Jahrgang XVIII. 1912. No. 1.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe** und **Friedrich Pietzker**,
von diesem geleitet bis 1909, zurzeit herausgegeben von
Prof. Dr. **A. Thaer**,
Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentore in Hamburg.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Dir. Thaer, Hamburg 36, erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (5 Mk. Jahresbeitrag) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 8 Nummern ist 4 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Inhalt:

Vereins-Angelegenheiten.

Die XXI. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des mathem. und naturwissenschaftl. Unterrichts
findet vom **27. bis 30. Mai** in **Halle a. S.** statt.

Der unter dem Vorsitz des Herrn Geh. Regierungsrats Prof. Dr. Wangerin gebildete Ortsausschuß setzt sich aus folgenden Gruppen zusammen:

I. Hauptausschuß.

Vorsitzender: Herr Geheimrat Prof. Dr. Wangerin. Stellvertreter: Herr Oberralschuldirektor Dr. Schotten. Schriftführer: Herr Oberlehrer Wildgrube. Mitglieder: Herr Stadtschulrat Brendel, Herr Oberlehrer Dr. Bungers, Herr Geh. Regierungsrat Prof. Dr. Dorn, Herr Prof. Dr. Gutzmer, Herr Prof. Dr. Haecker, Herr Oberlehrer Jahn, Herr Prof. Dr. Karsten, Herr Prof. Dr. Löwenhardt, Herr Prof. Dr. Oels, Herr Oberlehrer Dr. Rabes, Herr Prof. Rühlmann, Herr Prof. Dr. Scupin, Herr Prof. Dr. Schlüter, Herr Prof. Dr. Schrader, Herr Prof. Stade, Herr Prof. Dr. Vorländer, Herr Prof. Dr. Wagner, Herr Prof. Dr. Walther, Herr Oberlehrer Walckling.

II. Presseausschuß.

Herr Prof. Dr. Wagner, Obmann, Herr Oberlehrer Dr. Bungers, Herr Oberlehrer Walckling.

III. Besichtigungs- und Ausstellungsausschuß.

Herr Prof. Rühlmann, Obmann, Herr Prof. Dr. Wagner, Herr Prof. Dr. Scupin, Herr Prof. Dr. Schenck, Herr Prof. Dr. E. Erdmann, Herr Dr. Staudinger, Direktor des zoologischen Gartens.

IV. Fest- und Ausflugsausschuß.

Herr Direktor Dr. Schotten, Obmann, Herr Prof. Dr. Schrader, Herr Oberlehrer Dr. Rabes, Herr Juwelier Tittel, Vorsitzender des Fremdenverkehrsvereins.

V. Damenausschuß.

Herr Direktor Dr. Schotten, Obmann, Frau Geheimrat Wangerin, Frau Direktor Schotten, Frau Prof. Karsten, Frau Prof. Schrader, Frau Prof. Löwenhardt, Frau Prof. Vorländer.

Für die Tagung sind folgende Vorträge angemeldet bezw. in Aussicht gestellt:

Dr. Bungers. Thema vorbehalten.
Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Dorn, Ueber Radioaktivität.
Dir. Prof. Grimsehl-Hamburg, Physikalischer Experimentalvortrag.
Prof. Dr. Karsten, Vortrag gelegentlich der Besichtigung des botanischen Gartens.
Prof. Dr. Krüger, Psychologisches Thema.
Dr. W. Lietzmann-Barmen, Ueber einheitliche Bezeichnungsweisen in der Elementarmathematik.
Prof. Dr. Löwenhardt, Der chemische Unterricht in den Oberklassen. (Korreferent: Dr. Doermer-Hamburg.)
Dir. Dr. Möhle-Hagen, Ueber den mathematischen Unterricht an höheren Mädchenschulen.
Prof. Dr. Oels. Thema vorbehalten.
Prof. Dr. K. Schmidt, Ueber die elektrischen Wellen der drahtlosen Telegraphie.
Dr. Schoenichen-Berlin, Biomechanische Modelle (mit Lichtbildern).
Dir. Dr. Schotten, Die Tätigkeit der IMUK.
Prof. Dr. Schrader, Synthetische und analytische Behandlung der Kegelschnitte.
Prof. Dr. Scupin, Anleitung zu geologischen Beobachtungen im Freien.
Prof. Dr. Spies-Posen, Physikalischer Experimentalvortrag.
Prof. Dr. Walther, Die algonkischen Urwüsten (mit Lichtbildern).
Prof. Dr. Vorländer, Chemischer Experimentalvortrag.

Mit der gleichzeitig in Halle tagenden Versammlung deutscher Zoologen ist eine gemeinsame Sitzung beider Vereine in Aussicht genommen.

Außer einer Reihe von Besichtigungen und Exkursionen während der Tagung ist im Anschluß an sie ein Fortbildungskursus in Aussicht genommen. Die näheren Angaben über diesen werden im nächsten Heft nebst der vorläufigen Tagesordnung mitgeteilt werden.

Der Herr Minister der geistlichen und Unterrichts-Angelegenheiten hat auf die Eingabe des Vereins unter dem 30. Dezember 1911 erwidert, daß der Donnerstag der Pfingstwoche im Jahre 1912 in allen Provinzen, mit Ausnahme von Ost- und Westpreußen, wo eine andere Anordnung gewünscht wurde, in die Ferien der höheren Lehranstalten fällt. Die Königlichen Provinzialschulkollegien haben eine wohlwollende Prüfung und tunlichste Berücksichtigung von Urlaubsgesuchen, insbesondere zur Teilnahme an dem Fortbildungskursus, zugesagt.

Die Herren Vereinsmitglieder werden um recht zahlreichen Besuch mit ihren Damen gebeten.

Anmeldungen von weiteren Vorträgen werden von den Unterzeichneten gern entgegengenommen. Es muß allerdings darauf hingewiesen werden, daß die Zeit der Tagung schon stark in Anspruch genommen ist.

Geh. Reg.-Rat Prof Dr. Wangerin
Vorsitzender des Ortsausschusses.

Dr. A. Thaer
d. z. Vorsitzender des Vereins.

Ueber die Verwendung von mikrophotographischen Lichtbildern beim zoologischen und anatomischen Unterricht.

Vortrag auf der XX. Hauptversammlung in Münster i. W.
Von Univ.-Prof. Dr. W. Stempell (Münster i. Westf.)

Wenn es sich beim naturwissenschaftlichen Unterricht darum handelt, mikroskopisch kleine Objekte anschaulich zu machen, so stehen dafür bekanntlich im allgemeinen drei Wege offen: Die Vorführung mittels fertiger Tafeln, diejenige durch ad hoc an die Wandtafel entworfene Skizzen und endlich die Vorführung der Objekte selbst mittels aufgestellter Mikroskope. Die beiden ersteren Anschauungsmittel treten vornehmlich dann in ihr Recht, wenn es darauf ankommt, durch schematische Darstellungen das erste Verständnis der behandelten Gegenstände anzubahnen und das theoretisch Wesentliche klar hervorzuheben, sie bedürfen aber, wenn der Unterricht nicht in Schematismus und Doktrinismus erstarren soll, als notwendiger Ergänzung der Vorführung der Objekte selbst, denn nur diese allein vermögen den Beschauern lebendige Vorstellungen des Lehrstoffes zu vermitteln. Leider ist nun diese letztere Demonstrationsmethode mit mannigfachen Schwierigkeiten und Nachteilen verknüpft, wenn sie einen theoretischen Vortrag begleiten und erläutern soll. Will man in diesem Fall das für Lehrer und Schüler gleich störende und lästige Herumreichen sogenannter Demonstrationsmikroskope vermeiden, so muß die Vorführung der Präparate naturgemäß von dem Vortrag vollkommen getrennt werden und bietet somit keine Garantie dafür, daß die ausgestellten Präparate von den Beschauern — selbst bei aufmerksamster Betrachtung — richtig verstanden und in ihrer Beziehung zu dem Vortrag voll erfaßt werden. Man kann zwar durch beigelegte Zeichnungen die Präparate dem Verständnis näher zu bringen suchen; immer aber bleibt dann doch der Mangel einer direkten Beziehung zu dem Vortrag bestehen, und außerdem verläßt man bei Anwendung solcher Zeichnungen auch schon den Boden einer streng objektiven Demonstration, da derartige Skizzen meist stark schematisiert sein müssen, und bei ihrer Verwendung immerhin die Gefahr nahe liegt, daß die Beschauer vornehmlich die Skizze, nicht aber das Präparat einer eingehenden Betrachtung unterziehen. Dazu kommt, daß häufig ein großer Teil der Zuhörer mit dem Gebrauche des Mikroskops nicht genügend vertraut ist, um eine gute Anschauung der ausgestellten Objekte zu gewinnen. Durch unzweckmäßiges Herumdrehen an den Mikrometerschrauben, Anstoßen an die Mikroskope usw. verschwinden überdies die Präparate ganz aus dem Gesichtsfeld, und die später an ein solches Mikroskop Herantretenden bekommen dann gar nichts zu sehen. Endlich ist man in der Ausdehnung der Demonstration natürlich durch die Zahl der zur Verfügung stehenden Präparate und Mikroskope beschränkt. Selbst wenn in diesem Punkte keine große Rücksicht auf die aufzuwendenden Kosten genommen zu werden braucht, so lassen sich doch — wenigstens hinsichtlich der Präparate — viele dringende Wünsche einfach deswegen nicht erfüllen, weil manche Präparate nur sehr schwer oder gar nicht zu erlangen sind. Und wie häufig werden gerade wertvolle, kaum zu ersetzende Präparate bei solchen öffentlichen Demonstrationen durch die Ungeschicklichkeit der Beschauer zerstört!

Alle diese Nachteile fallen mit einem Schlage fort, wenn man die Demonstration mikroskopischer Objekte durch Projektion mikrophotographischer Lichtbilder bewerkstelligt. Zwar ließen sich auch die Präparate selbst projizieren, doch ist die Möglichkeit einer solchen Mikroprojektion schon bei Anwendung mittlerer Vergrößerungen an das Vorhandensein einer sehr starken Lichtquelle (Bogenlicht) geknüpft, erfordert einen ziemlich komplizierten Apparat mit umständlicher Handhabung, und endlich gehen dabei viele Präparate, deren Färbung die intensive Lichtwirkung nicht verträgt, unfehlbar zugrunde. Viel günstiger gestaltet sich die Benutzung mikrophotographischer Lichtbilder. Mittels eines einfachen, wenig kostspieligen Projektionsapparates*), dessen Handhabung jedermann leicht erlernen kann, vermag man eine beliebig große Anzahl von mikroskopischen Objekten jeder Vergrößerung einem beliebig großen Zuhörerkreis vorzuführen und gleich während des Vortrages zu erklären. Daß die Farben mancher Präparate dabei verloren gehen, bedeutet deswegen eher einen Vorteil als einen Nachteil, weil lebhafte Farben in mikroskopischen Präparaten ja nur selten natürliche Farben lebender Objekte sind, sondern meistens auf einer künstlichen, mehr oder minder willkürlichen Tinktion der als „Dauerpräparate“ aufgestellten Objekte beruhen und bei nicht geschulten Beschauern leicht falsche Vorstellungen erwecken können. Sollte in einzelnen Fällen die Vorführung farbiger Dauerpräparate oder lebenden Materials erwünscht sein, so würde hierfür die Aufstellung einiger wenigen Mikroskope genügen — wie ja überhaupt eine Kombination der Lichtbilder-Projektion mit der mikroskopischen Demonstration in vielen Fällen den Wert beider Methoden nur steigern kann. Uebrigens lassen sich mittels des Lumièreschen Verfahrens auch sehr gute Diapositive in den Farben des Originals herstellen**).

Endlich gibt es sogar ein Gebiet, auf welchem die subjektive Beobachtung der Präparate äußerst schwierig, die objektive Mikroprojektion derselben überhaupt nicht möglich ist; es ist dies derjenige Teil der mikroskopischen Forschung, wo die durch die Arbeiten A. Köhlers***) erschlossene Benutzung der kurzwelligen ultravioletten Strahlen in ihr Recht tritt. Hier, wo es sich entweder um Auflösung feinster, in gewöhnlichem Licht nicht mehr unterscheidbaren Einzelheiten bei stärkster Vergrößerung oder um die verschiedene Durchlässigkeit verschiedener

*) Ich benutzte früher lange Jahre bei meinen Vorlesungen ein kleines sog. Skioptikon aus Stahlblech mit dreifachem Acetylenbrenner, das sich trotz seines relativ niedrigen Preises (ca. 160 M inkl. Acetylenapparat) für alle Zwecke als vollkommen ausreichend erwiesen hat. Bei einer einfachen Handhabung kann ein derartiges Instrument ganz gut von dem Vortragenden allein, ohne Beihilfe eines Assistenten, bedient werden.

**) Vergl. darüber meine Mitteilungen in den Sitz.-Ber. der Medizin. naturwissensch. Ges. Münster i. W. 1907, sowie in meiner Arbeit über Nosema Bombycis in Arch. f. Protistenkunde Bd. 16, 1909.

***) Vergl. besonders: Zeitschr. f. wissenschaftl. Mikroskopie. Bd. 21, 1904. S. 129—165, 273—304, sowie meine Angaben darüber in der Zeitschr. f. physikalische Chemie Bd. 62. 2, 1909 und im Archiv f. Protistenkunde Bd. 16, 1909.

Elemente für ultraviolettes Licht handelt, leistet die photographische Platte sehr viel mehr als die subjektive Beobachtung des ultravioletten Bildes auf einer fluoreszierenden Platte. Eine Mikroprojektion dieses überaus lichtschwachen Bildes ist ganz unmöglich. Hier bedeutet die Mikrophotographie gewissermaßen die Spitze der mikroskopischen Forschung, da die photographische Aufnahme das Objekt ersetzt.

Man hat gegen die Verwendung der Lichtbilder beim Unterricht sehr häufig eingewendet, daß die dabei nötige Verdunkelung des Vortragsraumes einerseits den Unterricht störe und die gleichzeitige Anwendung schematischer Tafeln und Zeichnungen unmöglich mache, anderseits auch die Zuhörer hindere, Notizen über das Gehörte niederzuschreiben. Abgesehen davon, daß bei Benutzung einer nur einigermaßen kräftigen Projektions-Lichtquelle eine absolute Verfinsterung des Vortragsraumes keineswegs nötig ist, läßt sich die angedeutete Unzuträglichkeit leicht dadurch vermeiden, daß man die mikrophotographischen Projektionen in mehreren Abschnitten nach Absolvierung einzelner Vortragskapitel oder — was noch besser ist — überhaupt erst am Schluß der Vortragsstunde oder endlich in besonderen Projektionsstunden vornimmt. Die letzteren Methoden haben sogar den Vorteil, daß dabei eine kurze Rekapitulation des in der Stunde behandelten Stoffes vorgenommen wird, welche für die Zuhörer nur von Nutzen sein kann und infolge des Wechsels der Demonstrationsmethode auch niemals ermüdend wirkt. Die Anwendbarkeit mikrophotographischer Lichtbilder ist übrigens keineswegs auf rein theoretische Vorlesungen beschränkt; dieselben können vielmehr mit großem Vorteil auch für gewisse praktische Uebungen herangezogen werden. In erster Linie wird bei solchen natürlich nach wie vor die mikroskopische Untersuchung der Objekte durch die Praktikanten wichtig und nötig sein, da die Uebungen ja nicht nur die Kenntnis der Objekte, sondern auch die Fertigkeit im Gebrauche des Mikroskops vermitteln sollen; aber es ließen sich doch Fälle denken, wo außerdem eine mikrophotographische Projektion kursmäßig behandelter Objekte von großem Nutzen wäre. Man könnte z. B. eine Art zoologischen Seminars in der Weise abhalten, daß man vor den Teilnehmern zunächst eine größere Serie von Lichtbildern projiziert und erläutert und darauf jedem von ihnen irgend eins der vorgeführten Objekte mit der Aufforderung übergibt, dasselbe mikroskopisch zu untersuchen, zu zeichnen und zu erklären. Da die Zuhörer sich während der Projektion im dunklen Raum keine Notizen machen können, und keiner von ihnen weiß, welches der vorgeführten Objekte er in natura erhalten wird, so sind sie genötigt, den Erläuterungen des Vortragenden besonders aufmerksam zu folgen und dieselben eine gewisse Zeitlang im Gedächtnis zu behalten — ein Zwang, dessen pädagogischen Wert niemand verkennen wird.

Schließlich mag nicht unerwähnt bleiben, daß sich mikrophotographische Lichtbilder auch recht vorteilhaft zur Herstellung von schematischen Tafeln verwenden lassen. Man projiziert zu diesem Zweck das Bild in der gewünschten Vergrößerung auf die Zeichenfläche, zieht die wichtigsten Konturen nach und führt die Zeichnung sodann schematisch aus. Auf diese Weise kann man mit verhältnismäßig geringer Mühe und in kurzer Zeit Tafeln herstellen, welche sich bei allem Schematismus doch von der Wirklichkeit nicht allzu weit entfernen. —

Wenn die so mannigfache Vorteile bietende Verwendung mikrophotographischer Lichtbilder beim naturwissenschaftlichen Unterrichtsbetrieb der Schulen und Universitäten bisher in größerem Maßstabe wohl nur wenig zur Anwendung gekommen ist, so liegt dies eigentlich nur daran, daß es an einer genügend großen und vollständigen Sammlung brauchbarer, mikrophotographischer Lichtbilder gefehlt hat.

Um diesem Mangel abzuhelfen, habe ich es unternommen, die wichtigsten mikroskopischen Unterrichtsobjekte der Zoologie und Anatomie zu mikrophotographieren, und die so gewonnene, bereits 1532 Nummern umfassende Sammlung in Form von Diapositiven herausgegeben*). Dabei war es mein Bestreben, außer dem landläufigen, zoologischen und histologischen Unterrichtsmaterial auch solche allgemein bedeutsamen Objekte und Vorgänge photographisch zu fixieren, die entweder schwer zu erlangen oder nur unter besonderen Bedingungen — etwa nur im lebenden Objekt — zu beobachten sind. Die technischen Erfahrungen und teilweise neuen Methoden, welche bei der Bewältigung eines so umfangreichen und mannigfaltigen Materials gewonnen wurden, hoffe ich, gelegentlich in einem Lehrbuch der Mikrophotographie eingehend zu besprechen; hier sei nur bemerkt, daß es nach meiner Erfahrung in dem Gesamtgebiet der mikroskopischen Zoologie und Anatomie nur verschwindend wenige Objekte gibt, deren einwandsfreie mikrophotographische Reproduktion auf unüberwindliche Schwierigkeiten stößt. Wenn früher angesichts der unleugbaren Minderwertigkeit, welche leider so viele bisher publizierte Mikrophotogramme aufweisen, die Ansicht verbreitet war, daß die Mikrophotographie nur in ganz seltenen Fällen eine klare Wiedergabe der Objekte ermögliche, so kann dieser Standpunkt wohl heute als überwunden bezeichnet werden; vielmehr dürften wir jetzt zu der For-

*) Erschienen bei Ed. Liesegang, Düsseldorf.

derung berechtigt sein, ein gutes, mit allen modernen Hilfsmitteln hergestelltes Mikrophotogramm müsse mindestens dasselbe, wenn nicht mehr, als die subjektive Beobachtung zeigen. Gute Präparate sind natürlich Voraussetzung*).

Eine Retusche der Objektbilder selbst habe ich im Interesse der Objektivität gänzlich unterlassen. Nur hier und da wurden störende, außerhalb des eigentlichen Objekts gelegene Verunreinigungen, in einigen Fällen die ganzen Hintergründe abgedeckt. Die Vergrößerungen welche sich zwischen 1 und 3600 bewegen, wurden stets so bemessen, daß der Beschauer selbst aus größerer Entfernung noch alle Details des Objektes am Projektionsschirm wahrnehmen kann.

Wenn es gelungen ist, in verhältnismäßig kurzer Zeit die Sammlung so weit zum Abschluß zu bringen, daß sie selbst für den Unterrichtsbetrieb der Universitäten im großen und ganzen genügen dürfte, so verdanke ich dies nicht zum wenigsten der tatkräftigen Hilfe zahlreicher Fachgenossen, welche mir aus den verschiedensten Gebieten der Zoologie und Anatomie Musterpräparate zur Verfügung stellten und mich dadurch in den Stand setzten, eine größere Vielseitigkeit der Sammlung zu erreichen, als es mir mit meiner eignen Privatsammlung allein möglich gewesen wäre. Größere Serien von Präparaten liehen besonders die Herren Direktor Bolle-Görz, Geh. Medizinalrat Prof. Dr. Bonnet-Greifswald, Prof. Dr. Deecke-Freiburg i. B., Geh. Medizinalrat Prof. Dr. Löffler-Greifswald, Prof. Dr. G. W. Müller-Greifswald, Prof. Dr. Peter-Greifswald, Prof. Dr. Sobotta-Würzburg und Privatdozent Dr. A. Thienemann-Münster i. W. Allen diesen, sowie den zahlreichen andern Herren, welche hier und da in freundlichster Weise einzelne Präparate zur Verfügung stellten, möchte ich auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen. Gleichzeitig bitte ich die Fachgenossen, mich auch in Zukunft bei der Ausfüllung der noch zahlreich vorhandenen und sich durch den Fortschritt der Wissenschaft stetig vermehrenden Lücken durch leihweise Ueberlassung guter Präparate freundlichst unterstützen zu wollen. So könnte manches schöne Präparat, das bisher lediglich seinem glücklichen Besitzer nutzte, in Zukunft vielen zugute kommen!

Im Anschluß an den Vortrag demonstrierte der Vortragende dann eine größere Reihe mikrophotographischer Lichtbilder aus den verschiedensten Gebieten der Zoologie; darunter auch solche, welche mittels des Lumièreschen Verfahrens in den Farben der Präparate hergestellt waren, sowie solche, welche mittels ultravioletten Lichtes bei stärkster Vergrößerung gewonnen waren.

*) Eine kurze Darstellung der wichtigsten Präparationsmethoden findet man in meinem „Leitfaden für das mikroskopisch-zoologische Praktikum" (Gustav Fischer, Jena 1911.)

Form und Wachsverbrauch der Bienenzelle.

Von Prof. Dr. Heinrich Vogt (Breslau).

Quieta non movere ist ein für Politik und soziales Leben höchst beachtenswerter Grundsatz; für die Wissenschaft hat er keine Geltung. Gerade die wissenschaftlichen Lehren und Theorien, die seit Jahrzehnten oder Jahrhunderten unbestritten gelten und von Generation zu Generation als Selbstverständlichkeiten überliefert werden, bergen die Angriffspunkte, an denen erneute Prüfung ansetzen muß, um fruchtbare und weittragende Ergebnisse zu erzielen.

Vor 200 Jahren hat Réaumur „das hübsch erfundene Märchen", welches bis dahin für Bienenkunde galt, durch wirkliche Beobachtung des Lebens und Treibens dieser Tiere beiseite geschoben. Das freigemachte Feld ist bis auf unsere Tage von Naturforschern und Bienenzüchtern aufs eifrigste bearbeitet worden. Schritt für Schritt haben wir von Swammerdam bis Dzierzon und Darwin einen immer deutlicheren Einblick in die Lebensvorgänge der Honigbiene gewonnen.

Nur an einer Stelle hat seit 200 Jahren die Forschertätigkeit fast vollständig ausgesetzt: das ist Form und Wachsverbrauch der Bienenzelle. Diese beiden, eng miteinander verknüpften Fragen gelten für wissenschaftlich erledigt.

Wissenschaftliche, populäre und Schulschriftsteller lehren übereinstimmend: genau vor 200 Jahren hat als erster der Astronom Maraldi durch genaue Messungen festgestellt, daß die Bodenform der Bienenzelle eine von drei Rhomben gebildete dreiseitige Pyramide ist. Die drei Rhomben besitzen, wie die ganze Zellform, eine große Regelmäßigkeit; ihre stumpfen Winkel betragen $109^0\,28'$, die spitzen $70^0\,32'$, sie sind mit Flächenwinkeln von 120^0 aneinander gefügt; ihre Neigungswinkel gegen die Prismenflächen haben dieselbe Größe von 120^0, wie auch die auf den Prismenflächen ausgeschnittenen Trapezwinkel gleich den Rhombenwinkeln sind, so daß in der ganzen Bodenform nur Flächenwinkel von 120^0 und Kantenwinkel von $109^0\,28'$ und $70^0\,32'$ vorkommen.

Schon Pappus hatte bemerkt, daß die Form des sechsseitigen Prismas der Bienenzelle vor der drei- und vierseitigen den Vorzug der Wachsersparnis habe. Einige Jahre nach Maraldis Entdeckung hat auf Réaumurs Anregung der Mathematiker Samuel König durch höhere Analysis den Gedanken des griechischen Mathematikers erweitert: bei vorbestimmter sechsseitiger Prismenform und gegebenem Rauminhalt stellt die ganze Zelle der Honigbiene, also nicht nur die Prismenwände, sondern auch ihr Abschluß durch die Maraldische Pyramide das Minimum von Wachsverbrauch vor. Die Bienenzellenaufgabe ist zurzeit eiserner Bestand, ja Paradestück aller Minimumaufgaben; mag man sie durch Differenzieren, durch differenzialgeometrische Ueberlegung, durch die Schellbachsche Methode oder durch Nullsetzen der Diskriminante einer quadratischen Gleichung lösen.

Diese Lehren sind Gemeingut. Andere Autoren fügen, um die große, „bis auf Winkelsekunden“ gehende Genauigkeit des Bienenbaues zu illustrieren, gern hinzu, daß Thévenot, der Freund Swammerdams, die Dimensionen der Bienenzelle als Normalmaß vorschlagen konnte, und daß Réaumur von der etwa überlieferten Größenangabe einer Bienenzelle in antiker Maßeinheit und ihrem Vergleich mit der jetzigen Zellgröße, die er für unverändert hielt, die Rekonstruktion der antiken Maßeinheit erhoffen konnte.

Eine besondere Rolle spielt die Abweichung zwischen Königs und Maraldis Winkelangaben. König bestimmte den stumpfen Rhombenwinkel der Minimalform auf 109° 26′, während Maraldi 109° 28′ gefunden hatte. „Es blieb dahingestellt, ob dieser kleine Fehler vom Mathematiker König oder von Maraldi oder von den Bienen herrührt“. Andere halten diesen Streit für erledigt zugunsten Maraldis und der Bienen: der Mathematiker hat einen Fehler begangen; die Bienen aber arbeiten genau den von der richtigen Theorie geforderten Winkel von 109° 28′; das ist durch Maraldis ebenfalls fehlerlose Messungen sichergestellt.

An diesen Fehler knüpft sich noch eine weitere Ueberlieferung: König hat um 2′ geirrt, weil in seiner Logarithmentafel ein Fehler war. Dieser Fehler ist aufgedeckt worden eben dadurch, daß man auf die Abweichung der Königschen Theorie von dem richtigen durch die Bienen hergestellten Winkel aufmerksam wurde. So wurde es auch klar, warum ein Schiff, dessen Kapitän die Königsche Logarithmentafel gerade an der verhängnisvollen Stelle zur Ortsbestimmung benutzte, scheitern mußte. Die Bienen haben durch ihre exakte Arbeit nicht nur der Wissenschaft, sondern auch der Schiffahrt einen großen Dienst erwiesen, indem sie die Wiederholung eines ähnlichen Unfalles verhüteten.

Diese quieta habe ich aufgestört.*)

Ich habe gänzlich voraussetzungslos, mit den zuverlässigsten Meßwerkzeugen, nach den dem Objekt am besten angepaßten Methoden, auf sicherer geometrischer Grundlage durch beinahe 4000 Messungen die Konstanten der normalen Bienenzelle festgestellt und bin den Gründen der Entstehung und Beharrung der überlieferten Lehre historisch und psychologisch nachgegangen. Das Resultat ist: die überlieferte Maraldi-Königsche Lehre von Form und Wachsersparnis der Bienenzelle ist falsch, „ein hübsch erfundenes Märchen“. Jeder der oben angeführten, für Tatsachen geltenden Sätze ist ein Irrtum.

Nicht Maraldi ist zuerst auf die charakteristische Bodenform der Bienenzelle aufmerksam geworden, sondern fast 100 Jahre vor ihm Kepler, und 39 Jahre vor ihm Swammerdam. Swammerdam hat sich viel strenger als die Späteren in den Schranken der Beobachtung gehalten; Kepler hat mit genialer Intuition die Gesetze der stereometrischen Raumerfüllung auf die Bienenzellen angewendet. Er hatte erkannt, daß von allen Körpern mit einer Art Flächenwinkel nur der Würfel und das Rhombendodekaeder den Raum kontinuierlich erfüllen können, und da nun die beiden Seiten der Bienenwabe lückenlos mit dreiseitig rhombischen Ecken ineinandergreifen, so schloß er, offenbar ohne Messung und ohne Rechnung, daß diese Ecken die stumpfen Ecken des Rhombendodekaeders sein müssen, d. h. eben die 100 Jahre später von Maraldi angegebenen Ecken mit Kantenwinkeln von 109° 28′ und Flächenwinkeln von 120°.

Maraldi hat zwar gemessen; aber der von ihm durch Messung festgestellte Rhombenwinkel ist nach seiner eigenen Angabe nicht 109° 28′, sondern 110°. Von dieser runden Zahl aus ist er durch Spekulation und Rechnung auf seinen endgültigen Winkel von 109° 28′ gekommen, nämlich durch die lediglich auf das Bedürfnis nach Symmetrie und Einfachheit des Baues gestützte Annahme, daß die Ecken, in denen die Prismenflächen mit den Rhombenflächen zusammenstoßen, den Pyramidenecken nicht angenähert, wie die Messung ergeben hatte, sondern genau kongruent seien.

Es ist ja auch gänzlich ausgeschlossen, daß Maraldi Winkel kleiner Körper mit Minutengenauigkeit messen konnte. Das Instrument, welches eine derartige Genauigkeit wirklich erlaubt, das Spiegelgoniometer, ist erst 100 Jahre später von Wollaston erfunden worden. Selbst das Anlegegoniometer ist erst 1783 durch den Mineralogen Romé de l'Isle bekannt gemacht worden. Also Maraldi war auf das Anlegen eines geteilten Kreises ohne beweglichen Radius*), oder, was wahrscheinlicher ist, auf Abzirkeln der Kanten angewiesen. Die beiden Auflagen der Mineralogie von Romé de l'Isle, 1772

*) Geometrie und Oekonomie der Bienenzelle. 68 S. gr. 8°. 8 Tabellen, 5 Figurentafeln. Breslau 1911, Verlag von Trewendt & Granier.

*) Wir nennen dieses Instrument pseudofranzösisch „Transporteur“; im wirklichen Französischen heißt es le rapporteur.

und 1783, lassen erkennen, daß durch das Anlegegoniometer der mittlere Fehler der Winkelbestimmung von 5,3° auf 2° herabgedrückt worden ist. Da wir hiernach Maraldis Messungen eine Genauigkeit von etwa 5° zutrauen dürfen, können seine Minutenangaben nicht Messungsergebnisse sein.

Das letzte Wort in dieser Frage haben nicht gedruckte Ueberlieferungen, sondern wirkliche Kontrollmessungen zu sprechen. Sehr zahlreiche Messungen an unversehrten Wachszellen und besonders an Gipsabgüssen ergeben nun, daß zwar die Prismenwinkel mit großer Annäherung den Mittelwert von 120° haben (mittlere Abweichung in Arbeiterzellen ± 1,8°, in Drohnenzellen ± 1,6°)*), und daß auch die Prismendurchmesser der Gleichheit sehr nahe kommen. Immerhin sind die Schwankungen doch so beträchtlich, daß alle Ideen von einem auf die Bienenzelle zu gründenden Normalmaß ins Reich der Phantasie verwiesen werden müssen. Aber die Bodenpyramiden sind erheblich spitzer als die Pyramiden des Rhombendodekaeders. Ihre Neigungswinkel sind nicht 120°, sondern im Mittel 113,8° und 114,9° (± 3,3° und ± 3,5°). Darnach haben auch die Rhombenwinkel nicht den Maraldischen Wert, sondern sie betragen 106,7° und 107,3° (± 5,1° und ± 5,5°); Maraldis Messungen weichen von der Wirklichkeit um 4° und 3° ab. Noch nicht der sechste Teil der einzelnen Flächenwinkel, noch nicht der dritte Teil der einzelnen Kantenwinkel erreicht den Kepler-Maraldischen Wert. Unter 24 Bodenpyramiden habe ich nur eine gefunden, in welcher der Durchschnitt aller drei Winkel den Anforderungen der Theorie genügt, die man bisher für das Ergebnis genauer und umfassender Messung gehalten hat. —

Unanfechtbar ist, daß die Kepler-Maraldische Normalform unter den gegebenen Bedingungen das Minimum der Oberfläche darstellen würde. König hat diese Frage theoretisch richtig erledigt. Beim Aufsuchen des halben Rhombenwinkels, den er aus der mindestens siebenstelligen Logarithmentafel auf Minuten abrunden mußte, ist ihm das Menschliche begegnet, daß er ihn um 1′ zu klein genommen hat. Also auf ein persönliches Versehen, nicht auf einen Fehler der Logarithmentafel, ist die Abweichung des Königschen Winkelwerts vom Maraldischen zurückzuführen. Damit fallen alle Schlüsse, die man auf diesen Unterschied gebaut hat: die Analysis ist weder durch die exakt arbeitenden Bienen, noch durch den exakt messenden Maraldi korrigiert worden; die Bienen haben nicht die Logarithmen verbessert und haben auch kein Schiff gerettet.

*) Ich setze im Folgenden voran die Zahlenangabe für die Arbeiterzelle; darnach für die Drohnenzelle.

Aber einen bisher unbemerkten Fehlschluß hat König und haben alle seine Nachfolger begangen, indem sie aus dem Minimum der Oberfläche unbefangen das Minimum des Wachsverbrauchs folgerten. Diese Verknüpfung ist nur dann richtig, wenn alle Zellwände gleich dick mit Wachs belegt sind, und außerdem die Kanten nicht erhebliche Wachsverdickungen enthalten. Beide Voraussetzungen erweisen sich als unzutreffend: die Bodenplatten sind, was schon Darwin bemerkt hat, gesetzmäßig dicker als die Prismenwände, und zwar rund im Verhältnis 3:2; sämtliche Kanten, sowohl diejenigen, in welchen drei Ebenen zusammenstoßen, wie die äußeren Randkanten, enthalten solche Wachsversteifungen, daß durchschnittlich fast $^1/_3$ des Wachsverbrauchs der Arbeiterzelle, und mehr als $^1/_3$ des Wachsverbrauchs der Drohnenzelle auf die Kantenverdickungen entfällt.

Bis hierher ist zweierlei festgestellt: erstens bauen die Bienen nicht in der Kepler-Maraldischen Normalform; zweitens wäre diese Normalform wohl das Minimum der Oberfläche, aber nicht des Wachsverbrauchs.

Ich habe nunmehr, nach Bestimmung sämtlicher Konstanten der Bienenzelle, die Form berechnet, welche unter diesen wirklich herrschenden Bedingungen das Minimum des Wachsverbrauchs leisten würde. Es zeigt sich, daß diese ideelle Normalform keineswegs im Sinne der wirklich ausgeführten Zellform von der Kepler-Maraldischen Normalform abweicht, sondern erheblich stumpfer als diese ausfallen müßte. Die drei Formen: wirkliche Zellform, Kepler-Maraldische Form, theoretische Minimalform haben abgerundet die Neigungswinkel 114°, 120°, 143°; die Kantenwinkel 107°, 109°, 116°.

Also es zeigt sich drittens: die Bienen erbauen nicht Zellen minimalen Wachsverbrauchs.

Fragt man weiter, welche Wachsersparnis die Bienen erzielen könnten, wenn sie ihre Zellform durch die theoretische Minimalform ersetzten, so ergibt sich, daß sie durch die Wahl dieser günstigsten Zellform erst an 148 Arbeiterzellen und an 120 Drohnenzellen das Material zu einer weiteren Zelle ersparen würden. Diese Wachsersparnis ist absolut sehr gering; sie ist sehr unbedeutend im Vergleich mit den unregelmäßigen Wachsaufwendungen, welche in den sehr wechselnden Kantenverdickungen liegen, unbedeutend auch im Vergleich zu gewissen, ganz unwirtschaftlichen Wachsvergeudungen. Bauten die Bienen jedoch sechsseitige prismatische Zellen mit denselben Flächen- und Kantendicken wie ihre wirklichen Zellen, aber die Zellen der beiden Wabenseiten nicht wechselständig gegeneinander und nicht mit Pyramidenböden ineinandergreifend, sondern Zelle gegen Zelle auf ebener Mittelwand, Prismenfläche gegen Prismenfläche, Kante gegen Kante, so würden sie schon aus 32 oder 23 ihrer bisherigen Zellen das Material zu einer Zelle dieser neuen Art sparen.

Ich schließe hieraus: die Bienen bauen nicht nur nicht in der sparsamsten Form, sondern es kommt für die Bienenzelle die Wachsersparnis überhaupt nicht als formbestimmend in Betracht.

Die Quelle, aus welcher der Glaube an die Regelmäßigkeit der Zellform und den minimalen Wachsverbrauch geflossen ist, ist die Teleologie des achtzehnten Jahrhunderts. Nicht Messung, sondern Spekulation hat Maraldi geleitet, und auch König forderte die Sparsamkeit der Bienen als einen Ausfluß der Weisheit ihres Schöpfers. Auch in der Folgezeit, bis zum heutigen Tage hat die Maraldi-Königsche Lehre ihre Hauptstütze darin gehabt, daß man in der Bienenzelle einen deutlich erkennbaren Zweck durch verständliche Mittel verwirklicht zu sehen glaubte. Aus diesem weiten Gesichtspunkt hat man die Kleinarbeit des Messens und Rechnens gering geachtet. Alle biologischen Theorien: Mechanismus, Vitalismus, Entwicklungslehre wußten sich mit dieser Theorie abzufinden, ja sie als Stütze zu benutzen. So hat dieser Irrtum 200 Jahre lang geradezu dogmatische Geltung gehabt; wie ein Relikt der Scholastik ragt er in die moderne Biologie hinein, die stolze, selbstgewisse zur Bescheidenheit und Vorsicht mahnend. Ist doch selbst der nüchterne Darwin zum Metaphysiker geworden, indem er den Bau der Honigbiene „für absolut vollkommen in Arbeits- und Wachsersparnis“ erklärte.

Zum Ruhme des geringsten Wachsverbrauchs hat die Teleologie noch den der größten Festigkeit gefügt. Die Gründe, welche man für besondere, oder gar maximale Festigkeit der Bienenwabe angeführt hat, beweisen bei weitem nicht, was sie beweisen sollen. Auch in dieser Beziehung scheint die Wabe mit gegenständigen Zellen auf ebener Mittelwand hinter der Wabe mit Pyramidenboden mindestens nicht zurückzustehen.

Ich habe mich prinzipiell ausschließlich auf Ausmessung der Bienenzelle und Verwertung dieser Messungsresultate beschränkt, ohne direkte biologische Beobachtung. Doch fällt aus den fertigen Arbeitserzeugnissen manches Licht auf die Fähigkeiten und die Arbeitsweise der Erbauer. Weder rein mechanische Kräfte, noch unbewußt reflektorische Wirkung, noch die Intelligenz der Bienen, noch Zwecke der Wachsersparnis oder der Festigkeit vermögen die Form der Bienenzelle verständlich zu machen. Die Ausmessung der Honigbienenzellen und ihr Vergleich mit niederen Stufen der Hymenopterenbauten führen mich zu folgendem Erklärungsversuch: Die Honigbienen sind, indem sie den an der einseitigen Wabe entwicklungsgeschichtlich erworbenen Instinkt, Ebenen nur unter 120° aneinanderzufügen, auf das Novum, die doppelseitige Wabe, übertrugen, durch rein geometrischen Zwang zur Tendenz des rhombendodekaedrischen Zellbodens gelangt. Daß diese Zellform stets nur annähernd erreicht wird, ist aus der Natur der Sinnes- und Arbeitsorgane der Bienen, also psychophysisch zu erklären. Die Abweichungen der wirklich hergestellten Strecken und Winkel von ihren Mittelwerten und den erstrebten Werten sind nicht regellos, sondern lassen Gesetzmäßigkeiten, Unterschiedsschwellen, Unterschieds-Empfindlichkeiten und psychophysische Konstanten im Sinne des Weberschen Gesetzes erkennen.

Es scheint sich hier ein neues Forschungsgebiet: die Psychophysik einer Tierklasse, zu eröffnen. Denn hier können, was nur sehr selten sich ereignen dürfte, die Ausmessungen der wirklichen, durch psychophysische Tätigkeit hergestellten Arbeitsprodukte mit einem geometrisch definierten Typus, dem der Naturtrieb zustrebt, verglichen werden.

Auszug des Referates

„Die Bekämpfung der Rebschädlinge und die Biologie“,

gehalten am 27. September auf der Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte in Karlsruhe.

Von Privatdozent Dr. F. Schwangart.
Leiter der Zool. Abteilung an der Kgl. Lehr- und Versuchsanstalt in Neustadt a. d. Haardt.

Der Referent gibt zunächst einen geschichtlichen Ueberblick und weist einleitend auf die Bedeutung hin, welche die Biologie als theoretische Wissenschaft in unserem Geistesleben gewonnen hat. Ein gewisser Gegensatz zu dem langsameren Vordringen der Biologie, wo sie sich in den Dienst der Praxis stellt, sei nicht zu verkennen. Nach einer Zeitspanne eifriger Versuchstätigkeit in der Ausbildung biologischer Bekämpfungsmethoden erfolgte ein Nachlassen auf der ganzen Linie, ungerechtfertigter Weise nach Ansicht des Vortragenden, weil doch die Ergebnisse sehr wohl zu Hoffnungen berechtigten. In neuerer Zeit sind dann die Untersuchungen und ist auch die Versuchstätigkeit auf dem Gebiete wieder aufgenommen worden. Im Weinbau haben die Ergebnisse des Referenten mit dem Verfahren des „Anhäufelns“ der Erde an den Rebstöcken zur Bekämpfung des gefürchteten „Traubenwicklers“ (Clythris ambiguella Hübn. und Polychrosis botrana Schiff.) Anlaß zu erfolgreicher Anwendung dieses Verfahrens im Großen gegeben. Das Verfahren wirkt, indem die Winterpuppen des Schädlings, die unter der abgestoßenen Rinde des Rebstockes sitzen, unter Auftreten charakteristischer Pilzformen (Isarien) zugrunde gehen. Diese Pilze gelten seit den grundlegenden Untersuchungen De Barys als pathogen für Insekten, und wenn auch im vorstehenden Falle der direkte Nachweis aller Entwicklungsstadien im Insekt durch besondere Verhältnisse erschwert wird, so sprechen doch alle bei den Versuchen gewonnenen Erfahrungen dafür, daß die Wirkung auch hier auf die Tätigkeit der Pilze zurückzuführen ist, daß also eine „biologische“ Bekämpfungsmethode vorliegt. Zur Entfaltung der vollen, vernichtenden Wirksamkeit ist die Monate andauernde Bedeckung mit Erde notwendig. — Anschließend an diese Erfahrungen mit pathogenen Pilzen schildert der Referent seine Versuche mit Krankheitserregern der Seidenraupe. Auch zur Verwertung von Schlupfwespen der Rebschädlinge sind Vorarbeiten im Gange. Bei vergleichender Erforschung und Zucht von Schlupfwespen aus verschiedenen Gebieten — südlichen, wo sie stark verbreitet und als Bekämpfungsfaktor wertvoll sind, und unseren heimischen, wo sie trotz der starken Vermehrung des Schädlings bisher versagt haben — hat sich herausgestellt, daß die wirtschaftlich wichtigsten Formen unter ihnen nicht durch künstliche Einschleppung in die Kulturen, sondern mit Hilfe bestimmt gerichteter Maßnahmen beim Anbau, durch Anpflanzung bestimmter Zwischenkulturen in den Weinbergen, in erwünschtem Maße vermehrt werden könnten. — Neben direkten Bekämpfungsversuchen auf eigener Grundlage fällt der Biologie eine wichtige kritische Aufgabe zu: Die Beurteilung der Aussicht von Bekämpfungsvorschlägen auf anderweitiger — physikalischer und chemischer — Basis. Der Referent bringt hierfür Beispiele aus seiner Praxis bei; er behandelt eingehender die sogenannte „Frühsommerbekämpfung“ des Trauben- und des Laubwurmwicklers (Oenophthira pilleriana Schiff.) mit Chemikalien und die Frage schädlicher Nebenwirkungen der chemischen Behandlung auf die Vegetation, die durch Obstbaumsterben in Nordamerika, der Heimat der modernen chemischen Bekämpfung, und in Frankreich als „Arsenfrage“ im Weinbau aktuell geworden ist. —

Besonderes Interesse für die Leser dieser Zeitschrift haben die Ausführungen des Referenten über die erzieherische Aufgabe der Biologie der Landwirtschaft treibenden Bevölkerung gegenüber. Er erörterte die Ursachen des Mißtrauens weiter Kreise gegen die Forschung, der Auffassung, als stünde sie als „Theorie“ der überlegenen Erfahrung des Landwirtes, als des „Praktikers“ in der Schädlingsbekämpfung, gegenüber. Beim Versuch, dieses Vorurteil durch Belehrung zu überwinden, wird nach Ansicht des Referenten nicht immer der richtige Weg eingeschlagen. Insbesondere nehmen oft Betrachtungen teleologischer Art im Lehrgang bezw. den Lehrbüchern einen zu breiten Raum ein gegenüber der notwendigen Schulung der Beobachtungs- und Unterscheidungsgabe, durch die allein jene Verkennung, jenes Mißtrauen gegen die Wissenschaft beseitigt werden könnte. Derartige Spekulationen haben für den praktischen Landwirt keinen Wert. Seine Vorbildung kann ihn nicht befähigen, zu erkennen welche Eigenschaften einem Lebewesen wirklichen Vorteil bringen, nämlich seinen Feinden aus der Tierwelt gegenüber. Er wird in der Regel diesen Feinden, ohne sich weiter eine Vorstellung von ihrer Natur zu machen, menschliche Sinne und Fähigkeiten zuschreiben, seine vermeintlichen Feststellungen über die Zweckmäßigkeit irgend welcher Eigenschaften werden somit meistens irrig sein. Vom Standpunkte der Schädlingsbekämpfung aber hat diese weit verbreitete Art der Naturbetrachtung direkte Schäden im Gefolge: Der irrige Standpunkt, der allem menschliche Eigenschaften unterlegt, kommt bei der Beurteilung von Bekämpfungsversuchen und bei eigener Versuchsanstellung zur Geltung. Der Referent gibt Beispiele hierfür. Die Neigung und Gabe zur Beobachtung des Tierlebens bleibt leicht hinter der eines gänzlich ungeschulten Beobachters zurück. Es setzt sich die Idee fest, als sei alles in der Natur ideal eingerichtet und eine Verbesserung unmöglich; der Neigung zum Fatalismus bei der Landbevölkerung wird dadurch Vorschub geleistet. Dem biologischen Unterricht als unentbehrlichen Bundesgenossen bei der Schädlingsbekämpfung sind nach Ansicht des Referenten diese Hauptaufgaben gestellt:

Schulung der Beobachtungsgabe; Anregung zu exaktem Beobachten an einfachen Beispielen, den wirtschaftlich wichtigsten Rebenschädlingen im speziellen Falle, und ihren wichtigsten Feinden. Hierzu Demonstrationen im Freien.

Bildung des Begriffes von der Mannigfaltigkeit der Formen in der Natur, insbesondere von der verschiedenen Lebensweise und verschiedenen wirtschaftlichen Bedeutung bei großer äußerer Aehnlichkeit. Es ist der Ueberzeugung Bahn zu brechen, daß auf dem Gebiete Fachkenntnis nötig ist, so gut wie auf allen anderen im geistigen und wirtschaftlichen Leben. Die Biologie ist hier „Praxis“.

Unablässiger Hinweis darauf, daß in der Schädlingsbekämpfung fatalistisches Zuwarten vom Uebel ist und daß vor der zerstörenden und schaffenden Natur der Mensch kein Vorrecht vor anderen Lebewesen genießt.

Hinweis auf den Unterschied im praktischen Wert zwischen verbürgten Tatsachen und Deutungen.

Zur Weckung des Interesses ohne Rücksicht auf Nutzen und Schaden empfiehlt der Referent Betrachtungen ästhetischer Art verbunden mit Tierzeichnen und eine liebevolle Schilderung interessanter biologischer Vorgänge aus der heimatlichen Natur. Es ist gewiß berechtigt, wenn Beziehungen zwischen Bau und Lebensweise im Unterricht berücksichtigt werden, doch sollten nur wissenschaftlich verbürgte Tatsachen dabei Erwähnung finden.

Funktionaler Zusammenhang der Lehrsätze des Menelaos und des Ceva.

Von Prof. Dr. Ernst Schultz (Stettin).

Die beiden Lehrsätze des Menelaos und des Ceva stehen in einem engen funktionalen Zusammenhang, so daß der Satz des Ceva aus dem des Menelaos abgeleitet werden kann. Es zeigt sich auch der Zusammenhang dieser Sätze mit den Sätzen über das vollständige Vierseit.

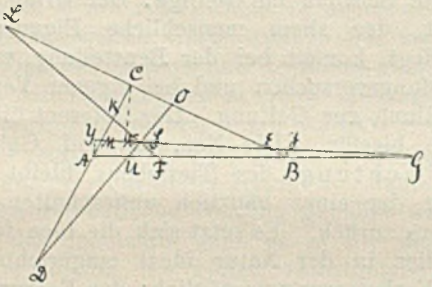


Fig. 1.

Die Seiten des Dreiecks ABC werden von den drei Geraden LF, OD, MG geschnitten, welche sich in dem Punkte S schneiden.

In bezug auf das $\triangle\, UOB$ müssen nach dem Satze des Menelaos die Gleichungen bestehen

a) für die Gerade LF:

$$OL \cdot US \cdot BF = UF \cdot OS \cdot BL,$$

b) für die Gerade MG:

$$US \cdot OE \cdot BG = OS \cdot BE \cdot UG.$$

Durch Division beider Gleichungen ergibt sich nach kleiner Umformung:

$$1)\quad \frac{OL}{OE} \cdot \frac{UG}{UF} = \frac{BL}{BF} \cdot \frac{BG}{BE}.$$

Es ist nun

$$OL = LC + CO;\ BL = LC + CB;\ UF = AF - AU;$$
$$UG = BU + BG;\ OE = OB - EB.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung 1) ein, so ergibt sich

$$2)\quad \frac{LC+CO}{OB-EB} \cdot \frac{BU+BG}{AF-AU} = \frac{LC+BC}{BF} \cdot \frac{BG}{BE}.$$

Der Quotient der Strecken $\frac{BG}{BE}$ läßt sich durch die Strecken CM und AM ausdrücken. Fällt man nämlich von A, B und C auf die Gerade MG die Senkrechten AY, BZ, CX, so bestehen die Proportionen:

$$CE : EB = CX : BZ,\quad BG : AG = BZ : AY$$

und

$$CM : AM = CX : AY.$$

Aus den beiden ersten Proportionen ergibt sich

$$\frac{CE}{AG} \cdot \frac{BG}{BE} = \frac{CX}{AY}.$$

Durch Anwendung der dritten Proportion erhält man nach einer kleinen Umformung aus der letzten Gleichung

$$3)\quad \frac{BG}{BE} = \frac{CM}{AM} \cdot \frac{AG}{CE}.$$

Wird dieser Ausdruck für $\frac{BG}{BE}$ in 2) eingesetzt, so erhält man

$$4)\quad \frac{LC+CO}{OB-EB} \cdot \frac{BU+BG}{AF-AU} = \frac{LC+BC}{BF} \cdot \frac{CM}{AM} \cdot \frac{AG}{CE}.$$

Jetzt lassen wir die drei Geraden LF, DO und MG um S sich so drehen, daß die Schnittpunkte auf den betreffenden Seiten entlang gleiten, bis die Geraden in die Ecktransversalen übergehen. Die Punkte O, F, M mögen dann in O', F', M' übergehen, und die Gleichung 4) geht dann über in die Gleichung:

$$\frac{CO'}{BO'} \cdot \frac{BA}{AF'} = \frac{BC}{BF'} \cdot \frac{CM'}{AM'} \cdot \frac{AB}{BC}.$$

Nach bekannter Umformung ergibt sich dann

$$\frac{CO'}{BO'} = \frac{AF'}{BF'} \cdot \frac{CM'}{AM'}.$$

und schafft man die Nenner fort, so ergibt sich

$$CO' \cdot BF' \cdot AM' = CM' \cdot AF' \cdot BO'.$$

Dies ist der Satz des Ceva in bezug auf das Dreieck ABC, in welchem die Ecktransversalen AO', BM', CF' sich in dem Punkte S schneiden.

Wir sehen also, wie der Satz des Ceva eine funktionale Folge des Satzes des Menelaos ist.

Ich will jetzt einige Folgerungen aus beiden Sätzen ableiten und schließlich ihren Zusammenhang mit dem vollständigen Vierseit zeigen.

Der Schnittpunkt K der beiden Geraden LF und DO liege auf der Seite AC (Fig. 2). Dann ist nach dem Satze des Menelaos für die Gerade LF:

$$AF \cdot BL \cdot CK = AK \cdot BF \cdot CL,$$

für die Gerade DO ist

$$AD \cdot BO \cdot CK = AK \cdot BD \cdot CO.$$

Durch die Division beider Gleichungen ergibt sich nach leichter Umformung

$$\frac{BD}{BF} \cdot \frac{AD}{AF} = \frac{BO}{BL} \cdot \frac{CO}{CL}.$$

Liegt der Schnittpunkt der Geraden LF und DO auf der Verlängerung von AC, so besteht dieselbe Gleichung, wenn man beachtet, daß die Reihenfolge der Geraden für die Schnittpunkte auf beiden Seiten die gleiche ist.

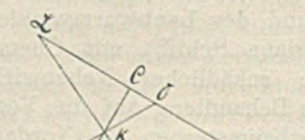


Fig. 2.

Der analoge Satz für die Ecktransversalen ergibt sich aus dem Satze des Ceva, wenn die beiden Tripel von Ecktransversalen eine gemeinsame Ecktransversale haben.

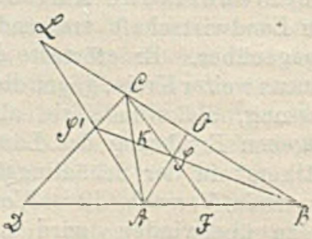


Fig. 3.

Sind AO, CF, BK und AL, CD, BK die beiden Tripel der Ecktransversalen, so bestehen nach dem Satze des Ceva folgende Gleichungen für das Tripel S:

$$AF \cdot BO \cdot CK = AK \cdot BF \cdot CO,$$

für das Tripel S':

$$AD \cdot BL \cdot CK = AK \cdot BD \cdot CL.$$

Durch Division beider Gleichungen und nach einfacher Umformung ergibt sich

$$\frac{BD}{BF} : \frac{AD}{AF} = \frac{BL}{BO} : \frac{CL}{CO}.$$

Dieselbe Gleichung besteht auch, wenn der Schnittpunkt der Ecktransversalen außerhalb des Dreiecks liegt.

Aus dem Satze des Menelaos folgt also der Lehrsatz:

Liegt der Schnittpunkt zweier Geraden auf einer Dreiecksseite, so ist das Doppelverhältnis der Abschnitte der Schnittpunkte, von den Endpunkten der einen Seite gerechnet, gleich dem Doppelverhältnis der Abschnitte der Schnittpunkte, von den Endpunkten auf der anderen Seite gerechnet, wenn die Reihenfolge der Schnittpunkte auf beiden Seiten der Reihenfolge der Geraden gleich ist.

Aus dem Satze des Ceva folgt der Lehrsatz:

Liegen die Schnittpunkte je zweier Ecktransversalen auf einer dritten Ecktransversalen, so ist das Doppelverhältnis der Abschnitte der Schnittpunkte, von den Endpunkten der einen Seite gerechnet, gleich dem Doppelverhältnis der Abschnitte auf der anderen Seite, von den Endpunkten der Seite gerechnet, wenn die Reihenfolge der Schnittpunkte auf der einen Seite gleich der Reihenfolge der Schnittpunkte auf der anderen Seite ist.

Ich will jetzt zu den Fällen übergehen, in denen die Doppelverhältnisse den Wert 1 haben.

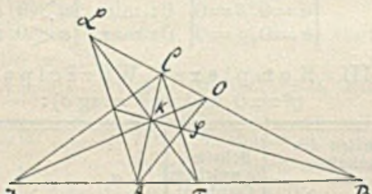


Fig. 4.

Ist der Schnittpunkt der Geraden LF und DO ein Punkt der Geraden AC, so ist die Frage naheliegend, unter welchen Bedingungen wird der Schnittpunkt der Geraden LF und DO auf derjenigen Ecktransversalen liegen, welche durch den Schnittpunkt der Ecktransversalen AO und CF geht.

In Fig. 4 muß nach dem Lehrsatz des Menelaos sein:

$$\frac{BD}{BF} : \frac{AD}{AF} = \frac{BO}{BL} : \frac{CO}{CL}.$$

Nach dem Satze des Ceva ist

$$\frac{BD}{BF} : \frac{AD}{AF} = \frac{BL}{BO} : \frac{CL}{CO}.$$

Mithin muß sein

$$\frac{BL}{BO} \cdot \frac{CO}{CL} = \frac{BO}{BL} \cdot \frac{CL}{CO}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich $BL \cdot CO = BO \cdot CL$.

Diese Gleichung wird befriedigt für

a) $$BL = 0,\ BO = 0.$$

In diesem Falle liegt K in A, die Punkte D und F müssen in A zusammenfallen, da LF, AO und DO in AB übergehen. Für diesen Fall ist das Verhältnis

$$\lim_{\substack{AD = 0 \\ AF = 0}} \frac{BD}{BF} : \frac{AD}{AF} = 1.$$

Es entsprechen also D, A, F, B einem harmonischen Wurf.

b) $$CO = 0,\ CL = 0.$$

In diesem Falle liegt der Schnittpunkt K in C. Da der Schnittpunkt K auf der Ecktransversale BS liegen soll, so muß S in C und die Ecktransversalen müssen in die Seiten AC, BC übergehen. Dementsprechend fallen wiederum die Punkte D und F in A zusammen.

c) $$BL = \infty,\ CL = \infty.$$

In diesem Falle muß $CO = BO$ sein, da $\lim_{\substack{CL = \infty \\ BL = \infty}} \frac{CL}{BL} = 1.$

Es ist also $LF \,//\, CB$ und Punkt 0 die Mitte von CB. L, C, 0, B bilden also in diesem Falle einen harmonischen Wurf. Da nun auch das Doppelverhältnis $\frac{BD}{BF} : \frac{AD}{AF} = 1$, so sind D, A, F, B ebenfalls harmonische Punkte.

Wir werden hier also auf harmonische Punkte geführt. Eine ganze Reihe von Lehrsätzen läßt sich aus diesem Ergebnis ableiten.

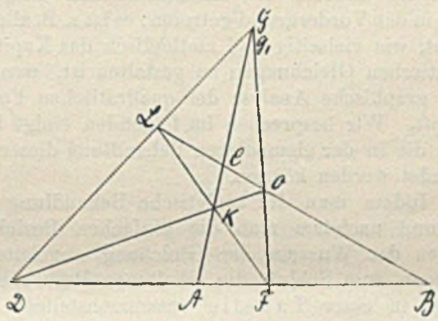


Fig. 5.

Sind in Fig. 5 L, C, 0, B und D, A, F, B zwei harmonische Würfe, schneidet DL die Seite AC in G, so ist zu beweisen, daß OF auch durch G geht. Nennt man den Schnittpunkt von FO mit AC G_1, so bestehen nach dem Lehrsatz des Menelaos die beiden Gleichungen:

$$AD \cdot BL \cdot CG = AG \cdot CL \cdot BD$$
$$AF \cdot BO \cdot CG_1 = AG_1 \cdot CO \cdot BF.$$

Durch Division beider Gleichungen und unter Berücksichtigung, daß D, A, F, B und L, C, O, B zwei harmonische Würfe sind, ergibt sich

$$\frac{CG}{CG_1} = \frac{AG}{AG_1}, \text{ hieraus erhält man } \frac{AC}{CG} = \frac{AC}{CG_1}.$$

Mithin muß $CG = CG_1$ sein, d. h. OF geht durch G.

Die Verbindungslinien der entsprechenden harmonischen Punkte auf zwei Dreiecksseiten schneiden sich in einem Punkte der dritten Dreiecksseite, und die Verbindungslinien je zweier nicht entsprechenden Punkte schneiden sich ebenfalls in einem Punkte der dritten Dreiecksseite. Dies führt auf den Lehrsatz über die Diagonalen eines vollständigen Vierseits. In diesem Falle ist $G\,D\,F\,L\,O\,K$ das vollständige Vierseit, dessen Diagonalen DF, LO, AC sich gegenseitig harmonisch teilen.

Ebenso läßt sich beweisen, daß, wenn auf zwei Seiten eines Dreiecks je zwei Punkte so liegen, daß die Verbindungslinien je zweier Punkte sich in einem Punkte der dritten Seite schneiden, so müssen die Punkte auf jeder Seite mit den Endpunkten derselben je einen harmonischen Wurf bilden.

Für die Geraden DL und FO, die sich in G schneiden, besteht nach dem Satze der Menelaos

$$\frac{BD}{BF} : \frac{AD}{AF} = \frac{BL}{BO} : \frac{CL}{CO}.$$

Nach demselben Satze muß für die Geraden DO und LF, die sich in K schneiden, sein:

$$\frac{BD}{BF} : \frac{A'D}{AF} = \frac{BO}{BL} : \frac{CO}{CL}$$

Aus den beiden erhaltenen Gleichungen ergibt sich nach einfacher Umformung $BL \cdot CO = BO \cdot CL$ oder $\frac{BL}{BO} = \frac{CL}{CO}$, d. h. die Punkte L, C, O, B bilden einen harmonischen Wurf. Demnach müssen auch die Punkte $DAFB$ einen harmonischen Wurf bilden.

Dies ist jedoch der Lehrsatz über die Diagonalen eines vollständigen Vierseits.

Bemerkungen über die Behandlung der quadratischen Gleichung im elementaren algebraischen Unterricht.

Von Prof. Dr. Karl Goldziher (Budapest).

In den neueren Lehrbüchern der elementaren Algebra ist die Einführung des Funktionsbegriffs, der wichtigste Gesichtspunkt der heutigen Reformbestrebungen im Gebiete des mathematischen Unterrichts bereits in den Vordergrund getreten; es ist z. B. allgemein bekannt, wie vielseitig und methodisch das Kapitel der quadratischen Gleichungen zu gestalten ist, wenn man an die graphische Analyse der quadratischen Funktion anknüpft. Wir besprechen im folgenden einige Einzelheiten, die in der elementaren Behandlung dieser Dinge verwendet werden können.

1. Indem man die analytische Behandlung voranstellt und nachdem man die einfachen Beziehungen zwischen den Wurzeln der Gleichung abgeleitet hat, kann man zum Schluß die erhaltenen Resultate systematisch in einer Tabelle zusammenstellen. Jeder Fall muß natürlich gesondert algebraisch behandelt und graphisch dargestellt werden.

Bezeichnet man die Koordinaten des Scheitels der Parabel:

$$y = a x^2 + b x + c$$

mit: α, β, wobei *)

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}{4},$$

so ist die Bedingung, daß bei der entsprechenden quadratischen Gleichung: 1. zwei verschiedene reelle Wurzeln vorhanden sind: $\beta \neq 0$ und $\mathrm{sg}\,\beta = -\mathrm{sg}\,a$ **), 2. eine reelle Doppelwurzel vorhanden ist: $\beta = 0$, 3. ein konjugiert komplexes Wurzelpaar vorhanden ist: $\beta \neq 0$ und $\mathrm{sg}\,\beta = \mathrm{sg}\,a$.

Die einzelnen Sonderfälle ***) können nun nach diesen Bedingungen näher charakterisiert und mit den Vorzeichen der Koeffizienten in Bezug gebracht werden. Zum Beispiel wenn:

$\mathrm{sg}\,x_1 = +1 = -\mathrm{sg}\,x_2$, $|x_1| > |x_2|$ und $\beta < 0$, so ist:

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$$

$$a > 0, \text{ da } \beta < 0$$

$$b < 0, \text{ da } a > 0 \text{ und } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$$

$$c < 0, \text{ da } a > 0 \text{ und } x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0.$$

Indem man die anderen Fälle ebenso behandelt, kann man schließlich die folgenden Tabellen konstruieren:

I. Reelle verschiedene Wurzeln ($\beta \neq 0$ und $\mathrm{sg}\,\beta = -\mathrm{sg}\,a$):

	Koordinaten des Scheitels		Scheitel, in welchem Quadranten	a	b	c
	α	β				
I. $\mathrm{sg}\,x_1 = +1 = -\mathrm{sg}\,x_2$						
1) $\lvert x_1 \rvert > \lvert x_2 \rvert$	$\alpha > 0$	$\beta < 0$	IV.	$a > 0$	$b < 0$	$c < 0$
	$\alpha > 0$	$\beta > 0$	I.	$a < 0$	$b > 0$	$c > 0$
2) $\lvert x_1 \rvert < \lvert x_2 \rvert$	$\alpha < 0$	$\beta < 0$	III.	$a > 0$	$b > 0$	$c < 0$
	$\alpha < 0$	$\beta > 0$	II.	$a < 0$	$b < 0$	$c > 0$
3) $\lvert x_1 \rvert = \lvert x_2 \rvert$	$\alpha = 0$	$\beta < 0$	$-Y$	$a > 0$	$b = 0$	$c < 0$
	$\alpha = 0$	$\beta > 0$	$+Y$	$a < 0$	$b = 0$	$c > 0$
II. $\mathrm{sg}\,x_1 = \mathrm{sg}\,x_2$ (aber $x_1 \neq x_2$)						
1) $\mathrm{sg} = +1$	$\alpha > 0$	$\beta < 0$	IV.	$a > 0$	$b < 0$	$c > 0$
	$\alpha > 0$	$\beta > 0$	I.	$a < 0$	$b > 0$	$c < 0$
2) $\mathrm{sg} = -1$	$\alpha < 0$	$\beta < 0$	III.	$a > 0$	$b > 0$	$c > 0$
	$\alpha < 0$	$\beta > 0$	II.	$a < 0$	$b < 0$	$c < 0$

II. Reelle Doppelwurzel ($\beta = 0$):

	Koordinaten des Scheitels		Lage des Scheitels	a	b	c
	α	β				
$\mathrm{sg}\,x_1 = \mathrm{sg}\,x_2$ und $x_1 = x_2$	$\alpha > 0$	$\beta = 0$	I: $+X$	$a > 0$	$b < 0$	$c < 0$
	$\alpha > 0$	$\beta = 0$	IV: $+X$	$a < 0$	$b > 0$	$c > 0$
	$\alpha < 0$	$\beta = 0$	II: $-X$	$a > 0$	$b > 0$	$c < 0$
	$\alpha < 0$	$\beta = 0$	III: $-X$	$a < 0$	$b < 0$	$c > 0$
	$\alpha = 0$	$\beta = 0$	0: min.	$a > 0$	$b = 0$	$c < 0$
	$\alpha = 0$	$\beta = 0$	0: max.	$a < 0$	$b = 0$	$c > 0$

III. Komplexes Wurzelpaar ($\beta \neq 0$ und $\mathrm{sg}\,\beta = \mathrm{sg}\,a$):

Koordinaten des Scheitels		Scheitel, in welchem Quadrant.	a	b	c
α	β				
$\alpha > 0$	$\beta < 0$	IV.	$a < 0$	$b > 0$	$c < 0$
$\alpha > 0$	$\beta > 0$	I.	$a > 0$	$b < 0$	$c > 0$
$\alpha < 0$	$\beta < 0$	III.	$a < 0$	$b < 0$	$c < 0$
$\alpha < 0$	$\beta > 0$	II.	$a > 0$	$b > 0$	$c > 0$
$\alpha = 0$	$\beta < 0$	$-Y$	$a < 0$	$b = 0$	$c < 0$
$\alpha = 0$	$\beta > 0$	$+Y$	$a > 0$	$b = 0$	$c > 0$

Diese Tabellen können auch dazu verwertet werden, daß man sich bei gegebener Gleichung über die Lage der entsprechenden Parabel und über die charakteristischen Merkmale der Wurzeln orientieren kann; auch umgekehrt kann man bei gegebener Parabel über die Vorzeichen der Koeffizienten in der entsprechenden Gleichung Schlüsse ziehen.

Löst man die folgende Aufgabe: man bestimme zu gegebenen reellen x_1, x_2 und β die Koeffizienten a, b, c der quadratischen Gleichung, so können die Fälle der ersten Tabelle (und auch die irregulären Vorkommnisse) auf Grund der Resultate:

$$a = \frac{-4\beta}{(x_1 - x_2)^2}, \quad b = \frac{4(x_1 + x_2)\beta}{(x_1 - x_2)^2}, \quad c = \frac{-4 x_1 x_2 \beta}{(x_1 - x_2)^2}$$

schneller berechnet werden.

2. In den Lehrbüchern liest man gewöhnlich, daß nur die reellen Wurzeln auf Grund der graphischen Darstellung berechnet werden können. Wir wollen

*) x_1 und x_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung. Die Werte für α, β werden am einfachsten aus den Translationen der Parabel $y = ax^2$ abgeleitet (siehe Behrendsen-Götting § 68); die graphische Betrachtung der typischen Fälle ergibt dann auch die drei Bedingungen der Diskussion.

**) sg: Vorzeichen von.

***) Diese ergeben sich zuerst auf Grund der graphischen Analyse der verschiedenen möglichen Lagen der Parabel.

kurz darauf hinweisen, daß neuerdings A. Schultze in seiner „Graphic Algebra" (Newyork. The Macmillan Comp. 1909: § 44, § 59, § 74) sehr anschauliche Methoden zur graphischen Berechnung der reellen Bestandteile der komplexen Wurzeln von Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades angegeben hat. (S. weiterhin den Aufsatz von Blakslee in School Science and Mathematics XI. 1911.)

3. Ist für eine gegebene reelle Zahl m:

$$f(m) \equiv a\, m^2 + b\, m + c \neq 0,$$

so entsteht die Frage, in welcher Beziehung dieser Wert m im Falle von reellen Wurzeln zu diesen steht. In dem Borelschen Buche (2[d] cycle. § 108) werden die Resultate algebraisch abgeleitet, es sei darauf hingewiesen, daß ganz einfache graphische Betrachtungen viel schneller und anschaulicher zum Ziele führen.

4. Wir empfehlen endlich zur Diskussion der quadratischen Gleichung neben der Diskriminante die folgende symmetrische Funktion der Wurzeln:

$$d = \frac{b^2}{4\,a\,c} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{4\,x_1\,x_2},$$

da dieselbe die Vorkommnisse mehr differenziert, als die gewöhnlich gebrauchte Diskriminante*). Ist nämlich:

$d < 0$: so haben die beiden reellen Wurzeln verschiedene absolute Werte und verschiedene Vorzeichen.

$d = 0$: so haben die beiden reellen Wurzeln gleiche absolute Werte und verschiedene Vorzeichen.

$0 < d < 1$: so ist ein konjugiert komplexes Wurzelpaar vorhanden.

$d = 1$: so ist eine Doppelwurzel vorhanden.

$d > 1$: so haben die beiden reellen Wurzeln verschiedene absolute Werte und gleiche Vorzeichen.

$d = \infty$, aber b endlich und $\neq 0$: so sind die folgenden Fälle möglich:

α) $c = 0$, $a \neq 0$: eine Wurzel $= 0$, die andere Wurzel $\neq 0$.

β) $a = 0$, $c \neq 0$: eine Wurzel $= \infty$, die andere Wurzel endlich und $\neq 0$.

γ) $a = 0$, $c = 0$: die Wurzel $= 0$.

Die Kegelschnitte in ihrem analytischen Zusammenhang mit dem geraden Kreiskegel.

Von Dipl.-Ing. Carl Herbst (Bochum).

In Jahrgang 1909 (Nr. 3) gab ich eine analytische Behandlung der Kegelschnitte, die ich im folgenden durch eine wesentlich einfachere ersetzen möchte; ich füge noch einige Betrachtungen hinzu, welche vielleicht von einigem Interesse sind, soviel das Gebiet auch schon bearbeitet ist.

Nach Figur 1 ist:

$$z = n \cdot \operatorname{tg} \alpha - x \cdot \sin \varphi$$
$$\varrho = \operatorname{tg} \alpha\, (n + x \cdot \cos \varphi).$$

Daher: $y^2 = \varrho^2 - z^2 = 2\, n\, x \operatorname{tg} \alpha\, (\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi + \sin \varphi) + x^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$

$$= 2\, n\, x \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin(\alpha + \varphi) + \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} (\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi)$$

$$y^2 = 2\, s \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot x + \frac{\sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \varphi)}{\cos^2 \alpha} \cdot x^2$$

(Allgemeine Scheitelgleichung.)

Setzt man zur Abkürzung überall

$$s \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin(\alpha + \varphi) = p,$$

so wird für die Parabel ($\varphi = \alpha$) $y^2 = 2\, p\, x$, wo

$$p = s \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin 2\, \alpha = 2\, s \cdot \sin^2 \alpha.$$

Will man also an dem gegebenen Kegel eine Parabel von gewünschtem p erreichen, so muß sein $s = \frac{p}{2 \sin^2 \alpha}$.

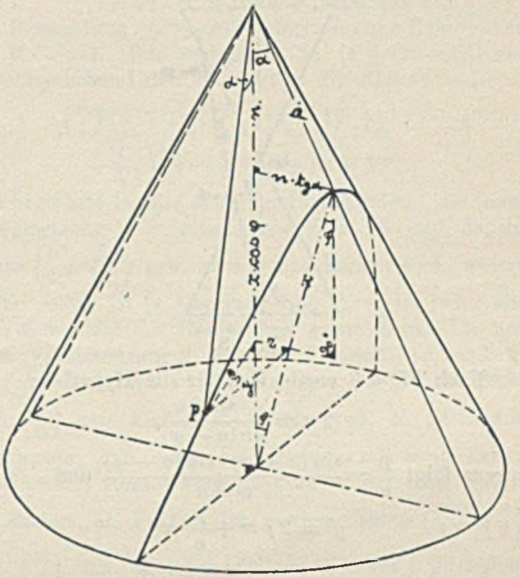


Fig. 1.

Figuren 2 und 3 geben die Achsenschnitte für die Ellipse ($\varphi > \alpha$) und die Hyperbel ($\varphi < \alpha$).

Nach Figur 2 ist:

$$2\, a = \frac{s \cdot \sin 2\, \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)} = \frac{p}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin(\alpha + \varphi)} \cdot \frac{\sin 2\, \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)} = \frac{2\, p \cdot \cos^2 \alpha}{\sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\varphi - \alpha)}$$

$$\frac{p}{a} = \frac{\sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\varphi - \alpha)}{\cos^2 \alpha}.$$

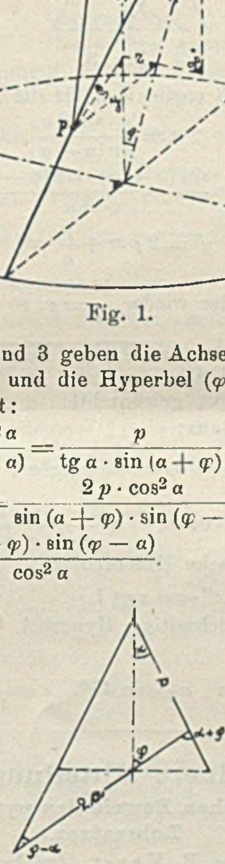


Fig. 2.

Demnach für die Ellipse: $y^2 = 2\, p\, x - \frac{p}{a} \cdot x^2$.

$$x = a \text{ liefert } y^2 = b^2 = a\, p, \text{ mithin } \frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a},$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\varphi - \alpha)}.$$

Will man also am Kegel eine durch a und b bestimmte Ellipse erhalten, so hat man

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha - \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} =$$
$$= \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \varphi\, (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 - \frac{b^2}{a^2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \cos^2 \alpha = e'^2 \cdot \cos^2 \alpha$$

$\cos \varphi = e' \cdot \cos \alpha$ ($e' < 1$; numerische Exzentrizität).

---

*) Erwähnt bei W. P. Elderton: Frequency-curves and correlation (London, Layton. 1906) S. 42.

Für s findet man:

$$s = \frac{p}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin(\alpha + \varphi)} = \frac{b^2}{a \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin(\alpha + \varphi)}.$$

So sind die Unbekannten φ und s bestimmt.

Fig. 3.

Nach Figur 3 ergibt sich für die Hyperbel:

$$2a = \frac{s \cdot \sin 2\alpha}{\sin(\alpha - \varphi)},$$

woraus folgt $\frac{p}{a} = \frac{\sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \varphi)}{\cos^2 \alpha}$ und

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} \cdot x^2.$$

Setzt man hier wieder $\frac{b^2}{a} = p$, so wird

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\cos\alpha} \sqrt{\sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \varphi)}.$$

Eine Hyperbel mit gewünschtem a und b erhält man daher am Kegel aus:

$$\frac{b^2}{a^2} = \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi\,(\operatorname{tg}^2\alpha + 1) - 1 = \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\alpha} - 1$$

$$\cos\varphi = e'' \cdot \cos\alpha, \quad s = \frac{b^2}{a \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin(\alpha + \varphi)}$$

($e'' > 1$; numerische Exzentrizität.)

Bedingung: $e'' \cdot \cos\alpha \leqq 1$.

Für die gleichseitige Hyperbel ($a = b$, $e'' = \sqrt{2}$) muß sein

$$\cos\varphi = \sqrt{2} \cdot \cos\alpha \qquad \alpha_{\min} = 45^0. \quad s = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin(\alpha + \varphi)}.$$

Kleinere Mitteilungen.

Zum euklidischen Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes.

Von B. Kerst (Zwickau).

I. Der Satz: „Die Summe der über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks gezeichneten gleichseitigen Dreiecke ist gleich dem gleichseitigen Dreieck über der Hypotenuse“ läßt sich auf derselben Stufe wie der pythagoreische Lehrsatz, also ohne Benutzung der Aehnlichkeitslehre, in folgender, dem euklidischen Beweis entsprechenden Art beweisen.

Zieht man von den Ecken des rechtwinkligen Dreiecks ABC die Linien AD, BE und CF (daß diese sich in einem Punkte schneiden, soll unten gezeigt werden, vorläufig wird davon kein Gebrauch gemacht), so ist

$$ABE + ABD + BEC + ADC = ACE + BCD + 2 \cdot ABC.$$

Fällt man die Höhe DK, so ist, da $DK // AC$,

$$ADC = AKC = \frac{1}{2} ABC$$

Ebenso ist $\quad BEC \cong ADC = \frac{1}{2} ABC$

Also folgt aus der ersten Gleichung

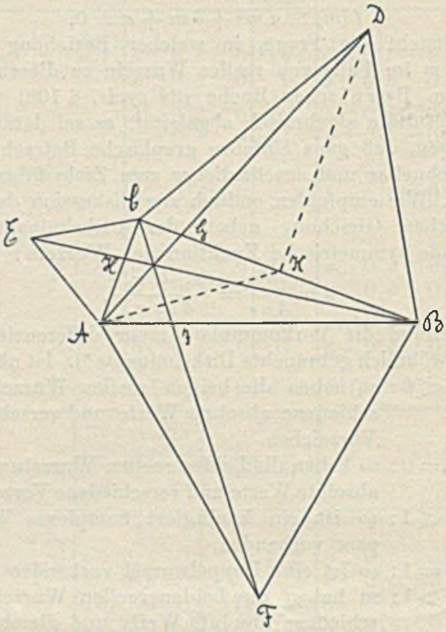
$$ABE + ABD = ACE + BCD + ABC.$$

Da nun $ABE \cong ACF$ und $ABD \cong BCF$, so folgt

$$ACF + BCF - ABC = ACE + BCD,$$

das heißt aber

$$ABF = ACE + BCD.$$



II. Auf einer höheren Stufe, und zwar als Anwendung des Satzes von Ceva, kann man beweisen, daß jene drei Linien sich in einem Punkte schneiden. Es ist

$$\frac{GB}{GC} = \frac{ABD}{ACD} \text{ und } \frac{HC}{HA} = \frac{BEC}{BAE}$$

und da $ACD \cong BEC$, so folgt

$$\frac{GB}{GC} \cdot \frac{HC}{HA} = \frac{ABD}{BAE}.$$

Da ferner $\quad \frac{JA}{JB} = \frac{ACF}{BCF}$,

so folgt mit Rücksicht auf die oben angeführten Kongruenzen:

$$\frac{GB \cdot HC \cdot JA}{GC \cdot HA \cdot JB} = 1,$$

womit bewiesen ist, daß sich die Linien AD, BE und CF in einem Punkte schneiden.

* *

Formeln.

Von Oberlehrerin Gertrud Illgner (Duisburg-Meiderich).

$$\text{I} \quad \sin\alpha = 4 \sin\frac{\alpha}{3} \sin\frac{\pi - \alpha}{3} \sin\frac{\pi + \alpha}{3}.$$

$$\text{II} \quad \cos\alpha = 4 \cos\frac{\alpha}{3} \cos\frac{\pi - \alpha}{3} \cos\frac{\pi + \alpha}{3}.$$

Herleitung.

Die Herleitung geschieht mit Hilfe der bekannten Formeln:

$$\sin\alpha = 3 \sin\frac{\alpha}{3} - 4 \sin^3\frac{\alpha}{3},$$

$$\cos\alpha = 4 \cos^3\frac{\alpha}{3} - 3 \cos\frac{\alpha}{3}.$$

Herleitung von Formel I:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= 3\sin\frac{\alpha}{3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3}\\
&= 4\sin\frac{\alpha}{3}\left(\frac{3}{4} - \sin^2\frac{\alpha}{3}\right)\\
&= 4\sin\frac{\alpha}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \sin^2\frac{\alpha}{3}\right]\\
&= 4\sin\frac{\alpha}{3}\left[\sin^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\alpha}{3}\right]\\
&= 4\sin\frac{\alpha}{3}\left[\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\alpha}{3}\right)\left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\alpha}{3}\right)\right]\\
&= 4\sin\frac{\alpha}{3}\left[\left(2\sin\frac{\pi-\alpha}{6}\cos\frac{\pi+\alpha}{6}\right)\left(2\sin\frac{\pi+\alpha}{6}\cos\frac{\pi-\alpha}{6}\right)\right]\\
&= 4\sin\frac{\alpha}{3}\left[\left(2\sin\frac{\pi-\alpha}{6}\cos\frac{\pi-\alpha}{6}\right)\left(2\sin\frac{\pi+\alpha}{6}\cos\frac{\pi+\alpha}{6}\right)\right]\\
&= 4\sin\frac{\alpha}{3}\sin\frac{\pi-\alpha}{3}\sin\frac{\pi+\alpha}{3}.
\end{aligned}$$

Man vergleiche diese Formel mit der Formel

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

indem man für $\cos\frac{\alpha}{2}$ den Ausdruck $\sin\frac{\pi-\alpha}{2}$ einsetze. Es ist auffällig, wie ähnlich beide Formeln sind. Merkwürdig ist nur, daß der Koeffizient 4 in der obigen Formel erscheint, während man 3 erwarten sollte.

Herleitung von Formel II:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}\\
&= 4\cos\frac{\alpha}{3}\left(\cos^2\frac{\alpha}{3} - \frac{3}{4}\right)\\
&= 4\cos\frac{\alpha}{3}\left[\cos^2\frac{\alpha}{3} - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2\right]\\
&= 4\cos\frac{\alpha}{3}\left[\cos^2\frac{\alpha}{3} - \cos^2\frac{\pi}{6}\right]\\
&= 4\cos\frac{\alpha}{3}\left[\left(\cos\frac{\alpha}{3} - \cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{3} + \cos\frac{\pi}{6}\right)\right]\\
&= 4\cos\frac{\alpha}{3}\left\{-\left[2\sin\left(\frac{\alpha}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{6}-\frac{\pi}{12}\right)\right]\right.\\
&\qquad\left.\left[2\cos\left(\frac{\alpha}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{6}-\frac{\pi}{12}\right)\right]\right\}\\
&= 4\cos\frac{\alpha}{3}\left\{\left[2\sin\left(\frac{\alpha}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{6}\right)\right]\right.\\
&\qquad\left.\left[2\cos\left(\frac{\alpha}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{6}\right)\right]\right\}\\
&= 4\cos\frac{\alpha}{3}\left\{\left[2\sin\left(\frac{\alpha}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\right]\right.\\
&\qquad\left.\left[2\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{6}\right)\right]\right\}\\
&= 4\cos\frac{\alpha}{3}\left\{\sin\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{3}\right)\right\}\\
&= 4\cos\frac{\alpha}{3}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)\right\}\\
&= 4\cos\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\pi-\alpha}{3}\cos\frac{\pi+\alpha}{3}.
\end{aligned}$$

* * *

Lehrsatz über $(x^n - x)$.

Von Oberlehrerin Gertrud Jllgner (Duisburg-Meiderich).

Vorbemerkung. Vor einigen Jahren sagte mir ein Rechenkünstler, Dr. Ferrol, er habe beobachtet, daß der Zahlenwert $(x^n - x)$ meist durch n teilbar sei, daß es aber bei den Potenzen von 2 häufig nicht zuträfe. Näheres wußte er nicht anzugeben. Ich habe später über diese Beobachtung genauer nachgedacht und bin zu folgendem Ergebnis gekommen.

Lehrsatz: $(x^n - x)$ ist ein ganzzahliges Produkt von n, wenn x eine ganze Zahl und n eine Primzahl ist.

Voraussetzung. 1. x ist eine ganze Zahl,
2. n ist eine Primzahl.

Behauptung $(x^n - x)$ ist durch n ohne Rest teilbar.

Beweis. Ich zerlege x in $[1 + (x-1)]$ und dementsprechend den Wert x^n in die Reihe:

$$1 + \binom{n}{1}(x-1) + \binom{n}{2}(x-1)^2 + \cdots\cdots + \\ + \binom{n}{1}(x-1)^{n-1} + (x-1)^n.$$

Nun betrachte ich die einzelnen Summanden. Da (nach Voraussetzung 1) x eine ganze Zahl ist und da die Werte $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ usw. stets ganze Zahlen sind, wofern n eine solche ist (s. Voraussetzung 2), so ist jeder einzelne Summand der Reihe eine ganze Zahl. Da nun (nach Voraussetzung 2) n eine Primzahl ist und da jeder der Faktoren in den Nennern der Scheinbrüche $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$ usw. kleiner als n sein muß, so ist es ausgeschlossen, daß einer der Nenner mit n in Teilergemeinschaft steht. Folglich muß n, der erste Faktor des Zählers, als Faktor der ganzen Zahlen $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$, $\binom{n}{4}$ usw. bestehen bleiben. Daraus ergibt sich: jeder Summand der Reihe vom zweiten bis zum vorletzten ist ein Produkt von n.

Dann besteht x^n aus einem Produkt von n, vermehrt um 1 und $(x-1)^n$.

Nun zerlege ich $(x-1)^n$ in die Reihe:

$$1 + \binom{n}{1}(x-2) + \binom{n}{2}(x-2)^2 + \cdots\cdots + \\ + \binom{n}{1}(x-2)^{n-1} + (x-2)^n.$$

Die obigen Ueberlegungen finden entsprechende Anwendung. Daraus folgt: $(x-1)^n$ ist ein Produkt von n, vermehrt um 1 und $(x-2)^n$. Dann ist aber x^n ein Produkt von n, vermehrt um $(1+1)$ und $(x-2)^n$, oder x^n ist ein Produkt von n, vermehrt um $2 + (x-2)^n$. Zerlege ich nun $(x-2)^n$ wieder in der gleichen Weise, so ergibt sich: x^n ist gleich einem Produkt von n, vermehrt um $3 + (x-3)^n$.

So fahre ich mit den Zerlegungen fort. Schließlich ergibt sich bei der letzten Zerlegung, nämlich der Reihe mit dem Endglied $[x-(x-1)]^n$: x^n ist ein Produkt von n, vermehrt um $(x-1)$ und $[x-(x-1)]^n$. Nun ist aber $[x-(x-1)]^n = 1$. Folglich: x^n ist ein Produkt von n, vermehrt um x. Dann ist $(x^n - x)$ ein Produkt von n.

Vereine und Versammlungen.

Sitzung von Vertretern der schulreformfreundlichen Vereine am 24. November 1911 im Hause des Vereins deutscher Ingenieure in Berlin.

Vertreten waren folgende Vereinigungen: Allg. Deutscher Realschulmänner-Verein, Verein Deutscher Chemiker, Verein für Schulreform, Deutscher Ausschuß für math. und naturw. Unterricht, Verein zur Förderung des lateinlosen höheren Schulwesens, Sächsischer Realgymnasiallehrer-Verein, Verein deutscher Ingenieure, Verein zur Förderung des math. und naturw. Unterrichts, Bayrischer Realschulmänner-Verein. Nach Ablehnung einiger Zusatz-Vorschläge, unter anderen des von Herrn

Prof. Fricke-Bremen zu 1 beantragten, „Die Gleichberechtigung der drei höheren Schulen ist unter Wahrung ihrer Eigenart völlig durchzuführen“ wurden nach kleinen Aenderungen die von Herrn Geh. Rat Steinbart-Duisburg vorgeschlagenen Sätze angenommen:

1. Die Gleichberechtigung der drei höheren Schularten ist vollständig durchzuführen.
2. Im Interesse einer allgemein als notwendig anerkannten größeren Berücksichtigung der modernen Bildungsmittel, der Naturwissenschaften und der neueren Sprachen, ist folgendes erforderlich:
   a) Es müssen an jedem Orte mit isoliertem Gymnasium alten Systems, sofern die direkte Umwandlung der Anstalt in eine Reformschule mit Gabelung in den oberen Klassen untunlich erscheint, zunächst griechischlose Nebenklassen eingerichtet werden, welche bei genügender Schülerzahl bis zur Reifeprüfung fortzuführen sind.
   b) Bei jeder Neugründung einer höheren Schule als einziger Anstalt an einem Orte ist nur eine Realschule zu genehmigen, der bei Bedarf Reformschulnebenklassen anzugliedern sind.
   c) Zur Aufnahme der Absolventen der in kleineren Orten befindlichen Realschulen und Proreformschulen müssen in jeder Provinz, soweit sie nicht schon vorhanden sind, Oberrealschulen und Reformschulen in planmäßiger örtlicher Verteilung eingerichtet werden.
3. In der Vereinbarung der deutschen Bundesregierungen über die gegenseitige Anerkennung der Reifezeugnisse (veröffentlicht in Preußen durch Bekanntmachung vom 22. Oktober 1909) ist an Stelle des Abschnittes 4 und unter Wegfall des Abschnittes 7 zu setzen: „Die Reifezeugnisse, welche Angehörige des Deutschen Reiches an öffentlichen deutschen Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen erworben haben, berechtigen zum Studium an allen deutschen Hochschulen in sämtlichen Berufszweigen und zur Zulassung zu allen Prüfungen für den höheren Staats- und Kirchendienst in sämtlichen deutschen Bundesstaaten. Insofern es für manche Studien und Berufszweige noch besonderer Vorkenntnisse bedarf, deren Vermittelung nicht oder doch nicht in demselben Umfange zu den Aufgaben jeder Anstalt gehört, und insofern daher eine Ergänzung erforderlich ist, sind die Bestimmungen über den Nachweis dieser Ergänzung für alle deutschen Bundesstaaten gleichmäßig zu gestalten.“

In den Ausschuß, der die Ausführung der Beschlüsse in die Wege leiten soll, wurden abgeordnet die Herren: Duisberg, Eickhoff, Gutzmer (Stellvertreter Poske), Hintzmann (Stellvertreter Gropp), Meyer, Steinbart (Stellvertreter Hubatsch) und Vorster. Herr Steinbart wird den Vorsitz im Ausschuß übernehmen.

Bücher-Besprechungen.

Zum ersten Bande der Gesamtausgabe von Leonhard Eulers Werken.*)

Am 29. April 1907 fand in der Martinskirche zu Basel zu Ehren des zweihundertjährigen Geburtstages Leonhard Eulers ein Festakt statt, der einen weihevollen Verlauf nahm. Der Umstand, daß neben den sämtlichen schweizerischen Hochschulen die Petersburger und die Berliner Akademie durch persönliche Abordnungen vertreten waren, verlieh der Feier einen besonderen Glanz.

Etwas über vier Jahre sind seit jener Feier verstrichen, und das lang erstrebte große Werk ist nun auf Schweizer Boden erstanden. Dank der Ausdauer und Energie von Dr. F. Rudio, dank der Mithilfe und tatkräftigen Unterstützung von seiten zahlreicher Freunde der Wissenschaft und insbesondere der Akademien von Berlin, Paris und Petersburg liegt jetzt der erste Band der Euler-Ausgabe, ein stattlicher Quartband von 748 Seiten, fertig vor! Und 44 weitere Quartbände sollen folgen!

Mehr als einmal hat sich Leonhard Euler anheischig gemacht, der Petersburger Akademie so viel Abhandlungen zu liefern, daß sie für zwanzig Jahre nach seinem Tode hinreichen sollten. So erzählt Nicolaus Fuß in seiner „Lobrede auf Herrn Leonhard Euler“. Es ist bekannt, daß Euler sich selbst weit überboten hat: seine hinterlassenen Schriften haben nicht nur ausgereicht, um kurz nach seinem Tode drei stattliche Quartbände zu füllen, sie haben auch, nicht zwanzig, sondern sogar mehr als vierzig Jahre lang die Denkschriften der Petersburger Akademie geziert, ohne damit erschöpft gewesen zu sein. Ja, selbst heute, fast 130 Jahre nach Eulers Tode, kann der wissenschaftliche Nachlaß des großen Mathematikers, auch wenn man von den unveröffentlichten Briefen absieht, noch nicht als völlig aufgearbeitet betrachtet werden. Aber auch in einem andern Sinne, als in dem der Drucklegung, muß sein Lebenswerk als noch bei weitem nicht erschöpft bezeichnet werden. Die beispiellose Produktivität Eulers und der Umstand, daß seine Schriften so zerstreut und vielfach auch so unzugänglich sind, daß es dem einzelnen bisher unmöglich war, einen vollständigen Einblick in diese gewaltige, ungeordnete Masse zu gewinnen, mußten es mit sich bringen, daß viele seiner Arbeiten gar nicht in dem Maße in die Entwicklung der Wissenschaft eingegriffen haben, wie sie es verdient hätten. Ist es doch selbst in unsern Tagen keine so seltene Erscheinung, daß Entdeckungen als neu veröffentlicht werden, die vor mehr als einem Jahrhundert schon von Euler gemacht worden sind. Jahrzehnte hat es gedauert, bis grundlegende Gedanken Eulers ihre wahre Wirkung geäußert und bis sie den ihnen zukommenden Platz in der Wissenschaft gefunden haben.

Jetzt liegt der Band, der „Leonhardi Euleri Opera omnia“ eröffnet, fertig vor. Herr Prof. Heinrich Weber in Straßburg ist sein Herausgeber. Der Band enthält als Hauptbestandteil Leonhard Eulers „Vollständige Anleitung zur Algebra“; erster Teil: Von den verschiedenen Rechnungsarten, Verhältnissen und Proportionen; zweiter Teil: Von Auflösung algebraischer Gleichungen und der unbestimmten Analytic. Eulers „Vollständige Anleitung“ war eines der einflußreichsten Bücher über Algebra im 18. Jahrhundert, nicht zum mindesten, weil sie außerordentlich klar und in leicht verständlicher Form geschrieben ist. Bemerkenswert ist die Entstehungsweise des Werkes, wie sie im Vorbericht zur deutschen Ausgabe (Petersburg 1770) mitgeteilt wird; Euler war damals schon vollständig erblindet. Er erwählte sich einen jungen Menschen, den er mit sich aus Berlin zur Aufwartung genommen hatte,

*) Die Euler-Ausgabe erscheint im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

und der ziemlich gut rechnen konnte, sonst aber keinen Begriff von der Mathematik hatte; „er war seines Handwerks ein Schneider, und gehörte, was seine Fähigkeit anlangt, unter die mittelmäßigen Köpfe. Dem ungeachtet hat er nicht nur alles wohl begriffen, was ihm sein großer Lehrer vorsagte, und zu schreiben befahl, sondern er wurde dadurch in kurzer Zeit in den Stand gesetzt, die in der Folge vorkommenden schweren Buchstabenrechnungen ganz allein auszuführen und alle ihm vorgelegte Algebraische Aufgaben mit vieler Fertigkeit aufzulösen."

Nach den „Algebra" kommen, in diesem ersten Bande, die „Additions à l'analyse indéterminée", von J. L. Lagrange, die schon im Redaktionsplan ausdrücklich als dazu gehörig angekündigt waren.

Der Algebra gehen das von F. Rudio verfaßte „Vorwort zur Gesamtausgabe der Werke von Leonhard Euler" und die „Lobrede auf Herrn Leonhard Euler", von Nicolaus Fuß, voran, letztere vom Verfasser selbst „aus dem Französischen übersetzt und mit verschiedenen Zusätzen vermehrt." Wenn auch an Lebensbeschreibungen Eulers kein Mangel ist, so ist doch diese Schrift, die mit der Widmung „An mein Vaterland" im Jahre 1786 in Basel auf Kosten des Staates gedruckt wurde, vor allen andern geeignet, die große Euler-Ausgabe zu eröffnen. War doch Nicolaus Fuß nicht nur Eulers dankbarer und anhänglicher Schüler, sondern auch sein langjähriger und treuer Mitarbeiter, „der durch seine unermüdliche, selbstlose Tätigkeit die erstaunliche Produktivität ermöglichte, die Leonhard Euler im letzten Jahrzehnt seines Lebens entfaltet hat. Niemand wird diese „Lobrede" ohne tiefe innere Bewegung lesen können, auch wenn ihm nichts über die näheren Beziehungen ihres Verfassers zu dem Gefeierten bekannt wäre."

Ein Bildnis Eulers nach dem Stiche von Mechel ziert diesen ersten Band. Möge der Anfang ein gutes Omen sein für die Zukunft. Dr. L. G. D.

* * *

Fenkner, Dr. H., und **Wagner, Dr. H.**, Lehr- und Uebungsbuch der Mathematik für Lyzeen, in 2 Teilen, mit zahlreichen Figuren im Texte. Teil I: 2.80 M, Teil II: 2.20 M. Berlin 1911, Otto Salle.

Das Buch stellt eine Bearbeitung der bekannten Fenknerschen Lehrbücher auf Grund der „Ausführungsbestimmungen" vom 12. Dezember 1908 dar. Im allgemeinen ist der Charakter der Fenknerschen Bücher gewahrt worden. In der Hauptsache sind da, wo es die neuen Lehrpläne verlangen, Aenderungen vorgenommen worden.

Das Buch ist, wie aus dem Titel hervorgeht, Lehr- und Uebungsbuch zugleich. Der Lehrstoff ist klar und übersichtlich dargestellt. Die Lehrsätze sind bei knapper prägnanter Form doch stets in gutem Deutsch gehalten und durch fetten Druck hervorgehoben. Die Beweise, in der Planimetrie und Stereometrie durch gute Figuren unterstützt, sind gründlich und leicht verständlich. Leichte Beweise einiger Sätze, in der Hauptsache solche aus der Arithmetik, sind mit Recht im Uebungsstoff als Aufgaben gestellt. Die Gründlichkeit des Buches setzt auch die Schülerinnen in den Stand, das in der Schule Besprochene nochmals durchzuarbeiten und in sich zu befestigen, so daß das Buch dem Lehrer eine ausgezeichnete Hilfe bei der Verarbeitung der schwierigen Materie werden muß. Die durch das ganze Buch gehende Gliederung des Stoffes in Einzelabschnitte ermöglicht einmal eine schnelle Uebersicht und zweitens gestattet sie dem Lehrer, diesen oder jenen Abschnitt zurückzustellen bezw. vorwegzunehmen, so daß ihm auf diese Weise möglichst viel Freiheit in der Durchnahme gelassen wird.

Was den Stoff selbst betrifft, so fällt zunächst auf, daß bei den Gleichungen mit zwei Unbekannten von graphischen Darstellungen ausgiebig Gebrauch gemacht wird. Dem einen oder anderen wird es vielleicht zu viel sein, namentlich, da der analytischen Geometrie Konkurrenz gemacht wird. Da jedoch das Pensum der Klasse 3 nicht allzugroß ist, wird in den meisten Fällen die nötige Zeit zur Verfügung stehen. Bei der Trigonometrie ist nur die Entwicklung der bekannteren Formeln gegeben. Alles nicht durchaus Nötige ist fortgeblieben. Dafür enthält aber das Buch noch einen Abschnitt über die Anwendung der Trigonometrie auf Höhen- und Horizontalstreckenberechnung, dessen Angliederung wohl allgemein Beifall finden wird. Im zweiten Teile sind besonders erwähnenswert die Stereometrie und die analytische Geometrie der Ebene. Bei ersterer sind gerade die einleitenden Sätze, die gewöhnlich den Schülern einige Schwierigkeit bereiten, leicht faßlich abgeleitet. Die analytische Geometrie ist mit Recht sehr ausführlich gehalten, namentlich in den Anfangskapiteln. Auch hier macht sich die durch das ganze Buch gehende klare Darstellung angenehm bemerkbar. Was das Aufgabenmaterial des Buches anbelangt, so ist dasselbe sorgfältig ausgewählt. An manchen Stellen, wie z. B. bei den Potenzen und Wurzeln, wäre allerdings eine größere Zahl von Aufgaben zu wünschen. Im allgemeinen aber ist das Material so groß, daß eine reiche Auswahl zur Verfügung steht. Bei den geometrischen Aufgaben ist besonders hervorzuheben: die Angabe von Zahlenwerten. Dem Lehrer ist dadurch die Arbeit wesentlich erleichtert.

Ich sagte zu Beginn, das Buch wäre eine Bearbeitung auf Grund der „Ausführungsbestimmungen vom 12. Dezember 1908". Diese letzteren verlangen aber in Klasse 1 bekanntlich: „Ergänzungen, Zusammenfassungen und Uebungen aus dem Gesamtgebiet des mathematischen Schulunterrichts" und „Rückblicke unter Heranziehung geschichtlicher und philosophischer Gesichtspunkte." Es wurde jedoch, wie es im Vorwort zum zweiten Teile heißt „von einer lehrbuchmäßigen Behandlung" dieses Stoffes abgesehen, um „dem Lehrer gerade in dieser Beziehung freie Hand zu lassen." Dasselbe gilt von der im vierten Seminarjahre verlangten „Methodik des Unterrichts" und der „Einführung in die Literatur des Faches." Nach meiner Ansicht hat der Verfasser diese Abschnitte mit Recht weggelassen. Denn bei der Besprechung derselben wird wohl stets ein Spezialwerk zugrunde gelegt werden.

Wenn das Buch auch zu kleinen Ausstellungen Anlaß gibt, wie z. B. im Kapitel über Logarithmen zuviel Berechnungen ohne Logarithmentafel auszuführen sind, oder wie ferner der goldene Schnitt durch Umformung der Gleichung $a : x = x : (a - x)$ weniger künstlich hätte entwickelt werden können, so ist dem entgegenzuhalten, daß ein vollkommenes Buch nicht existiert und auch nie erscheinen wird, und daß die großen Vorzüge des Buches die kleinen Nachteile weit überwiegen. Das Buch ist daher ein gutes zu nennen; und es wäre wünschenswert, daß es in möglichst vielen Lyzeen Eingang fände.

Dem Vernehmen nach soll demnächst von denselben Verfassern auch der zweite Teil der Ausgabe für Studienanstalten erscheinen, so daß dann auch dieses Werk abgeschlossen vorliegt.

K. Heye (Magdeburg.)

* * *

Lesser, Die Infinitesimalrechnung im Unterricht der Prima. 2. verb. Aufl. Berlin 1911, Otto Salle. Geh. M 1.80.

Das Buch ist augenscheinlich aus der Praxis des Unterrichts hervorgewachsen. Das verrät sich in der ganzen Anlage, wie in der Durchführung im einzelnen. Der Behandlung der Differentialrechnung ist eine Betrachtung über Funktionen, ihre Einteilung und ihre graphische Darstellung vorausgeschickt, wobei die allgemeinen Erörterungen, insbesondere die geometrische Veranschaulichung, an dem Beispiel einer ganzen, einer gebrochenen und einer transzendenten Funktion eingehend erläutert werden. Daran schließen sich Beispiele für die Auflösung von Gleichungen auf graphischem Wege und nach der Regula falsi.

In den beiden Hauptteilen des Buches werden die Grundzüge der Differential- und Integralrechnung in anschaulicher, dem Fassungsvermögen der Schüler angemessener Weise dargelegt. Daß hier die allgemeinen Betrachtungen sich fast überall auf eine Reihe konkreter Beispiele stützen, und die Theorie von vornherein reichlich mit Anwendungen durchsetzt ist, wird den Beifall jedes praktischen Schulmannes finden. So wird z. B. der zum Begriff Differentialquotient hinführende Gedankengang an einer Reihe einfacher Funktionen wirklich durchgeführt und sofort zur Aufstellung der Tangenten- und Normalengleichung von Kurven verwendet. Erst nachdem die Bedeutung des Differentialquotienten auf diese Weise in Fleisch und Blut übergegangen ist, werden die zu seiner mathematischen Handhabung nötigen Regeln aufgestellt und eingeübt, Auch die Bedingung für das Eintreten extremer Werte ist durch gelegentliche Bemerkungen bei anderen Aufgaben schon vorbereitet, so daß die systematische Erledigung dieses Kapitels an z. T. schon geläufige Dinge anknüpft. Ueberhaupt ist die Behandlung des Stoffes nach meinen Erfahrungen im allgemeinen durchaus zweckmäßig. Insbesondere halte ich das Rechnen mit Differentialen, wie es neben dem mit Differentialquotienten in dem Buch von vornherein geübt wird, für sehr angebracht, glaube aber, daß der Begriff „unendlich kleine Größe" auch auf der Schule einer strengeren Erklärung bedarf, als sie S. 19 bietet, und daß sich die Benutzung des Begriffes „verschiedene Ordnung des Unendlich Kleinen" für ein wirkliches Verständnis der Sache nicht wird umgehen lassen.

Am wenigsten zugesagt hat mir in dem Büchlein die Behandlung der Taylorschen Reihe. Das soll kein schwerwiegender Vorwurf sein. Denn wohl jeder Lehrer, der schon einmal seine Schüler in die Infinitesimalrechnung eingeführt hat, wird die unterrichtlichen Schwierigkeiten empfunden haben, die gerade der Taylorsche Satz darbietet. Die Schwierigkeit liegt darin, Faßlichkeit der Darstellung mit einer auch die besseren Schüler überzeugenden Strenge zu verbinden. So wenig wir im Schulunterricht nach funktionentheoretischer Schärfe zu streben das Recht oder gar die Pflicht haben, so wenig ist es angebracht, Beweise und Ableitungen zu geben, die ein kritischer Schüler als anfechtbar erkennt, und die nur sein Mißtrauen gegen die Sache wecken. Zwar dürfte es in unserem Falle für die Schule durchaus empfehlenswert sein, bei der Behandlung der Taylorschen Reihe den Begriff der „Ersatzfunktion" wie in vorliegendem Buche zu benutzen. Doch darf dann der Uebergang von der als Ersatzfunktion dienenden ganzen Funktion zu der unendlichen Reihe nicht einfach durch die (nicht zutreffende) Bemerkung geschehen, daß bei $\lim n = \infty$ die Ueberlegungen dieselben bleiben. Wie sich der Berichterstatter die Behandlung dieses Kapitels denkt, hofft er demnächst in diesen Blättern erklären zu können.

Zum Schluß noch einige Ausstellungen mehr formaler Natur, die bei späteren Neuauflagen berücksichtigt werden könnten: die Ausdrucksweise dürfte stellenweise klarer und schärfer sein. Wenn auf S. 18 von einem unendlichen Dezimalbruch gesagt wird: die Grenze selbst wird dann erreicht, wenn die Anzahl der Stellen wirklich unendlich wird, so wird das einer klaren Erfassung des Grenzbegriffes wohl kaum förderlich sein. Auf S. 35 wird bei der Ableitung des log gesagt: „Es sei hier bemerkt, daß

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71\cdots\text{".}$$

Ein Hinweis darauf, daß dieser Wert später (S. 66) hergeleitet wird (allerdings in nicht einwandfreier Weise), wäre hier wohl angebracht. Auf S. 3 ist von Unbekannten statt Variablen die Rede. Fremdwörter wie Derivierte, kontinuierlich, Progression sind wohl vermeidbar. Auf S. 25 muß es heißen

$$\sphericalangle PNT = \operatorname{arctg}\frac{dx}{dy}\left(\text{nicht } -\frac{dx}{dz}\right).$$

Eine Rechtfertigung der Bezeichnung $\frac{d^2y}{dx^2}$ wäre wohl wünschenswert. Da bei der Herleitung der Bestimmungsstücke des Krümmungskreises doch implizite Funktionen differentiiert werden, wäre eine Vereinfachung der Rechnung möglich. Ebenso könnte die Behandlung extremer Werte auch auf den Fall, daß y'' und höhere Ableitungen verschwinden, ausgedehnt werden, da ja das hierzu nötige Hilfsmittel (Taylorsche Reihe) doch benutzt wird.

Selbstverständlich vermögen diese Einzelheiten den günstigen Gesamteindruck des Buches nicht zu verwischen. Da die Behandlung der Infinitesimalrechnung im Schulunterricht noch etwas Neues und noch nicht vielseitig Erprobtes ist, so kann das Buch als ein Muster, wie man es machen kann, allen Kollegen empfohlen werden.

G. Lony (Hamburg).

* * *

Kambly-Thaer, Mathematisches Unterrichtswerk. Breslau 1911, Ferdinand Hirt.

Rechenbuch für Vorschulen höherer Lehranstalten von Dr. A. Thaer und R. Rouwolf in drei kartonierten Heften zu 0,80 M, 0,90 M und 1 M.

Rechenbuch für höhere Schulen von Dr. A. Thaer und R. Rouwolf in vier kartonierten Heften.

1. Heft, für Sexta, 95 S., 1 M, Ergebnisse dazu 0,50 M.
2. Heft, für Quinta, 96 S., 1 M, Ergebnisse dazu 0,50 M.
3. Heft, für Quarta, 96 S., 1 M, Ergebnisse dazu 0,50 M.

Ergänzungsheft für Obertertia und Untersekunda, 102 S., 1 M, Ergebnisse dazu 0,50 M.

Als Vorstufe und Ergänzung der Neubearbeitung des Kamblyschen Unterrichtswerkes hat Direktor Thaer in Gemeinschaft mit R. Rouwolf das obige Rechenbuch geschaffen, das sich als Frucht einer 13 jährigen Arbeitsgemeinschaft der beiden Verfasser darstellt. Die gut ausgestatteten Hefte bieten ein sehr reichhaltiges, planvoll geordnetes Aufgabenmaterial. Sachliche Erläuterungen und ausgeführte Musterbeispiele sind, soweit nötig, den Aufgaben vorangestellt. Das Ergänzungsheft gibt eine ausreichende Einleitung in das kaufmännische Rechnen und dürfte sich, da es von den übrigen Heften unabhängig ist und ein reichhaltiges Material von Aufgaben aus der Bürgerkunde enthält (Aufgaben über die Arbeiterschutzgesetze finden sich allerdings am Ende des dritten Heftes), auch für Fortbildungsschulen und vielleicht auch für kaufmännische Fachschulen eignen.

Kamblys Mathematisches Unterrichtswerk, Neubearbeitet von Dir. Prof. Dr. Thaer.

Ausgabe A: Für Gymnasien.

1. Teil: Arithmetik und Algebra. Mit 15 Fig., 39. Aufl. Geb. 2 M.
2. Teil: Planimetrie. Mit 234 Fig., 146. und 147. Aufl. Geb. 2 M.
3. Teil: Trigonometrie. Mit 68 Fig., 33. Aufl. Geb. 2 M.
4. Teil: Stereometrie. Mit 170 Fig., 32. Aufl. Geb. 2 M.

Ausgabe B: Für Oberrealschulen, Realgymnasien und Gymnasien mit mathematischem Reformunterricht.

1. Teil: Arithmetik und Algebra. Mit 52 Fig., 39. Aufl. Geb. 2,50 M.
2. Teil: Planimetrie. Mit 300 Fig., 148. bis 151. Aufl. Geb. 2,50 M.
3. Teil: Trigonometrie. Mit 77 Fig., 32. Aufl. Geb. 2,50 M.
4. Teil: Stereometrie. Mit 294 Fig., 32. Aufl. Geb. 3 M.

Ausgabe C: Für Realschulen.

1. Teil: Arithmetik und Algebra. Mit 6 Fig. Geb. 1,25 M.
2. Teil: Planimetrie nebst Elementen der Trigonometrie und Stereometrie. Mit 315 Fig. 1910. Geb. 2,75 M.

Sonderdrucke aus Kambly-Thaers Mathematischem Unterrichtswerk: Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Mit 91 Fig. Kart. 1,30 M.
Trigonometrische und stereometrische Lehraufgabe der Untersekunda. Mit 66 Fig. Kart. 0,80 M.
Hauptsätze der neueren Geometrie. Ergänzung der Planimetrie. Mit 43 Fig. Kart. 0,90 M.

Das Werk stellt eine auf Grund der Langguth-Roederschen Ausgabe besorgte Neubearbeitung der Kamblyschen Lehrbücher dar. Die bei einem Schulbuche von der Verbreitung des „Kambly" unumgängliche Forderung, daß ältere Auflagen neben der neuen benutzbar seien, hat den Abänderungen verhältnismäßig enge Grenzen gezogen und eine weitergehende Umgestaltung einzelner Teile oder gar des ganzen Werkes verboten. „Am guten Alten in Treuen halten", das gebot auch der Wunsch der großen Mehrzahl derjenigen Mathematiker, die den Kambly seither schon im Schulunterricht erprobt hatten. Daß das „schöne Neue" durch diese Rücksicht bei der Neubearbeitung nicht zu kurz gekommen ist, zeigt ein Blick in die einzelnen Bände. In der Arithmetik ist der Abschnitt über die Zahl ganz umgearbeitet und der Aufbau des Zahlengebietes durch Einführung des Permanenzprinzips einheitlich gestaltet. Neu hinzugekommen sind hier die Streckenrechnung und ein Anhang, der außer einem Abschnitt über Versicherungsrechnung ein Kapitel über graphische Darstellung und eine Einleitung in die Differential- und Integralrechnung enthält. Auch in der Planimetrie sind ohne Aenderung des Gesamtplanes zahlreiche Neuerungen aufgenommen; als Beispiel sei die Göringsche Annäherungskonstruktion der Rektifikation des Kreises genannt. Ueberall zeigt sich auch in diesem Teil das Bestreben des Herausgebers, einer mehr wissenschaftlichen Auffassung, soweit dies für den Schulunterricht überhaupt erreichbar ist, die Wege zu ebnen und damit den von Simon gegen die Kamblyschen Bücher erhobenen Vorwurf der Unwissenschaftlichkeit (der mir allerdings neben dem von demselben Beurteiler gespendeten Lob der geschickten Abfassung bei einem Schulbuch nicht sonderlich schwer zu wiegen scheint) nach Möglichkeit zu entkräften. In dem dritten Teile, der neben der (ebenen) Trigonometrie auch die üblichen Ergänzungen zum planimetrischen Pensum der Mittelstufe enthält, scheint mir der Abschnitt über Doppelverhältnisse und harmonische Elemente besonders gelungen. Der sich daraus ergebende Ausblick auf die Möglichkeit einer „projektiven" Geometrie im Gegensatz zu der metrischen dürfte sich in Schulbüchern selten finden. Aus dem vierten Teile (Stereometrie) sei der Abschnitt über die stereographische Projektion als Neuerung erwähnt, der, abgesehen von dem Interesse, das eine elementare Behandlung einer für die Kartenprojektionen wichtigen „Abbildung" an und für sich bietet, eine besonders einfache und klare Ausführung der bei nautischen und astronomischen Aufgaben vorkommenden Figuren auch dem schlechten Zeichner ermöglicht. Der Abschnitt über Analytische Geometrie bietet sehr reichhaltigen Stoff dar und ist um ein Kapitel über höhere Kurven bereichert. — Möge das schöne Werk in der neuen Gestalt seine zahlreichen alten Freunde sich erhalten und recht viele neue dazu erwerben!

G. Lony (Hamburg).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Abel, Allgemeine Geologie. Bau u. Geschichte der Erde u. ihres Lebens. Für die VII. Klasse der Realschulen. Mit 198 Textfiguren u. 6 Karten. Wien 1910, Tempsky. geb. M 4.20.

Abel-Himmelbauer, Mineralogie und Geologie. Für die V. Klasse der Gymnasien. Mit 281 Abbild., 2 Karten, 1 Taf. Wien 1911, Tempsky. geb. M 3.—.

Adami, Prof. Franz, Die Elektrizität (Bilder der Naturwissenschaft, Bd. 9). 1 Teil. Leipzig, Reclam jun. 0.40 M.

Ahrens, W., Mathematische Spiele. 2. Aufl. Mit einem Titelbild u. 77 Figuren. Leipzig 1911, Teubner. geb. M 1.25.

Altschul, Körper- und Gesundheitslehre. Für die oberen Klassen der Realgymnasien. Mit 91 Abbild. u. 4 Farbentaf. Wien 1910, Tempsky. geb. M 2.—.

Arrhenius, Das Schicksal der Planeten. Mit 2 Abbild. Leipzig 1911, Akadam. Verlagsges. m. b. H. M 1.50.

Aus Natur u. Geisteswelt, Heft 88, 314, 324, 335, 337, 343, 344. 88: M. v. Rohe, Die optischen Instrumente, 2. Aufl.; 314: P. Krische, Agrikulturchemie; 324: F. A. Schulze, Die großen Physiker und ihre Leistungen; 335: E. W. Schmidt, Das Aquarium; 337: C. Thesing, Experimentelle Biologie; 343: W. Keller, Werdegang der modernen Physik; 344: A. Wagner, Die fleischfressenden Pflanzen. Leipzig 1911, Teubner. geb. je M 1.25.

Barchanek-Ludwig, Darstellende Geometrie und Raumlehre. Lehr- und Uebungsbuch für die IV. bis VII. Klasse der Realschulen. Mit 353 Fig. 3. Aufl. Wien 1910, Tempsky. geb. M 4.—.

Bastian Schmids Naturwissenschaftl. Schülerbibliothek. I: H. Rebenstorff, Physikal. Experimentierbuch, I. Teil, 1911, geb. M 3.—; II: Dahms, An der See, 1911, geb. M 3.—; III: H. Keferstein, Große Physiker, 1911, geb. M 3.—; IV: K. G. Volk, Geologisches Wanderbuch, 1. Teil, 1911, geb. M 4 —. Leipzig, Teubner.

Beckurs, Naturgeschichte für Mittelschulen. 3 Teile. 1. Teil: 177 Abbild. u. 10 Taf., geb. M 2.40; 2. Teil: 198 Abbild. u. 8 Farbentaf., geb. M 2.40; 3. Teil: 238 Abbild., 9 Taf. u. 2 Kart., geb. M 2.60. Leipzig 1911, Pichlers Witwe & Sohn.

Beke u. Mikola, Abhandlungen über die Reform d. mathem. Unterrichts in Ungarn. Leipzig 1911, Teubner. M 4.—.

Bendemann, Luftschrauben-Untersuchungen. Mit 84 Abbild. u. 1 Taf. München 1911, Oldenbourg. M 3.50.

Berichte u. Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. V. Leipzig 1911, Teubner. M 0.60.

Bertel, Rudolf, Anleitung zu den Botan. Schülerübungen. Mit 20 Abbild. Wien 1911, Hölder. M 0.50.

Beutel, Algebraische Kurven II (Sammlung Göschen Nr. 436). Mit 52 Fig. Leipzig 1911, Göschen. M 0.80.

Böhmig, Ludwig, Das Tierreich VI. 2. Band: Die wirbellosen Tiere (Samml. Göschen Nr. 440). Ebenda. geb. M 0.80.

Bohn, Grundriß der Physik. Leipzig 1910, Quelle & Meyer. geb. M 2.80.

Boerner, Lehrbuch der Physik. 6. Aufl. Mit 402 Abbild. Berlin 1911, Weidmann. geb. M 6.—.

—„— Leitfaden der Experimentalphysik für Realschulen. Mit 194 Abbild. 9. Aufl. Ebenda. geb. M 2.40.

Brücher, Anschauung in der Arithmetik. Mit 42 Figuren. Bamberg 1911, Buchner. M 1.60.

Dannel, Heinr., Elektrochemie I. 2. Aufl. Mit 16 Figuren. (Samml. Göschen Nr. 252.) Leipzig 1911, Göschen. M 0.80.

Dingler, Hugo, Die Grundlagen der angewandten Geometrie. Leipzig 1911, Akadem. Verlagsges. m. b. H. M 5.—.

Domsch, P., Die Technischen Staatslehranstalten zu Chemnitz 1836—1911. Chemnitz 1911, Druck von Pickenhahn & Sohn.

Doule, Wilh., Lehrbuch der Experimentalphysik für den Unterricht an höheren Lehranstalten. 5. u. 6. verb. Aufl. Mit 420 Abbild., einer Spektraltafel u. über 600 Uebungsaufgaben. Stuttgart 1911, Grub. geb. M 3.60.

Düsing, K., Leitfaden der Kurvenlehre (Analytische Geometrie der Ebene). Hannover 1911, Jänecke. M 2.20.

Färber, C., Arithmetik. Für Studierende und Lehrer. Mit 9 Fig. Leipzig 1911, Teubner. geb. M 9.—.

Finger, Jos., Elemente der reinen Mechanik. 3. Aufl. Mit 213 Fig. Wien 1911, Hölder. M 22.—.

Fischer, P. B., Koordinatensysteme. Mit 8 Fig. (Sammlung Göschen Nr. 507.) Leipzig 1911, Göschen. M 0.80.

Fischer, R., Chemische u. Biochemische Uebungen. Zur Einf. in d. Chemie f. höh. Lehranstalten u. z. Selbstunterricht u. z. Vorber. auf die Mittelschullehrerprüfung. Stuttgart, Franckh. M 2.—.

Foth, R., Anfangsgründe der Zahlen- u. Raumgrößenlehre. Durchges. u. bericht. v. A. Müller. Mit 149 Abbild. Hannover 1911, Meyer.

Fricke, Naturlehre für höhere Mädchenschulen. Teil I: Mit 73 Fig.; geb. M 1.10. Teil II: Mit 116 Fig.; geb. M 1.50. Teil III: Mit 89 Fig.; geb. M 1.10. Braunschweig 1911, Appelhans.

Frommel, Radioaktivität (Sammlung Göschen Nr. 317). 2. Aufl. Mit 21 Fig. Leipzig 1911, Göschen. geb. M 0.80.

Gajdeczka, Uebungsbuch zur Arithmetik u. Algebra. 8. Aufl. Wien 1910, Tempsky. geb. M 3.20.

Gajdeczka-Kaller, Uebungsbuch zur Geometrie. 4. Aufl. Mit 21 Abbild. Wien 1911, Deuticke.

—„— Lehrbuch z. Geometrie. 4. Aufl. Mit 217 Abbild. Ebenda.

Geigel, Die Wärme. Band 10. Leipzig, Reclam. geb. M 1.—.

Glafey, Spinnen und Zwirnen. Leipzig 1911, Quelle & Meyer. geb. M 1.25.

Grabers, Leitfaden der Körperlehre u. Tierkunde. Bearb. von Altschul und Latzei. Mit 542 Abbild. u. 13 Farbentafeln. 6. verb. Aufl. Wien 1910, Tempsky. geb. M 4.70.

—„— Leitfaden der Tierkunde. Für die oberen Klassen der Realgymnasien. Bearb. von Latzei. Mit 463 Abbild. und 9 Tafeln. 6. verb. Aufl. Ebenda. geb. M 3.80.

Graebner, Taschenbuch zum Pflanzenbestimmen. Mit 11 farb., 6 schwarzen Tafeln, 376 Textabbild. Stuttgart, Kosmos. geb. M 3.80.

Graetz, L., Das Licht u. die Farben. 3. Aufl. Mit 177 Abbild. Leipzig 1910, Teubner. geb. M 1.25.

Greve, Vierstellige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. Ausgabe A: geb. M 1.80. Ausgabe B: geb. M 2.25. Bielefeld u. Leipzig 1911, Velhagen & Klasing.

Günther, Vergleichende Mond- und Erdkunde. Mit 23 Abbild. u. 4 Tafeln. Braunschweig 1911, Vieweg. M 5.—.

Häberle, Der Pfälzerwald. Mit einer Karte und 7 Abbild., sowie 4 Bildtafeln. Kaiserslautern, Crusius. M 1.—.

Hack, Franz, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit 15 Figuren. (Sammlung Göschen Nr. 508.) Leipzig 1911, Göschen. M 0.80.

Haecker, Valentin, Allgem. Vererbungslehre. Mit 135 Fig. u. 4 lithogr. Tafeln. Braunschweig 1911, Vieweg & Sohn. M 14.—.

Harms-Sievert, Erdkundliches Lernbuch für Mittelschulen. 3. Teil. Leipzig 1911, List & v. Bressensdorf. M 1.40.

Heering, W., Leitfaden für den naturgeschichtl. Unterricht. Aug. B. II. Berlin 1911, Weidmann. geb. M 4.—.

Heilborn, A., Der Mensch der Urzeit. 2. Aufl. Leipzig 1910, Teubner. geb. M 1.25.

Hemmelmayr, Franz v., Lehrb. d. Chemie u. Mineralogie. Für die IV. Klasse der Mädchenlyzeen. Mit 92 Abbild. und 1 Farbendrucktafel. 3. durchges. Aufl. Wien 1910, Tempsky. geb. M 2.50.

Henniger, K. A., Lehrbuch der Chemie und Mineralogie mit Einschluß der Elemente der Geologie. 4. u. 5. verb. Aufl. Mit 252 Fig. Stuttgart u. Berlin 1911, Grub. geb. M 4.20.

Herting, Von Strecke, Quadrat u. Würfel zum bestimmten Integral. Leipzig 1910, Teubner. geb. M 2.80.

Heß, A., Trigonometrie für Maschinenbauer und Elektrotechniker. Mit 112 Textfig. Berlin 1911, Springer. geb. M 2.80.

Heyden, Chr., Es ist Sonnenlicht! Der Komet im optischen Experiment als vorübergehende Sonnenstrahlung erklärt. Düsseldorf, W. Deiter (Alfred Pontzen). M 1.50.

Himmelbauer, Chemie und Mineralogie. Für die 4. Klasse der Gymnasien und Realgymnasien. Mit 119 Figuren und 1 Tafel. Wien 1911, Tempsky. geb. M 1.80.

Hočevar, Franz, Lehr- u. Uebungsbuch der Arithmetik für Gymnasien u. Realgymnasien. Mit 20 Figuren. Wien 1910, Tempsky. geb. M 2.60.

—„— Lehr- u. Uebungsbuch der Arithmetik für Realschulen. Mit 26 Figuren. Ebenda. geb. M 3.20.

Holba, Fermats letzter Satz als Minimumaufgabe. Budapest 1911, Kilian. M 1.—.

Kirchner, O. von, Blumen u. Insekten. Mit 159 Abbild. u. 2 Taf. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. M 6.60.

Kleiber, J., Experimentalphysik f. die Unterstufe. 2. Aufl. München 1910, Oldenbourg. geb. M 2.50.

Kneser, A., Integralgleichungen u. ihre Anwendungen in d mathem. Physik. Braunschweig 1911, Vieweg & Sohn. M 6.—.

Kommerell, V. u. K., Allgemeine Theorie der Raumkurven u. Flächen. II. Band. 2. erweit. Aufl. Mit 12 Fig. (Samml. Schubert XLIV.) Leipzig 1911, Göschen. geb. M 5.80.

—„— Spezielle Flächen u. Theorie der Strahlensysteme. Mit 9 Fig. (Sammlung Schubert LXII.) Ebenda. geb. M 4.80.

König, Die Materie (Wege zur Philosophie, Nr. 2). Göttingen 1911, Vandenhöck & Ruprecht. M 1.50.

Kraepelin, K., Naturstudien in fernen Zonen. Leipzig 1911, Teubner. geb. M 3.60.

Kraß, M., u. Landois, H., Der Mensch u. das Tierreich in Wort und Bild. 14. Aufl. Freiburg i. Br. 1911, Herder. M 3.—, geb. M 3.50.

—„— Das Mineralreich in Wort u. Bild f. d. Schulunterricht in der Naturgeschichte. 8. verb. Aufl. Mit 95 Abbild. u. einer geologischen Karte. Ebenda. geb. M 2.60.

Laager, F., Vereinfachter Lehrgang d. Elemente d. Trigonometrie f. Progymn., Gewerbeschulen, Seminarien usw., sowie z. Selbstst. Zürich, Speidel. M 1.20.

Laue, Dr. M., Das Relativitätsprinzip (Die Wissenschaft, Heft 38). Braunschweig 1911, Vieweg & Sohn. M 6.50.

Lazzeri, G., und Bassani, A., Elemente der Geometrie übers. von Treutlein. Mit 336 Fig. Leipzig 1911, Teubner. geb. M 14.—.

Lehmann, Die neue Welt der flüssigen Kristalle. Mit 246 Abbild. Leipzig 1911, Akadem. Verlagsges.

Leppin und Masche, Berichte über Apparate und Anlagen. VIII. Jahrgang, Heft 3—8. Berlin 1911, Selbstverlag.

Lorscheid, Lehrbuch der anorganischen Chemie. 19. Aufl. Herausgeg. von Dr. Friedr. Lehmann. Mit 154 Abbild. Freiburg 1911, Herder. geb. M 4.20.

Lüdtke, Beiträge zur Behandlung der elektromagnetischen Lichttheorie. Nebst einem Anhang über die Geschwindigkeit der Elektrizität. Berlin 1911, Springer. M 4.—.

Mach, Grundriß der Physik. Bearb. von Harbordt u. Fischer. I. Teil. 4. verb. Aufl. Leipzig 1911, Freytag. geb. M 2.—.

—„— Grundriß der Naturlehre für Gymnasien u. Realschulen. Bearb. von Habart. Mit 355 Abbild. Unterstufe. 7. umgearb. Aufl. Wien 1911, Tempsky. geb. M 2.50.

—„— Grundriß der Naturlehre f. Realgymnasien. Bearb. von Habart. Mit 355 Abbild. Unterstufe. Ebenda. geb. M 2.50.

Migula, Die Desmidiazeen. Mit 7 Tafeln. Stuttgart 1911, Franckh. M 2.—.

Močnik, Arithmetik u. Algebra nebst einer Aufgabensammlung. Bearb. von Zahradniček. 30. Aufl. Wien 1911, Tempsky. geb. M 4.10.

Močniks Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgabensammlung. Bearb. von Zahradniček. 31. umgearb. Aufl. Ebenda. geb. M 3.90.

Mönkemeyer-Rüsewald, Lehr- und Uebungsbuch der Mathematik. Heft 1—4. Leipzig 1911, Quelle & Meyer. Je M 0.60.

Morawetz, Vierstellige logarithmische u. trigonometrische Tafeln nebst einigen Hilfstafeln. Wien 1911, Tempsky. geb. M 0.80.

Müller, Aloys, Das Problem des absoluten Raumes u. seine Beziehung zum Allgemeinen Raumproblem. (Die Wissenschaft, Heft 39.) Braunschweig 1911, Vieweg & Sohn. M 4.—.

Münch, Lehrbuch der Physik. 1. u. 2. Teil. 12. verb. Aufl. Mit 213 Abbild. Freiburg 1911. Herder.

Natur und Kultur, herausg. von Dr. F. J. Völler. VIII, Heft 4—24. IX, Heft 1. München, Isaria-Verlag.

Nielsen, Chr., u. Langel, W., Planimetrie und Stereometrie f. Landwirtschaftsschulen. Mit 325 Abbild. Berlin 1911, Parey. geb. M 2.50.

Niemann, Das Mikroskop. 2. Aufl. Magdeburg 1911, Creutz. M 1.75.

Noack, K., Aufgaben f. physikal. Schülerübungen. 2. Aufl. Mit 95 Fig. Berlin 1911, Springer. geb. M 2.20.

Noodt, G., Leitfaden der Naturlehre für Lyzeen (höhere Lehrerinnensem.). 1. Band: geb. M 3.80. 2. Band: Mit 228 Fig. u. 6 Tafeln. geb. M 3.80. Leipzig 1911, Teubner.

Ostwald, Ueber Kataloge. 2. Aufl. Leipzig 1911, Akadem. Verlagsges. m. b. H. M 1.50.

Otti, Hauptfragen und Hauptmethoden der Kartenentwurfslehre. Aarau 1911, Sauerländer & Co. M 3.20.

Petzold, Ernst, Naturkunde für höhere Mädchenschulen. II. Heft (Klasse 6). Leipzig 1911, A. Pichlers Wwe. & Sohn. geb. M 1.75.

Poske, Oberstufe der Naturlehre. 3. verb. u. vermehrte Aufl. Mit 494 Abbild. u. 4 Tafeln. Braunschweig 1911, Vieweg & Sohn. geb. M 4.—.

Prochnow, Oskar, Die Theorien der aktiven Anpassung mit besonderer Berücksichtigung der Deszendenztheorie Schopenhauers. Leipzig 1910, Akadem. Verlagsges. m. b. H.

Ausgegeben 31. Januar 1912.