.—. Ausg. B: für Oberrealschulen und Realgymnasien. Pr. je M 2.50; IV M 3.—. Ausg. C: für Realschulen. I M 1.—; II mit Elementen der Trigonometrie und Stereometrie M 2.75. Breslau 1908—1911, Ferdinand Hirt & Sohn.
Keferstein, Dir. Prof. Dr. J., Große Physiker (Dr. Bastian Schmids Naturwissenschaftliche Schülerbibliothek. Bd. 4). Leipzig 1911, B. G. Teubner.
Kny, L., Die Schutzmittel der Pflanzen. Godesberg 1910, Keplerbund.
Kottmeyer, H., und Uhlmann, F., Das Holz. Wissenschaft und Bildung. Heft 72. Leipzig 1910, Quelle & Meyer.
Kraepelin, Prof. Dr. K., Leitfaden f. d. biologischen Unterricht. Leipzig 1907, B. G. Teubner.
Lesser, Prof. O., Mathem. Unterrichtswerk. III, 1. Die Kegelschnitte in synthetischer Behandlung und die analytische Geometrie. Leipzig 1910, G. Freytag. M 3.—.
Leubuscher, Geh.-R. Dr. G., Ueber Notwendigkeit der Ausbildung der Lehrer in Gesundheitspflege. Schriften des DAMNU 7. Leipzig 1911, B. G. Teubner. M 0.50.
Lietzmann, Dr. W., Stoff und Methode im mathem. Unterricht der norddeutschen höh. Schulen. Abh. d. IMUK I, 1. Ebenda. M 2.—.
—„— Bericht über die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses f. d. mathem. u. naturwiss. Unterricht (DAMNU) i. J. 1910. Leipzig 1911, F. C. W. Vogel. M 0.50.