Jahrgang XVIII. 1912. No. 5.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe** und **Friedrich Pietzker**,
von diesem geleitet bis 1909, zurzeit herausgegeben von
Prof. Dr. A. Thaer,
Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentore in Hamburg.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Dir. Thaer, Hamburg 36, erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (5 Mk. Jahresbeitrag) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 8 Nummern ist 4 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Inhalt:

Zur Reform des Rechenunterrichts.

Vortrag, gehalten auf der 21. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts zu Halle a. S.
von E. Bungers (Halle).

Meine Herren! Wenn ich heute über Reformen im Rechenunterricht an den höheren Schulen zu reden beabsichtige, so ist es bei der Kürze der zugemessenen Zeit ausgeschlossen, daß ich mich mit Einzelheiten der Methodik und Didaktik befasse, soweit sie reformbedürftig sind oder Streitfragen darstellen. Ich will deshalb nicht reden von dem Zeitpunkt der Einführung der Dezimalzahlen, oder von der Gruppierung des Unterrichts in Sachgebiete, oder aber auch, was mir sehr am Herzen läge, über die Aufgaben aus der zusammengesetzten Regeldetri usw. Ich werde mich vielmehr beschränken auf die allgemeinen Ziele des Rechenunterrichts und ihre Erreichung, wobei sich dann allerdings zeigen wird, daß der Begriff „Rechenunterricht" weiter gefaßt werden muß, damit das eine Hauptziel wirklich erreicht wird.

Die Ziele, die der Rechenunterricht (im engeren Sinne) an den höheren Schulen verfolgen soll, sind verschieden formuliert worden.*) Daß er, wie kaum ein anderer Unterricht, geeignet ist, die sog. formale Bildung, die Denkfähigkeit des Schülers zu fördern, ist heutzutage so selbstverständlich, daß darüber kein Wort mehr verloren zu werden braucht.

Der Rechenunterricht hat aber noch zwei andere Ziele, die für unsere Frage hier besonders in Betracht kommen. Er soll nämlich erstens den Schüler für das praktische Leben vorbereiten; dieses Ziel hat er gemeinsam mit dem Unterricht an den Volksschulen. Zweitens aber soll er eine Vorstufe des nachfolgenden arithmetischen Unterrichts sein. Und dies Ziel unterscheidet ihn vom Volksschulunterricht. Diesen beiden Hauptzielen entsprechend, werde ich, indem ich nur die Reihenfolge umkehre, meine Ausführungen gruppieren um die beiden Fragen:

*) Vgl. z. B. Lietzmann, Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland. Leipzig-Berlin 1912, Teubner. S. 3. — Verhandlungen der XI. Direktorenversammlung in der Provinz Sachsen. Berlin 1911, Weidmannsche Buchhandlung. S. 187.

1. In welcher Weise und in welchem Umfange kann der Rechenunterricht auf den arithmetischen vorbereiten?
2. Wie kann der Rechenunterricht für das praktische Leben erziehen?

Daß es heutzutage noch Fachleute gibt, die behaupten, der Rechenunterricht könne den arithmetischen nicht vorbereiten,*) ist wunderbar. Offiziell aufgestellt ist die Forderung bereits in den preußischen Lehrplänen von 1901 und zwar mit gutem Grunde. Denn früher betrachtete man den Rechenunterricht nur als die Gelegenheit, wo die Schüler die für das Leben des Bürgers nötige Rechenfertigkeit mit bestimmten Zahlen erlernen sollten. Mit dem mathematischen Unterricht hatte er nichts zu tun. Was war aber die Folge davon?

Erstens ging das, was der Schüler sich im Laufe des Rechenunterrichts an Fertigkeit angeeignet hatte, während der nächsten Jahre vollständig wieder verloren. Zweitens aber war damit eine Kluft hinter dem Rechenunterricht geschaffen, die um so plötzlicher und schärfer wirkte, als auf der anderen Seite ganz unvermittelt und ohne Ueberleitung die mathematische Wissenschaft, gewappnet vom Scheitel bis zur Sohle mit dem schweren Panzer der wissenschaftlichen Strenge des lückenlos logischen Aufbaus, an den jungen Verstand herantreten sollte.

Ich sage „sollte", denn in Wirklichkeit konnte dieser Aufbau gar nicht lückenlos sein; das wird jeder im Unterricht erfahrene Fachmann, der mit den Grundlagen der mathematischen Wissenschaft vertraut ist, ohne weiteres zugeben. Was aber weiter daraus folgte, war dies: der Sprung über die genannte Kluft gelang nur wenigen Schülern in befriedigender Weise, viele versagten dabei, obgleich sie vielleicht vorher die Forderungen ihrer Lehrer vollständig befriedigt hatten.

So bildete sich die Anschauung heraus, als ob das Mißlingen des Sprunges das Normale sein müsse, man tröstete sich mit der bequemen Erklärung, daß die Erfüllung der mathematischen Forderungen der Schule an eine besondere Veranlagung geknüpft sei, und daß einer, der diese Veranlagung nicht besitze, sich gar nicht zu bemühen brauche, in der Mathematik etwas zu leisten. In der Tat, die Forderungen, die man früher im Unterricht stellte, mögen nur bei einer bestimmten Sonderbegabung des Schülers voll erfüllbar gewesen sein.

Aber es ist eben die Frage, ob die Forderungen berechtigt, ob die Einrichtung des Unterrichts zweckentsprechend war. Und lange genug hat es gedauert, bis man sich in weiteren Kreisen darüber klar wurde, daß hier ein Mißstand vorlag, dessen Beseitigung ein Ziel sei, des Schweißes der Edlen wert.

Die Lösung des hier auftretenden Reformproblems hat die Beseitigung der Kluft zwischen Rechen- und arithmetischem Unterricht zum Ziele, und der Plan, den hierbei eine besonnene Reform wird befolgen müssen, ist dieser: sie muß dasjenige, wofür der Knabengeist zu diesem Zeitpunkte noch nicht reif ist, weiter hinauf-, und dasjenige, wofür er schon früher Verständnis gehabt hätte, weiter hinabschieben; das heißt aber: einerseits muß die mathematische Strenge weiter zurückgedrängt und vorsichtig gehandhabt werden, andererseits muß der Rechenunterricht den mathematischen Formen und Methoden sich allmählich angleichen.

Während die zweite Forderung, die Angleichung des Rechenunterrichts, jetzt fast ausnahmslos anerkannt und wohl auch befolgt wird, scheint die erste noch nicht allgemein für richtig gehalten zu werden. Nicht nur in mathematischen Aufsätzen aus früherer Zeit findet man den nachdrücklichen Hinweis darauf, daß der mathematische Unterricht von Tertia bezw. Quarta aufwärts gerade durch die absolut strenge Logik seines Verfahrens auf den Knabengeist wirken solle, die mathematische Strenge sei der rocher de bronce, um den niemand, der vorwärts kommen wolle, herumkäme. Auch in allerneuester Zeit sind solche Stimmen laut geworden,*) die da sagen, mit Beginn des mathematischen Unterrichts müsse alles mit Ausnahme weniger wirklich unbeweisbarer Axiome logisch bewiesen werden; von da an sei die Autorität des Lehrers und die Anschauung der Sinne nichts, die Logik des Beweises alles.

Ich weiß nicht, worüber man sich dabei mehr wundern soll: über den Mangel an psychologischem Verständnis für die Entwickelung des Kindes oder über die Grausamkeit, mit der hier junge Geister in ein Prokrustesbett gespannt werden sollen. Wie weit man in dieser Richtung z. B. auch im planimetrischen Anfangsunterricht ging, zeigt mir deutlich eine Erinnerung, die ich aus meiner Quartanerzeit bewahrt habe. Dort wurde uns die gerade Linie erklärt als eine mit dem Lineal gezogene Linie; auf die Form des Lineals, und also auch der Linie, käme es dabei absolut nicht an, und wenn das Lineal auch rund wäre wie ein Hosenknopf usw. Erst viele Jahre später, als ich mich selbst mit nichteuklidischer Geometrie zu beschäftigen begann, ging mir die Erkenntnis auf, was wohl damals damit gemeint sei.

Gerade beim Beginn des mathematischen Unterrichts muß der pädagogische Grundsatz,

---

*) Vgl. die zitierte Direktorenversammlung, S. 187.

*) Vgl. G. Riehm, Zur Didaktik des mathematischen Unterrichts in den Mittelklassen des Gymnasiums. Jahresbericht des Stadtgymnasiums zu Halle a. S. Halle 1911, Gebauer-Schwetschke.

der auch sonst überall den Unterricht beherrschen müßte, besonders peinlich beachtet werden, daß man nämlich von dem Kinde alles fernhalten muß, wofür ihm normalerweise das Verständnis einfach abgeht. Wenn man von dem Jungen einen langwierigen Beweis verlangt, der ihm beim besten Willen völlig überflüssig erscheint, dessen vielgerühmte strenge Logik ihm gar nicht zwingend zum Bewußtsein kommt, dann erreicht man eben nur bei ganz besonders veranlagten Jungen das, was man will; bei der großen Masse gerade das Gegenteil.

Tiefer blickende Lehrer werden ja wohl schon früher darauf bedacht gewesen sein, hier den richtigen Uebergang zu finden und dem Schüler die neue Kost schmackhaft und verdaulich zugleich zu machen. Allgemein aber und öffentlich auf diesen wunden Punkt hingewiesen und Abhilfe gefordert zu haben, das ist und bleibt ein Verdienst der Meraner Vorschläge der Unterrichtskommission, ganz abgesehen davon, ob man ihnen sonst in ihren Einzelheiten beistimmt oder nicht.

Ich komme nun zu der anderen Seite des Reformproblems, nämlich zu der Frage nach der Angleichung des Rechen- an den arithmetischen Unterricht. In welcher Weise kann diese Angleichung geschehen?

Die Lehrpläne von 1901 sehen sie ausschließlich in der Anwendung der mathematischen Form bei Behandlung der Rechenaufgaben. Damit ist ohne Zweifel etwas sehr Wesentliches getroffen für die Ueberbrückung der Kluft zwischen Rechnen und Arithmetik. Denn wenn der Junge die Operationszeichen richtig zu verwenden versteht, die Rechengrößen mathematisch bezeichnen und einen Ausdruck mathematisch zergliedern kann; wenn er die Bedeutung der Klammern erfaßt hat und vor allem das Gleichheitszeichen in korrekter Weise anzuwenden weiß, — so wird es ihm in Tertia keine erheblichen Schwierigkeiten bereiten, auch mit Buchstabenausdrücken zu operieren und die Bedeutung solcher Ausdrücke zu verstehen. Während früher F o r m und I n h a l t des neuen Unterrichts neu und ungewohnt war, ist jetzt n u r noch d e r I n h a l t neu, die Form ist bekannt und in Fleisch und Blut übergegangen.

Die Meraner Vorschläge der Unterrichtskommission wollen nun die Vorbereitung des arithmetischen Unterrichts in Quarta noch vervollkommnen „durch Wiederholung geeigneter früher gelöster Aufgaben unter Anwendung von Buchstaben statt bestimmter Zahlen“, ferner durch Auswertung von Buchstabenausdrücken durch Einsetzen bestimmter Zahlwerte. Der Zweck dieser Vorschläge ist offenbar der, daß die Schüler schon v o r dem Beginn der systematischen Arithmetik am Schlusse des Quartapensums mit der Bedeutung der Buchstabenzahlen bekannt gemacht und an ihre Handhabung gewöhnt werden. Es ist aber fraglich, ob ein solcher Kursus am Schluß des Rechenunterrichts (im engeren Sinne) für die beabsichtigte Einführung in die Buchstabenrechnung am zweckmäßigsten, oder ob nicht eine a l l m ä h l i c h e Einführung vorzuziehen ist.

Es wird natürlich sehr von der Individualität des einzelnen Lehrers abhängen, wann und wie er eine solche Einführung beginnen will. Nach meiner persönlichen Erfahrung ist es durchaus nicht ausgeschlossen, schon vom zweiten Jahre an, also in Quinta, mit einer allmählichen Einführung der Buchstaben zu beginnen. Und das hat entschieden Vorteile.

Es kommt doch vor allem darauf an, daß der Schüler in der Einführung der Buchstaben nicht etwas Willkürliches erblickt, das ihm zunächst Unbehagen bereitet, sondern daß er von Anfang an das Gefühl hat, es sei dies ein natürlicher Fortschritt von großer Bedeutung. Und dies Gefühl wird am besten dadurch erreicht, daß die Einführung bei passender Gelegenheit und vielleicht sogar so geschieht, daß der Schüler s e l b s t darauf kommt, bestimmte Zahlen durch Buchstaben zu ersetzen. Und solche Gelegenheiten bieten sich in Quinta bereits ganz ungezwungen dar. Ich habe stets bei Behandlung der Bruchrechnung die ersten Versuche in dieser Richtung gemacht und wohl immer mit befriedigendem Erfolge. Beim ersten Auftreten erregen solche Brüche wie $\frac{a}{b}$ oder $\frac{x}{y}$ stets die kindliche Heiterkeit; man glaubt einen guten Witz gehört zu haben und geht auf diesen guten Witz mit Freude ein. Dieses Eingehen ist aber gerade von hervorragender Wichtigkeit, und wenn man es zu benutzen versteht, so geht die Spielerei sehr bald in ernstes Ueberlegen und eifrige Mitarbeit über.

Nehmen wir z. B. an, es sei durch zahlreiche konkrete Beispiele und nach den nötigen Erläuterungen das Gesetz über die Multiplikation zweier Brüche erkannt worden. Um die Allgemeingültigkeit dieses Gesetzes die Schüler fühlen zu lassen, wird man zunächst an bestimmtzahligen Aufgaben die mathematische Form herauskehren und Gleichungen sagen lassen wie z. B.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7},$$

je mehr, desto besser, ohne daß das Resultat ausgerechnet wird. Plötzlich erscheint dann der Ausdruck

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}.$$

Zuerst, aber nur einen Augenblick lang, einige Verblüffung, dann haben die Jungen verstanden, worauf es ankommt, und sagen richtig: $=\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$. Ebenso kann man bei anderen Rechenregeln verfahren und bei passender Gelegenheit hervorheben, wie man sich durch eine solche Gleichung

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

viele Worte sparen kann, wie man hier mit einem Minimum von Zeichen ein mathematisches Gesetz dargestellt hat.

Ich möchte nicht mißverstanden werden; ich befürworte keineswegs schon auf dieser Stufe eine systematische Einführung in den Formalismus der arithmetischen Methoden; die Jungen sollen nicht etwa nach diesen Formeln rechnen. Im Gegenteil, sie sollen sich möglichst stets den Weg, auf dem sie zu den Rechenregeln gelangt sind, im Bewußtsein erhalten. Die erwähnten Bemerkungen sollen immer nur nebenbei gemacht werden, die augenblickliche günstige Disposition des jugendlichen Geistes soll benutzt werden, um das erste Mal vorsichtig einen Blick zu tun in neues Land, das er später endgültig betreten muß, und das ihm dann, wenn er seine Wichtigkeit und Bedeutung schon vorher geahnt hat, nicht mehr so ganz fremd erscheint.

Es bietet sich aber auch noch andere Gelegenheit zur Benutzung von Buchstabenzahlen, ich meine im propädeutischen Geometrieunterricht. Hier wird man mit den Schülern ohne Schwierigkeit die ihnen von ihrem Baukasten her längst bekannten einfachen mathematischen Körper beschreiben. Hat man z. B. das Prisma (zunächst als kantige Säule) besprochen, so wird man die Prismen nach der Seitenzahl unterscheiden und feststellen lassen, daß das dreiseitige Prisma $3 \cdot 3$ Kanten, das vierseitige $3 \cdot 4$ Kanten usw. . . . schließlich das n-seitige $3 \cdot n$ Kanten, das p-seitige $3 \cdot p$ Kanten usw. hat. In derselben Weise bestimmt man die Zahl der Flächen und der Ecken und kann dann umgekehrt wieder die gewonnenen allgemeinen Ausdrücke auf Einzelfälle anwenden lassen.

Ganz analoge Betrachtungen liefert natürlich die Pyramide.

Diese geometrischen Anwendungen der Buchstabenzahlen lassen sich im Planimetriepensum der Quarta fortsetzen. Nachdem sich die Schüler überzeugt haben, daß die Summe der Außenwinkel eines Dreiecks gleich $4\,R$ ist, wird man nicht verfehlen zu zeigen, daß diese Summe ganz unabhängig ist von der Eckenzahl und wird dies ohne Schwierigkeit in der Form ausdrücken können, daß die Außenwinkel jedes n-Ecks die Summe $4\,R$ haben. Und weiter bietet es keine Schwierigkeit, die Summe der Innenwinkel aus der der Außenwinkel nicht nur beim Dreieck, Viereck usw., sondern auch allgemein beim n-Eck in der Form $(2n-4)R$ abzuleiten. Dies Resultat finden die besseren Schüler ganz selbständig, und den anderen macht das Verständnis absolut keine Schwierigkeiten. Kehrt man noch den Weg um und benutzt den allgemeinen Ausdruck, um die Winkelsumme für $n = 7$; 8; 10; usw. zu berechnen, so hat der Schüler für das Verständnis der Buchstabenrechnung sehr viel, wenn nicht alles, gewonnen.

Einen ganz analogen Abstecher pflege ich zu machen, wenn es sich darum handelt die Zahl der Schnittpunkte von 3; 4, . . . allgemein n Geraden oder die Zahl der Verbindungsgeraden von 3, 4 . . . allgemein n Punkten endlich die Zahl der Diagonalen in einem Polygon festzustellen. Die Ausdrücke, die sich hier ergeben, wie $\frac{n(n-1)}{2}$, $\frac{n(n-3)}{2}$ bieten nun wieder willkommene Gelegenheit, sie umgekehrt für bestimmte Zahlen auszuwerten und dadurch ihre Allgemeingültigkeit ins rechte Licht zu setzen. Denn hier muß ich sagen: das Auswerten von algebraischen Ausdrücken, wie es auf Grund der Meraner Lehrpläne jetzt in vielen Aufgabensammlungen gefordert wird, hat erst dann für die Einführung in die Arithmetik vollen Wert, wenn die Ausdrücke, wie in den erwähnten Beispielen, eine handgreifliche Bedeutung haben.

Daß außerdem der planimetrische Anfangsunterricht bei Gelegenheit der Dreieckswinkelberechnung zur Einführung in die Buchstabenrechnung geradezu herausfordert, dürfte hinreichend bekannt sein und von den Fachlehrern befolgt werden.

Hinweisen möchte ich jetzt noch auf einen anderen Punkt, der geeignet erscheint, den arithmetischen Unterricht in wirksamer Weise vorzubereiten, das sind die sog. algebraischen Aufgaben; sie werden von einzelnen Lehrbuchverfassern auch Denkübungen genannt. In solchen Aufgaben liegt, glaube ich, die Möglichkeit, die Behandlung der Gleichungen so vorzubereiten, daß ihre systematische Behandlung in Tertia als eine notwendige Fortsetzung des hier eingeschlagenen Weges erscheint. Gewiß sind diese Uebungen zunächst als Denkübungen oder Kopfrechenaufgaben gedacht und nützlich. Von den einfachsten anfangend gelangt man zu schwierigeren und komplizierten, und es wird Sache des pädagogischen Taktes sein, herauszufinden, von welchem Schwierigkeitsgrade an die Aufgaben für den Unterricht als nicht mehr fruchtbringend zu bezeichnen sind. Ein großer Teil solcher in den Rechenbüchern angegebenen Aufgaben dürfte nach meiner Erfahrung für den Unterricht nicht mehr rentabel sein, wenn man sie eben weiter nur als reine Denkübungen behandelt; sie überschreiten durchaus das Maß der Anstrengung, das man der Denkfähigkeit der Schüler zumuten kann.

Hier ist meiner Meinung nach der geeignete Punkt, wo man dem Schüler, der an seiner Fähigkeit zu verzweifeln beginnt die Aufgaben weiter zu bewältigen, mit einem neuen Handwerkszeug der Mathematik zu Hilfe kommen kann. Man wird ihm zeigen, wie die mathematischen Zeichen uns in die Lage versetzen, zunächst einmal die Aufgaben, deren Wortlaut zu behalten an sich schwierig ist, schriftlich zu fixieren in einer Form, die die notwendigen und hinreichenden Angaben enthält; man wird ihm weiter an den einfachsten Beispielen zeigen können, wie wir die Operationen, die vorher im Kopfe ausgeführt wurden, nun auch an den schriftlich fixierten Ausdrücken ausführen können, ohne mit den Mängeln unseres Gedächtnisses in Konflikt zu geraten usw. Kurz man wird die Behandlung der Gleichungen an einem Punkte vorbereiten können, wo dem Jungen die Notwendigkeit einer solchen Vermehrung seiner Fähigkeiten durchaus plausibel ist.

Daß durch solche Exkurse das Kopfrechnen nicht eingeschränkt, die Denkarbeit des Schülers nicht verringert werden soll, ist selbstverständlich. Das systematische Kopfrechnen halte ich bis in die Quarta hinein für unbedingt notwendig. Hier soll es sich nur handeln um eine Vorbereitung für ein neues Gebiet, die bei der rechten Gelegenheit durch die Oekonomie des Unterrichts gefordert wird. Solche Momente gehören zu den pädagogisch interessantesten und bieten die reizvollsten Aufgaben, die dem Lehrer gestellt werden können.

Ich komme nun zu der anderen wichtigen Aufgabe, die dem Rechenunterricht gestellt ist, nämlich die, den Schüler für das praktische Leben vorzubereiten. Es kann für den Sachkenner keinem Zweifel unterliegen, daß der mathematische Unterricht, oder besser: der Rechenunterricht im weiteren Sinne neben dem Geschichtsunterricht am allermeisten geeignet ist, der vielgenannten staatsbürgerlichen Erziehung zu dienen; er tut dies, indem er den Schüler in die geldwirtschaftliche Seite unseres modernen Lebens einführt. Geschichts- und mathematischer Unterricht verhalten sich dabei wie Theorie und Praxis: während der erstere auseinandersetzen wird, wie und bis zu welchem Punkte sich die wirtschaftlichen Verhältnisse der Völker und Staaten entwickelt haben; welches die treibenden Ursachen, die wirkenden historischen Kräfte sind und waren, wird der letztere in die wirtschaftlichen Verhältnisse der Gegenwart selbst durch konkrete Beispiele hineinführen. Diese konkreten Aufgaben, die der Schüler selbst behandeln soll, werden ihn nicht nur zwingen in das moderne praktische Leben hineinzusehen, sondern sie werden auch, wenn anders er nicht anormal veranlagt ist, sein Interesse für diese Verhältnisse in hohem Maße wachrufen können. Und wenn wir heutzutage in der Pädagogik allgemein der e i g e n e n Betätigung des Schülers eine hervorragende Bedeutung beimessen, weil sie geeignet ist wie keine zweite Methode in der Entwickelung des Schülers dauernde Werte zu schaffen, so müssen wir auch bei der staatsbürgerlichen Erziehung gerade dieser praktischen Seite eine ganz außerordentliche Wichtigkeit zuerkennen. Daraus folgt, daß die höhere Schule durch derartige Unterweisungen nur eine ihr zukommende erzieherische Pflicht erfüllt. Die Schüler müssen mit dem nötigen Handwerkszeug bewaffnet in das Leben hineintreten, wenn sie von der Schule als reif entlassen werden, sie sollen sich, wenn sie auf sich selbst gestellt werden, zurechtfinden im Labyrinth unserer wirtschaftlichen Verhältnisse, sollen ihr eignes Vermögen nicht nur gut verwalten und erhalten, sondern durch besonnene Verwaltung auch vermehren können, sollen nicht Wucherern in die Hände fallen, die sich ihre Unkenntnis zunutze machen.

Mit diesen Erwägungen knüpfe ich an die vortrefflichen Ausführungen an, die Herr Prof. v. L i l i e n t h a l auf der vorjährigen Versammlung unseres Vereins in Münster gemacht hat.*) In umfassender und klarer Weise hat der Redner damals die Forderung ausgeführt und begründet, daß der mathematische Unterricht mehr als bisher die p o l i t i s c h e A r i t h m e t i k verwerten müsse, und welche erzieherischen Werte in Hinsicht auf das praktische Leben des zukünftigen Staatsbürgers dieses Gebiet zutage fördern könne. Es sei mir gestattet, diese Ausführungen, die damals vom allgemeinen Standpunkte aus, mehr theoretisch, gemacht wurden, nun vom Standpunkte der Schule, d. h. von der praktischen Seite her zu beleuchten. Nebenbei möchte ich bemerken, daß ich den Ausdruck „p o l i t i s c h e A r i t h m e t i k" anzuwenden vermeide, weil er das, was gemeint ist, nicht treffend wiedergibt, und jedenfalls bei dem Nichtfachmann andere Vorstellungen hervorruft als beabsichtigt ist.

Daß man auch früher den Rechenunterricht als gute und notwendige Einführung in das praktische Leben betrachtet hat, ist bekannt. Denn das war ja früher sogar das e i n z i g e Ziel des Rechenunterrichts. Und auch später, da nicht nur die pädagogischen Aufgaben dieses Unterrichts weiter gefaßt, sondern auch der äußere Umfang der Schulmathematik vergrößert wurde, hat man die praktische Seite nicht ganz aus dem Auge verloren. Aber es ist merkwürdig: an dieser Stelle scheint die Entwickelung der pädagogischen Einsicht einen Ruhepunkt gemacht zu haben. In richtiger Erkennt-

*) Vgl. diese Zeitschrift 1911, Nr. 5, S. 81 ff.

nis der in dem Stoffe liegenden Schwierigkeiten meint Herr v. Lilienthal, daß in den unteren Klassen wenig zu machen sein dürfte. Aber gerade diese Unterstufe ist es bisher gewesen, welche auf unseren höheren Schulen das Gebiet der bürgerlichen Rechnungen hauptsächlich, wenn nicht ausschließlich, erledigen sollte. Die preußischen Lehrpläne von 1901 erwähnen derartige Rechnungen nur in IV; zwar beschränken sie die Aufgaben klugerweise auf „die einfachsten Fälle der Prozentrechnung“, aber die durchaus notwendige Vervollständigung in der Oberstufe wird nicht erwähnt. Und dieser Umstand ist verhängnisvoll gewesen; denn die Unterrichtspraxis hat infolgedessen die Beschränkung auf die einfachsten Fälle einfach abgelehnt. Das zeigt nichts deutlicher als die Rechenbücher. Sie stehen samt und sonders auf dem Standpunkte, daß das ganze Gebiet der Rechnungen des bürgerlichen Geschäftsverkehrs hier in das Quartapensum hineingepfropft werden müsse. Schlagen Sie irgend ein Rechenbuch für die IV höherer Lehranstalten auf, und überzeugen Sie sich, daß Sie da zahlreiche Aufgaben finden über Staatspapiere, Obligationen, Pfandbriefe, über Wechseldiskontierung, über Terminrechnung usw. in allen Variationen, selbst Zinseszinsaufgaben fehlen nicht. Ja, meine Herren, sind das die einfachsten Fälle der Prozentrechnung? Hat der normale zwölfjährige Quartaner überhaupt Sinn für solche Verhältnisse? Dabei will ich noch gar nicht von den Aufgaben aus dem spez. kaufmännischen Rechnen reden, wie sie für die U III der Realschulen in den Lehrplänen vorgeschrieben sind; da kann man in den Rechenbüchern ganz erstaunliche Blüten entdecken. Das, was hier der pädagogische Unverstand früherer Zeiten produziert hat, scheint sich wahrhaftig wie eine ewige Krankheit fortzuerben, selbst in unserer Zeit, wo man mit nie ermüdendem Eifer den psychologischen Grundlagen einer gesunden Pädagogik nachspürt.

M. H.! Es ist doch ein anerkannter und bewährter pädagogischer Grundsatz, daß das Neue immer an Bekanntes anknüpfen soll. Hier aber, bei den Rechnungen des bürgerlichen Geldverkehrs in IV, hängt man mit dem Neuen fast ganz in der Luft; jedenfalls ist von dem Vorstellungskreise des Quartaners bis dahin ein so weiter Weg, daß unterwegs der Zusammenhang vollständig verloren geht. Dem Schüler fehlt die durch Gewohnheit lebendig erhaltene Anschauung und Erfahrung, die das Zurechtfinden in einem neuen Gebiete so sehr erleichtern. Aber das ist nur das eine: es fehlt ihm auch die zu diesen Sachen nötige Denkfähigkeit. Verhältnisse, die dem erwachsenen Gebildeten sofort übersehbar sind, wo er mit Hilfe seiner fortgeschrittenen formalen Verstandesbildung das Wesentliche vom Unwesentlichen sofort unterscheiden kann, bieten dem Jungen unüberwindliche Schwierigkeiten, sobald die einfachsten Verhältnisse verlassen werden. Später dagegen verschwinden die Schwierigkeiten häufig von selbst, und gerade das scheint mir zu beweisen, daß man diese bürgerlichen Rechnungsarten an die falsche Stelle gesetzt hat: statt für diese Stoffe einen Zeitpunkt auszusuchen, wo man mit einem Minimum von Aufwand ein Maximum der Leistung erzielen kann, macht mans umgekehrt: man erzielt mit einem Maximum von Aufwand ein Minimum der Leistung. Und das ist eine Sünde gegen die Oekonomie des Unterrichts.

Auch die Meraner Lehrpläne enthalten eine Stelle, die mir zu beweisen scheint, daß man die pädagogischen Schwierigkeiten, die in diesem Punkte liegen, nicht klar genug erkannt hat. Es heißt dort in den „Erläuterungen zum mathematischen Lehrplan“ unter 1. (Rechenunterricht in den Unterklassen): „. . . . Insofern ist der Rechenunterricht vielfach Sachunterricht, soll aber nicht über das hinausgehen, was wir im allgemeinen von einem gebildeten Erwachsenen verlangen“. Ich meine, das, was hier negativ gesagt wird, ist eigentlich selbstverständlich, ja trivial, nämlich, daß man von einem Quartaner nicht mehr Kenntnis und Verständnis für das praktische Leben verlangen dürfe als von einem gebildeten Erwachsenen. Aber jeder im Rechenunterricht erfahrene Pädagoge wird bestätigen, daß man von dem Jungen nicht nur nicht mehr, sondern bei weitem nicht dasselbe verlangen kann wie von einem gebildeten Erwachsenen. Es ist und bleibt ein ganz fruchtloses Bemühen, den Quartaner mit dem Erwachsenen auf gleiche Stufe bringen zu wollen.

Die Meraner Lehrpläne hätten also richtiger sagen müssen, daß das, was man von einem gebildeten Erwachsenen verlangen muß, erst am Schlusse der Schule, auf der Oberstufe, erreicht werden könne und deshalb die Anforderungen in IV bei weitem geringer sein müßten. Und in diesem Sinne wird eine Reform des Rechenunterrichts nachdrücklich stattfinden müssen: das Quartapensum muß von Stoffen befreit werden, die wie störende Fremdkörper wirken, und deren Verarbeitung erst dem gereifteren Verstande zugemutet werden kann.

M. H.! Ich habe bisher von dem Inhalt, dem Stoff der Rechenaufgaben gesprochen: man hat es versäumt, diesen Stoff dem kindlichen Geiste anzupassen. Dasselbe gilt aber auch von der Form, von der Darstellung der Aufgaben. Es hat gewiß viel für sich, wenn gefordert wird, daß die Aufgaben des Unterrichts aus dem Leben direkt entnommen, nicht besonders für den Unterricht hergestellt sein sollen. Aber ich meine, man soll doch auch hier nicht das Kind mit dem Bade ausschütten. Will man die Aufgaben aus dem praktischen Leben entnehmen, so ist es eine eigentlich selbstverständliche Forderung, daß man sie erstens nach dem Standpunkte des Schülers auswählt und zweitens die ausgewählten so darstellt, daß sie der Schüler versteht, nicht einfach genau so, wie sie draußen der Kaufmann oder der forschende Mathematiker handhabt. Man bedenke, daß die Sprache des kaufmännischen Verkehrs nicht immer einwandfrei, die mathematische Kürze dem Verständnis des Neulings nicht immer förderlich ist. Der Nichtfachmann hat freilich keine Ahnung, wie die Schüler mit dem Ausdruck zu kämpfen haben, und was ihnen hieraus für Schwierigkeiten in bezug auf das Verständnis erwachsen. Und die eingekleideten Aufgaben sind doch wirklich nicht nur dazu da, um in der Schule erst vom Lehrer erklärt und dann von den Schülern gerechnet zu werden. Sie sollen doch z. T. auch selbständig zu Hause oder in der Schule gelöst werden können.

Will man aber verlangen, daß der Lehrer derartige Aufgaben immer erst vorbereite und zurechtlege, so ist erstens die vom Schüler zu leistende Arbeit häufig sehr gering und unbedeutend, und zweitens wird es dann noch viel weniger möglich sein, auch nur einen Teil der zu behandelnden Gebiete des bürgerlichen Rechnens vorschriftsmäßig zu bewältigen.

Denn ich muß hier noch auf etwas hinweisen, was immer übersehen zu werden scheint und doch einen ganz bestimmenden Einfluß ausüben müßte: das ist die Kürze der in IV für das Rechnen zur Verfügung stehenden Zeit. Nehmen wir als Beispiel die Schulform, die in der Mitte zwischen den Extremen steht, das Reformrealgymnasium. Da hat das Rechnen in VI und V je 5 Wochenstunden, in IV dagegen nur 2, also noch nicht die Hälfte! Und in diesen 2 Wochenstunden soll ein Pensum bewältigt werden, das dem V-Pensum an Umfang kaum nachsteht und außerdem die bereits gekennzeichneten stofflichen Schwierigkeiten in sich birgt! Das ist an sich schon ein unhaltbarer Zustand, und da wird man dann nicht noch verlangen wollen, daß der Lehrer jede Aufgabe in der Schule zergliedert; denn dabei ist der Zeitverlust zu groß und der pädagogische Gewinn zu klein. Abgesehen von den allgemeinen Erläuterungen, die der Lehrer zur Einführung in ein neues Aufgabengebiet natürlich geben muß, müssen also auch aus diesem Grunde die Aufgaben in den Büchern dem Verständnis des Schülers entsprechend dargestellt werden. Eine Reform des Rechenunterrichts wird also als weiteren Punkt ihres Programms eine eingehende Revision der Aufgabentexte vornehmen müssen.

M. H.! Ist nach alledem der Unterricht auf der Unterstufe nicht geeignet, die geldwirtschaftlichen Verhältnisse des praktischen Lebens abschließend zu behandeln, so fragt es sich, wie diese Seite der Erziehung weiter gefördert werden muß.

Zunächst werden wir hier mit dem Begriff „Rechenunterricht“ die eingangs erwähnte Erweiterung vornehmen müssen; wir müssen auch den arithmetischen Unterricht mit hineinziehen; denn der Rechenunterricht im engeren Sinne kann die ihm gestellten Aufgaben, wie gezeigt, allein nicht erfüllen. Die Mittelstufe wird sich im allgemeinen wegen der knapp bemessenen Zeit damit begnügen müssen, das Wenige, was in IV geboten werden konnte, zu erhalten; die Hauptarbeit in der systematischen Erweiterung und Vertiefung wird daher der Oberstufe zufallen. Die Meraner Vorschläge bringen in dieser Hinsicht absolut nichts Neues. Wenigstens daran hätte man denken sollen, im allgemeinen Lehrziel des mathematischen Unterrichts auf die praktische Seite der Ausbildung auf der Oberstufe hinzuweisen. Vielleicht glaubte man, daß die Anwendungen der Zinseszinsrechnung von selbst das nötige Material aus den wirtschaftlichen Verhältnissen des Staatsbürgers liefern müssen. Aber erstens ist dies doch wichtig genug, um im allgemeinen Lehrziel besonders erwähnt zu werden, und dann ist die Praxis dieser Aufgaben, wie man sie z. B. in den Programmen bei den Reifeprüfungen findet, von jeher sehr einseitig gewesen. Sie bewegt sich eigentlich immer nur auf dem Gebiete der Rentenversicherung oder sonstiger direkter Anwendungen der abgeleiteten Formeln. Hier in der Prima bezw. Obersekunda hat aber der Schüler bereits voll ausreichendes Verständnis und auch Interesse für die wirtschaftlichen Aufgaben des täglichen Lebens, hier könnte deshalb mit einem geringen Maße von Sachunterricht außerordentlich viel geleistet werden. Und wenn man mit Recht die Forderung der Unterrichtskommission als bedenklich bezeichnet hat,*) daß man in der Reifeprüfung statt der vier Aufgaben eine größere freiere geben solle, so wäre es wohl der Erwägung wert, ob unter den Aufgaben nicht eine kleinere freie Aufgabe gestellt werden könnte und zwar eben aus dem Gebiete des praktischen Lebens. Ich denke etwa so: es wird gefragt, wie ein Hausbesitzer über die Rentabilität seines Hauses kalkulieren muß unter Berücksichtigung der Grund- und Gebäudesteuer, der Straßenausbaukosten, der Kanalisationsgebühren, der Reparaturen usw., oder man behandelt die Frage, wie eine Gartenstadtgesellschaft eingerichtet ist, welche Vorteile sie ihren Mitgliedern durch Erbbau statt des einfachen Mietverhältnisses gewährt, u. dgl. m.

Man legt hier vielfach so außerordentlich viel Nachdruck auf die Behandlung der Ver-

*) Vgl. die zitierte Direktorenversammlung, S. 96.

sicherungsmathematik. Ich halte das nicht für vorteilhaft, erstens weil die Verhältnisse dabei doch so kompliziert sind, daß sie viel Zeit kosten und auf die Dauer das Primanerinteresse nicht in rechter Weise fesseln können, vor allem aber weil, wie Herr v. Lilienthal schon treffend ausgeführt hat,*) die Einzelrechnungen für den einzelnen wirklich nicht so wichtig sind. Wenn sich jemand versichern will, so wird er kaum in jedem Falle die Rechnungen der einzelnen Gesellschaften durchprüfen. Er hat da das richtige Gefühl, daß sich die Mühe kaum lohnt, und geht einfach nach der öffentlichen Wertschätzung. Im übrigen richtet er den Vertrag so ein, daß er die Prämie ohne Schwierigkeit bezahlen kann. Jedenfalls möchte ich hier die Mahnung des Herrn v. Lilienthal zu möglichster Einschränkung stark unterstreichen.

Solche praktischen Fragen aber, wie ich sie vorhin erwähnte, bieten, wenn sie im Unterricht ab und zu besprochen werden, willkommene Gelegenheit, die Selbsttätigkeit und das Interesse der Schüler zu wecken, indem man sie veranlaßt, die nötigen zahlenmäßigen Unterlagen außerhalb der Schulzeit selbst zusammenzutragen. Dem Sohn des Hausbesitzers ist es ein leichtes, den Kaufpreis, die Mieten, die Reparaturkosten festzustellen; der Sohn des Fabrikdirektors liefert die Unterlagen für die Kalkulation eines Fabrikbetriebes usw. Ein derartiger Unterricht wird in der Schule nicht allzuviel Zeit kosten und doch für die staatsbürgerliche Ausbildung sehr viel leisten.

Und hier ist auch der richtige Zeitpunkt, wo eine Einführung in den modernen Geldverkehr auf fruchtbaren Boden fällt; hier kann man auf Verständnis und lebhaftes Interesse rechnen, wenn man die Bedeutung des Wechsels, des Scheck- und Giroverkehrs auseinandersetzt, wenn man von Staats- und städtischen Anleihen und ihrer Amortisation, von Obligationen und Pfandbriefen redet oder die Bedeutung der Aktiengesellschaften und der Gesellschaften mit beschränkter Haftpflicht beleuchtet.

Freilich werden durch solchen Unterricht auch hohe Anforderungen an den Lehrer gestellt. Ein einseitiger Stubengelehrter wird hierbei nicht am rechten Platze sein; der Lehrer muß selbst im Leben stehen und aus dem Vollen schöpfen können, wenn er hier die Schüler leiten und anregen will. Wenn das nicht der Fall ist, dann nützen alle Lehrpläne und schönen Vorschriften nichts. Hier ganz besonders tritt die pädagogische Tatsache hervor, daß die Persönlichkeit des Lehrers der Grundpfeiler der Erziehung ist.

*) l. c., S. 84.

M. H.! Wenn ich zum Schluß in einigen Thesen das Fazit meiner Ausführungen ziehen darf, so sind es diese:

1. Die Vorbereitung der Arithmetik muß allmählich und zwar möglichst schon von V an geschehen.
2. Die bürgerlichen Rechnungsarten in IV sind nicht nur in gedruckten Lehrplänen, sondern tatsächlich im Unterricht auf die einfachsten Prozentaufgaben zu beschränken.
3. Die Darstellung der Aufgaben muß dem Knabengeiste angepaßt sein.
4. Die abschließende Behandlung der Rechnungen im praktischen Leben und im modernen Geldverkehr muß auf der Oberstufe geschehen.

Wie können Schüler zu selbständigen mathematischen Arbeiten angeregt werden?

Von Hubert Müller (Metz).

An einer Stelle der „Verhandlungen des III. internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg 1904“ ist auf Seite 642 zu lesen:

„Es genügt nicht, daß die Schüler verstehen, was der Lehrer ihnen erklärt; nicht passives Rezipieren, sondern aktive Mitarbeit muß bei jedem Unterricht erreicht werden, die Schüler müssen auf jeder Stufe das freudige Gefühl gewinnen, selbst etwas neues nicht bloß zu wissen, sondern auch zu können. Daher müssen die freien Uebungen — die Aufgaben — im mathematischen Unterricht mehr im Vordergrund stehen als die gemeinsamen Entwicklungen von Lehrern und Schülern.“

Dieser Ausspruch ist zutreffend bis auf den letzten Satz, der die freie Aufgabe als einziges Mittel nennt, mit welchem die Schüler zum eigenen Schaffen zu bringen seien. Wenn dieses Ziel nur durch die freien Aufgaben erreicht werden kann, so wird es überhaupt nicht erreicht, weil die Zahl der freien Aufgaben nicht nach Bedürfnis vermehrt werden kann. Eine solche Vermehrung würde der zusammenhängenden Entwicklung des Lehrstoffes die nötige Zeit rauben und dadurch eine Oberflächlichkeit erzeugen, welche wiederum den freien Aufgaben ihren Wert nähme. Auch ist zu bedenken, daß diejenigen freien Aufgaben, welche man in Prima als Vorbereitung zur Reifeprüfung einstellt, bei der Erziehung zum eigenen Schaffen nicht mitgezählt werden können, weil sie einem anderen Zweck dienen und demgemäß anders behandelt werden.

Es ist unbedingt notwendig, daß die Schüler auch in dem systematischen Unterricht zur eigenen Arbeit herangezogen werden durch Aufgaben, welche nicht frei sind, sondern der Erreichung eines bestimmten Zieles dienen.

Man möchte glauben, daß dafür schon hinlänglich gesorgt sei durch die systematischen Aufgabensammlungen und durch Lehrbücher (z. B. diejenigen über anal. Geom.), welche mit Aufgaben durchsetzt sind. Doch ist damit noch nicht genug geschehen, da die Aufgaben der Sammlungen der Hauptsache nach nicht der Entwicklung, sondern der Einübung des Stoffes dienen und die Aufgaben der Lehrbücher meist zur Lösung durch gemeinsame Entwicklung zwischen Lehrer und Schüler bestimmt sind.

An einer solchen Aufgabe: „Die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse zu finden“ soll die übliche Lehrweise mit einer anderen verglichen werden, welche die Schüler zu eigener Arbeit bringt.

A. Lösung der Aufgabe nach der üblichen Art bei gemeinschaftlicher Entwicklung zwischen Lehrer und Schülern.

Die grundlegenden Gleichungen sind: $l + l' = 2a$ $l^2 = (e + x)^2 + y^2$ und $l'^2 = (e - x)^2 + y^2$. Man kann nun auf verschiedene Weise rechnen:

a) l und l' sind Wurzelausdrücke, die x und y enthalten. Man kann nun erstens sofort diese Ausdrücke für l und l' einsetzen, oder man kann zweitens die Buchstaben l und l' so lange beibehalten, bis man durch Behandlung der Gleichung $l + l' = 2a$ erreicht hat, daß l und l' nur im Quadrat vorkommen.

b) Man kann erstens den einen der Wurzelausdrücke l und l' auf die andere Seite bringen, um nachher zu quadrieren, oder man kann zweitens gleich quadrieren, um nachher das entstehende Produkt $l\,l'$ allein auf eine Seite zu stellen.

Durch Verbindung der Fälle in a) und b) entstehen vier Arten zu rechnen (Entwicklung I bis IV), von welchen die Lehrbücher regelmäßig diejenige (Entwicklung I) bringen, welche entsteht, wenn man in a) und b) jedesmal das erste tut.

Die vier Entwicklungen sind gleichwertig. Bei jeder hat man, wenn auf keiner Seite einer Gleichung mehr als ein Rechengeschäft besorgt wird, elf Gleichungen anzuschreiben, von denen die Lehrbücher nur etwa vier geben, indem jedesmal mehrere Geschäfte besorgt werden.

Der Lehrer wird nun bei der gemeinsamen Entwicklung zwischen Lehrer und Schülern auf die Entwicklung I, welche im Buche steht, zusteuern und diejenigen Beiträge der Schüler zurückweisen, welche auf eine der anderen drei Entwicklungen führen. Ist aber auf die Entwicklung I eingelenkt worden, so zeigt sich eine Schwierigkeit; der Lehrer kann doch nicht bewirken, daß an der Tafel gerade die Gruppe der vier Gleichungen entsteht, welche im Lehrbuche die schrittweise Entwicklung durch elf Gleichungen ersetzt. Es würde ihm schlecht anstehen, das Buch immer in die Hand zu nehmen, und er muß auch die Entwicklung so weiterschreiten lassen, wie sie sich durch die richtigen Vorschläge und Beiträge der Schüler gestaltet. — Die Rechnung wird also ohne Rücksicht auf das Lehrbuch geführt werden. Dabei ergibt sich wohl eine Mitarbeit einzelner Schüler, aber keineswegs ein Selbstarbeiten aller. Das letztere wird auch nicht dadurch erreicht, daß der Gegenstand zur Stellung einer Hausaufgabe benützt wird. In diesem Falle würden nämlich die Schüler das Lehrbuch oder die Nachschrift zu Rate ziehen und das Gedächtnis belasten, wie es immer der Fall ist, wenn es sich um examinierbares Wissen handelt.

B. Lösung der Aufgabe durch Zerlegung in drei kleinere, welche durch die Schüler allein zu lösen sind. Die Aufgaben lauten:

1. Die Quadrate l^2 und l'^2 der Leitstrahlen, sowie $l^2 + l'^2$ und $l^2 - l'^2$ durch x, y, a, e auszudrücken.

2. Die Gleichungen $l^2 - l'^2 = 4ex$ und $l + l' = 2a$, welche für die Leitstrahlen eines Ellipsenpunktes gelten, nach l und l' aufzulösen.

3. Aus der Gleichung $l = a + \frac{ex}{a}$ (Auflösung zu 2) finde man die Gleichung der Ellipse durch Einsetzen des Wertes für l aus 1., Wegschaffen der Wurzel usw.

Diese Aufgaben sind so kurz und leicht, daß sie auch von den schwächeren Schülern ohne Hilfe gelöst werden. Durch sie bekommt das Ganze Gliederung und feste Form, so daß es als deutliches Bild vor den Augen steht. Nebenbei sind die beiden ersten Aufgaben noch in anderer Weise nützlich: die Gleichungen für $l^2 + l'^2$ und $l^2 - l'^2$ sind diejenigen zweier geom. Oerter und die Gleichungen für l und l' in 2. sind viel gebrauchte, welche an einer anderen Stelle aufgestellt werden müßten, wenn sie nicht hier abgeleitet würden.

Wie es an diesem Beispiele gezeigt ist, so lassen sich auch in allen Teilen des mathematischen Stoffes Lehrsätze und Beweise, Entwicklungen und Aufgaben nach dem Grundsatze „Teile und herrsche“ so behandeln, daß die Schüler eigene Arbeit verrichten. Daß diese Arbeiten leicht und kurz sind, ist ein großer Vorteil und eine Notwendigkeit. Bei einer freien Aufgabe kann es wohl vorkommen, daß die meisten Schüler versagen; bei den Aufgaben jedoch, welche dem Aufbau des Systems dienen sollen, muß dieses ausgeschlossen sein, weil hier auch der Durchschnittsschüler nicht zurückbleiben darf. Gerade durch die leichten Aufgaben können die Schüler Lust und Selbstvertrauen bekommen, so daß sie an die schwereren freien Aufgaben mit Zuversicht heranzutreten vermögen.

Es ist aber auch vor einem Unterschätzen oder Zurückdrängen der so nützlichen „Entwicklungen zwischen Lehrer und Schülern“ zu warnen. Sogar bei der nach dem Zeichen B behandelten Lösung wäre es sehr vorteilhaft, nach Lösung der kleinen Aufgabe 1 und der Auffindung von

$$l^2 = (e + x)^2 + y^2,\ l'^2 = (e - x)^2 + y^2$$

mit den Schülern über das Einsetzen der Wurzelausdrücke l und l' in die Gleichung $l + l' = 2$ zu verhandeln und die Entwicklungen I bis IV (unter A) zu besprechen, ohne jedoch diese Entwicklungen durchzuführen. Die besten Schüler würden sich dadurch wohl zu dieser Durchführung anregen lassen, ohne daß dieselbe von allen Schülern verlangt wird. Dabei könnte noch bemerkt werden, daß auch mit der für $l^2 + l'^2$ gefundenen Gleichung eine Aufstellung der Ellipsengleichung gegeben werden kann, welche einer der Entwicklungen I bis IV (unter A) gleicht, daß aber die Verwendung von $l^2 - l'^2 = 4ex$ das beste Mittel zur Erleichterung der Aufgabe bietet. Der Schüler lernt dann auch verstehen, daß es manchmal nützlich sein kann, wenn man nicht sofort darauf losrechnet, sondern zuerst eine kleine Umschau hält.

Ueber eine Sterbetafel für den Unterricht.

Von R. Gerhardt (Potsdam).

Unter der großen Zahl der heute vorhandenen deutschen und ausländischen Sterblichkeitstafeln unterscheidet man Rentnertafeln und Todesfalltafeln, die aus den Erfahrungen der Versicherungsgesellschaften abgeleitet sind, und allgemeine Bevölkerungstafeln, die der Statistik über das Absterben einer ganzen Bevölkerung entstammen. Der Versicherungsmathematiker muß, je nachdem ob er Erlebensfall- und Rentenzahlungen zu bestimmen, oder ob er es mit der Versicherung von normalen Leben mit vollständiger ärztlichen Untersuchung zu tun hat, oder ob er Volks- und Begräbnisgeldversicherung bearbeitet, die ihm geeignet erscheinende Wahl aus ihnen treffen. Wenn es sich nun darum handelt, dem Schüler unserer höheren Lehranstalten bei der Einführung in die Versicherungstechnik eine Sterbetafel in die Hand zu geben, so wird es, obgleich dieser Punkt nicht der wichtigste ist, doch angezeigt erscheinen, einige Erwägungen zur Wahl einer Tafel anzustellen.

In erster Linie wäre zu fordern, daß wir eine deutsche Tafel wählen, die vom Alter 0 bis 100 durchgeführt und einheitlich konstruiert ist. Solche sind die Rentnertafeln. Doch sie sind Spezialtafeln, und wir können deshalb von ihnen füglich absehen. Die deutschen Todesfalltafeln sind nicht vollständig. Denn Personen unter 20 Jahren und über 90 Jahre waren an dem zur Bearbeitung dienenden Material wenig beteiligt. Darum müßten die fehlenden Zahlen mit Hilfe anderer deutschen Tafeln (Rentner- oder Bevölkerungstafeln) ergänzt werden. Ob das wünschenswert erscheint, wird folgende Betrachtung ergeben. Von den neuesten Todesfalltafeln, wie die der Gothaer (Karup) und der Leipziger (Höckner), wollen wir absehen, weil auch sie Spezialtafeln sind, die nur für die eigene Gesellschaft volle Gültigkeit haben. Wir wollen die vielfach gebrauchten Tafeln der 23 deutschen Gesellschaften mit der neuen allgemeinen deutschen Sterbetafel (1891/1900), der sogenannten Reichstafel, vergleichen. Die Männertafel I (mit ärztlicher Auslese)

Allgemeine Deutsche Sterbetafel für Männer (1871/81) [3 1/2 %].

Alter x	Anzahl der Lebenden l_x	$D_x = v^x \cdot l_x$	$\Sigma D_x = N_x$	Anzahl der Toten $l_x - l_{x+1} = d_x$	$C_x = v^{x+1} \cdot d_x$	$\Sigma C_x = M_x$	Alter x	Anzahl der Lebenden l_x	$D_x = v^x \cdot l_x$	$\Sigma D_x = N_x$	Anzahl der Toten $l_x - l_{x+1} = d_x$	$C_x = v^{x+1} \cdot d_x$	$\Sigma C_x = M_x$
0	100 000	100 000	1 581 697	25 273	24 418	46 513							
1	74 727	72 200	1 481 697	4 851	4 528.5	22 094.5	51	40 343	6 979.3	88 681	910	152.10	3980.4
2	69 876	65 230	1 409 497	2 319	2 091.6	17 566.0	52	39 433	6 591.2	81 702	936	151.16	3828.3
3	67 557	60 933	1 344 267	1 560	1 359.4	15 474.3	53	38 497	6 217.1	75 110	963	150.26	3677.1
4	65 997	57 513	1 283 334	1 126	948.06	14 114.9	54	37 534	5 856.6	68 893	990	149.25	3526.9
5	64 871	54 620	1 225 821	843	685.78	13 166.9	55	36 544	5 509.3	63 037	1 020	148.57	3377.7
6	64 028	52 087	1 171 201	659	517.97	12 481.1	56	35 524	5 174.5	57 527	1 050	147.77	3229.1
7	63 369	49 807	1 119 114	520	394 89	11 963.1	57	34 474	4 851.7	52 353	1 082	147.13	3081.3
8	62 849	47 728	1 069 307	418	306.70	11 568.2	58	33 392	4 540.5	47 501	1 116	146.62	2934.1
9	62 431	45 808	1 021 579	342	242.45	11 261.5	59	32 276	4 240.4	42 961	1 152	146.23	2787.5
10	62 089	44 016	975 771	289	197.95	11 019.1	60	31 124	3 950.7	38 720	1 189	145.82	2641.3
11	61 800	42 330	931 755	253	167.43	10 821.1	61	29 935	3 671.3	34 770	1 227	145 39	2495.5
12	61 547	40 731	889 425	227	145.14	10 653.7	62	28 708	3 401.8	31 098	1 266	144.94	2350.1
13	61 320	39 208	848 694	212	130.97	10 508.6	63	27 442	3 141.8	27 697	1 303	144.13	2205.2
14	61 108	37 751	809 486	216	128.93	10 377.6	64	26 139	2 891.4	24 555	1 337	142.89	2061.1
15	60 892	36 346	771 735	235	135.53	10 248.7	65	24 802	2 650.7	21 663	1 369	141.36	1918.2
16	60 657	34 981	735 389	274	152.67	10 113.2	66	23 433	2 419.7	19 013	1 396	139.28	1776.8
17	60 383	33 646	700 408	320	172.28	9 960.5	67	22 037	2 198.6	16 593	1 417	136.59	1637.5
18	60 063	32 336	666 762	367	190.90	9 788.2	68	20 620	1 987.7	14 394	1 431	133.28	1500.9
19	59 696	31 051	634 426	409	205.55	9 597.3	69	19 189	1 787.2	12 407	1 439	129.49	1367.6
20	59 287	29 796	603 375	444	215.59	9 391.7	70	17 750	1 597.3	10 619	1 440	125.20	1238.2
21	58 843	28 572	573 579	474	222 38	9 176.1	71	16 310	1 418.1	9 022.1	1 430	120.12	1113.0
22	58 369	27 384	545 007	498	225.74	8 953.7	72	14 880	1 250.0	7 604.0	1 412	114.60	992.83
23	57 871	26 232	517 623	493	215.91	8 728.0	73	13 468	1 093.1	6 354.0	1 383	108.45	878.23
24	57 378	25 129	491 391	486	205.65	8 512.1	74	12 085	947.70	5 260.9	1 342	101.68	769.78
25	56 892	24 074	466 262	482	197.06	8 306.4	75	10 743	813.96	4 313.2	1 289	94.36	668.10
26	56 410	23 063	442 188	483	190.79	8 109.4	76	9 454	692.07	3 499.2	1 226	86.71	573.74
27	55 927	22 092	419 125	485	185.10	7 918.6	77	8 228	581.96	2 807.2	1 151	78.66	487 02
28	55 442	21 160	397 033	491	181.06	7 733.5	78	7 077	483.62	2 225.2	1 067	70.45	408.37
29	54 951	20 263	375 873	497	177.07	7 552.4	79	6 010	396.82	1 741.6	975	62.20	337.92
30	54 454	19 401	355 610	505	173.84	7 375.4	80	5 035	321.20	1 344.8	879	54.18	275.72
31	53 949	18 571	336 209	515	171.28	7 201.5	81	4 156	256.16	1 023.6	778	46.33	221.54
32	53 434	17 772	317 638	526	169 03	7 030.2	82	3 378	201.17	767.41	678	39.01	175.21
33	52 908	17 002	299 866	539	167.35	6 861.2	83	2 700	155.35	566.24	580	32.24	136.20
34	52 369	16 259	282 864	554	166.19	6 693.9	84	2 120	117.86	410.89	485	26.05	103.96
35	51 815	15 543	266 605	571	165.49	6 527.7	85	1 635	87.82	293.03	399	20.71	77.91
36	51 244	14 852	251 062	588	164.66	6 362.2	86	1 236	64.14	205.21	319	15.99	57.200
37	50 656	14 185	236 210	607	164.23	6 197.5	87	917	45.98	141.07	251	12.16	41.209
38	50 049	13 542	222 025	627	163.91	6 033.3	88	666	32.26	95.094	192	8.987	29.049
39	49 422	12 920	208 483	647	163.41	5 869.4	89	474	22.19	62.834	144	6.512	20.062
40	48 775	12 319	195 563	665	162.28	5 706.0	90	330	14.92	40.644	105	4.588	13.550
41	48 110	11 740	183 244	682	160.80	5 543.7	91	225	9.831	25.724	75	3.166	8.962
42	47 428	11 183	171 504	699	159.24	5 382.9	92	150	6.333	15.893	53	2.162	5.795
43	46 729	10 645	160 321	719	158.25	5 223.7	93	97	3.957	9.560	36	1.419	3.634
44	46 010	10 127	149 676	738	156.94	5 065.4	94	61	2.404	5.603	23	0.8758	2.215
45	45 272	9 627.6	139 549	761	156.36	4 908.5	95	38	1.447	3.199	15	0.5518	1.339
46	44 511	9 145.6	129 921	783	155.44	4 752.1	96	23	0.8461	1.7524	10	0.3555	0.7871
47	43 728	8 680.9	120 776	809	155.17	4 596.7	97	13	0.4621	0.9063	6	0.2061	0.4317
48	42 919	8 232.2	112 095	833	154.37	4 441.5	98	7	0.2507	0.4442	3	0.0995	0.2256
49	42 086	7 799.4	103 862	858	153.63	4 287.1	99	4	0.1294	0.1935	2	0.0641	0.1261
50	41 228	7 382.1	96 063	885	153.10	4 133.5	100	2	0.0641	0.0641	2	0.0620	0.0620

der ersteren zeigt bis zum Alter 70 höhere Sterbenswahrscheinlichkeiten als die entsprechende Reichstafel. Erst in den höheren Altern werden hier die Sterblichkeitsquoten größer als dort. Die Männertafel III (ohne genaue ärztliche Auslese) der deutschen Gesellschaften zeigt sogar bis zum Alter 84 höhere Sterblichkeitsquoten als die Männer-Reichstafel. Aehnliches findet man bei der Vergleichung der Männer-Reichstafel mit den deutschen Tafeln I und III für beide Geschlechter. Die Tafeln der 23 deutschen Gesellschaften erscheinen also fast als allgemeine Bevölkerungstafeln, d. h. wie Tafeln ohne jede ärztliche Auslese. Daher streben auch heute die deutschen Gesellschaften nach Herstellung einer neuen brauchbareren Tafel. In seinem Bericht über die Vorarbeiten hierzu sagt Direktor Dr. Schmerler: „Man kann gewiß sagen, daß es durchaus wünschenswert ist, daß die Rechnungsgrundlagen der deutschen Gesellschaften an der Hand der neuen Erfahrungen*) einer eingehenden Prüfung unterzogen werden". Das scheint Grund genug, von der Anwendung einer solchen Todesfalltafel absehen zu können.

Nun erscheint aber andererseits die Reichstafel (1891/1900) wie eine Tafel mit normalen Leben mit vollständiger ärztlichen Untersuchung. Deshalb möchte auch sie für die Schule abzulehnen sein, wenn man folgende Begründung gelten läßt. Für diesen oder jenen unserer Schüler besteht die Möglichkeit, daß er im praktischen Leben Gelegenheit bekommt, eine Sterbekasse zu prüfen. Solche Kassen enthalten nur eine sehr beschränkte Zahl von Mitgliedern. Zwar verzinsen sich ihre Gelder wohl meist über $3\frac{1}{2}\%$, aber für eine so kleine Zahl von Mitgliedern wird der vorsichtige Mathematiker nicht die so günstige Reichstafel (1891/1900), sondern die ältere Reichstafel (1871/81) für Männer mit $3\frac{1}{2}\%$ Verzinsung als Rechnungsgrundlagen verwenden. Sie ist vom Alter 0 bis 100 einheitlich konstruiert, zeigt bis zum Alter 64 nur geringe Unterschiede in den Sterblichkeitsquoten gegen die Männertafeln I und III der 23 deutschen Gesellschaften, in den höheren, gefährdeteren Altern aber wesentlich höhere Quoten, wie man es von einer Bevölkerungstafel bei dem Fehlen jeglicher ärztlichen Auslese erwarten sollte. Sie bietet somit rechnerisch volle Sicherheit für die nötige Deckung der Sterbefälle. Sie ist also dem Schüler auch für praktischen Gebrauch zu empfehlen. Sie wurde schon 1903 von Schülke empfohlen. Daher möge hier die Tafel der zugehörigen Grundzahlen folgen.

Anmerkung nach Corneille L. Landré: „Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung" und Dr. S. E. Gubler: „Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra". Die nach dem einstimmigen Beschluß des II. internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft in London 1898 (auch von Karup) empfohlene gemeinsame Bezeichnungsweise in der Versicherungstechnik ist, soweit sie die Schule interessiert, folgende:

$i = \frac{p}{100}$, wenn $p =$ Zinsfuß für 100;

$v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+\frac{p}{100}} = \frac{1}{q}$ dem Abzinsungsfaktor;

$x =$ Alter, Zahl der vollendeten Lebensjahre, einer Person;

$(x) =$ einer Person vom Alter x;

$l_x =$ Zahl der Lebenden vom Alter x;

$d_x = l_x - l_{x+1} =$ Zahl der Gestorbenen zwischen den Altersstufen x und $x+1$;

$D_x = v^x \cdot l_x$, die diskontierte Zahl der Lebenden;

$N_x = \Sigma D_x$;

$C_x = v^{x+1} \cdot d_x$, die diskontierte Zahl der Toten;

$M_x = \Sigma C_x$;

$a_x =$ gegenwärtigem Wert $=$ Barwert einer vorschüssigen Leibrente im Betrage 1 für (x);

$a_x = a_x - 1 =$ Barwert einer nachschüssigen Leibrente im Betrage 1 für (x);

$A_x =$ Barwert der Versicherung im Betrage 1, zahlbar am Ende des Jahres, in dem (x) stirbt;

$P_x =$ Jahresprämie;

${}_nE_x =$ Barwert der Versicherung im Betrage 1, zahlbar am Ende des n. Versicherungsjahres im Erlebensfall;

${}_na_x =$ Barwert einer um n Jahre aufgeschobenen vorschüssigen Leibrente im Betrage 1;

$a_{x\overline{n|}} =$ Barwert der Zeitrente im Betrage 1, die bis zum n. Versicherungsjahre vorschüssig zahlbar ist;

$V_x =$ Prämienreserve.

*) Berücksichtigung der Heredität, der Vorerkrankungen und besonderer Risikoklassen.

Quadrattafel der Zahlen von 1 bis 1000.

Von Dr. Th. Arldt (Radeberg).

Bekanntlich läßt sich leicht eine Tafel der Quadratzahlen durch fortlaufende Addition aufstellen. Da $(n+1)^2 = n^2 + n + (n+1)$ ist, so haben wir nur, um aus einem Quadrate das nächste zu finden, die beiden betreffenden Wurzeln zu ihm zu addieren. Diese Tafel läßt sich aber beträchtlich vereinfachen und übersichtlicher gestalten, da die letzten Ziffern sich periodisch wiederholen, so die Einer nach zehn Gliedern, da $(n+10)^2 - n^2 = 10\,(2n+10)$; die beiden letzten Stellen nach 50 Gliedern, da $(n+50)^2 - n^2 = 100\,(n+25)$; die drei letzten Stellen nach 500 Gliedern, da $(n+500)^2 - n^2 = 1000\,(n+250)$. Die erste Beziehung bringt eine zu geringe Vereinfachung der Tafeln, die letzte umfaßt einen zu großen Zahlenbereich, dagegen ist die zweite geeignet für die Herstellung einer übersichtlichen Tafel der ersten tausend Quadratzahlen, wie sie, aus praktischen Gründen in zwei Teile zerlegt, diesen Ausführungen beigegeben ist. Die Zahlen nehmen hier ein Minimum von Raum ein, das sich nur auf Kosten der Uebersichtlichkeit noch etwas einschränken ließe. In der angegebenen Form finden sie bei deutlich lesbarer Schrift bequem auf einer Quartseite Platz.

Die Einrichtung der Tafel ist derart getroffen, daß in der ersten und der Bequemlichkeit halber auch in der letzten Spalte die Einer und Zehner der Wurzeln stehen, am Kopfe jeder Spalte dagegen die Hunderter. In diesen Spalten nun stehen aber von den Quadratzahlen nur die Hunderter und die ihnen vorausgehenden Stellen, während die beiden letzten periodisch nach 50 Gliedern wiederkehrenden Stellen in eine besondere Spalte mit dem Kopfe ZE verwiesen sind. Dadurch, daß Hundert- und Zehntausender nur bei ihrem ersten Auftreten angegeben sind, wird die Tafel noch übersichtlicher. Das Aufsuchen der Quadrate aller ein- bis dreistelligen Zahlen ist hiernach sehr einfach. Wir suchen zunächst die betr. Hunderterspalte auf, gehen in ihr bis zur betreffenden Zeile herunter und fügen an die hier stehende Zahl die in der ZE-Spalte stehende

Zahl der gleichen Zeile an. Suchen wir z. B. 827^2, so finden wir unter 800 in der Zeile 27 6839, in der gleichen Zeile unter *ZE* 29, das Quadrat ist also 683 929. Oder wollen wir 578^2 aufsuchen, so liefert uns die Spalte 500 und Zeile 78 den Wert 334 084.

Handelt es sich um die Aufsuchung von Quadraten von mehr als dreistelligen Zahlen, so kann auch hier die Tafel die Rechnung beträchtlich verkürzen und uns mindestens das Schreiben einer beträchtlichen Reihe von Zahlen ersparen. Da das Quadrat einer n-stelligen Zahl stets $2n$ oder $2n-1$ Stellen besitzt, so haben wir einfach an das aus der Tafel entnommene Quadrat der von den drei ersten Ziffern gebildeten Zahl das Quadrat der von den folgenden Ziffern gebildeten anzufügen und dann nur noch das doppelte Produkt beider Zahlen zu berechnen und hinzuzufügen, nach der Formel $(a \cdot 10^n + b)^2 = a^2 \cdot 10^{2n} + b^2 + 2ab \cdot 10^n$. So finden wir:

$$6543^2 = 427\,716 \mid 09 + 6 \cdot 6540 = 42'\,810\,849$$

$$654321^2 = 427\,716 \mid 103\,041 + 642 \cdot 654\,000 = \\ = 428\,135'\,971\,041.$$

Bei dem zweiten Beispiele haben wir statt der sonst nötigen 36 Multiplikationen und mindestens 25 Additionen nur 9 Multiplikationen und 9 Additionen auszuführen, bei fünfstelligen Zahlen statt 25 nur 6 Multiplikationen, statt 16 nur 5 Additionen, bei vierstelligen statt 16 nur 3 Multiplikationen, statt 9 nur 3 Additionen, allgemein bei n-stelligen Zahlen statt n^2 Multiplikationen nur $(n-3)^2$, statt $(n-1)^2$ Additionen nur $(n-4)^2 + (n-1) = n^2 - 7n + 15$, also $6n - 9$ Multiplikationen und $5n - 14$ Additionen weniger.

In besonders günstigen Fällen, wie in dem sechsstelligen Beispiele, kann man sogar bei der Multiplikation von $2ab$ die Tafeln benutzen und dadurch die Rechnung vereinfachen, ist doch $642 \cdot 654 = 642^2 + 12 \cdot 642$, wo wir den ersten Wert der Tafel entnehmen können $= 412\,164$, so daß wir nur die einfache zweite Multiplikation auszuführen brauchen. Diese Anwendung der Tafeln bedeutet bei jeder Multiplikation von dreistelligen Zahlen einen Vorteil, sobald die beiden Faktoren um weniger als 100 verschieden sind, da dann nur noch die kleinere Zahl mit einer zweistelligen Zahl multipliziert werden muß. Je geringer die Differenz der Zahlen ist, um so mehr wird natürlich die Rechnung vereinfacht. Suchen wir z. B. $765 \cdot 755$, so zerlegen wir dies in $755^2 + 10 \cdot 755$; davon liefert uns die Tafel den ersten Wert 570 025, wozu noch 7550 zu addieren sind, was 577 575 als Resultat ergibt. Immerhin ist diese Anwendung der Tafel nur in einem geringeren Prozentsatze der in Frage kommenden Aufgaben möglich, rund in 10 % derselben.

Dagegen lassen sich die Tafeln in etwas anderer Weise bei 50 % aller Multiplikationsaufgaben verwenden, nämlich wenn beide Faktoren zugleich geradzahlig oder ungeradzahlig sind, wenn also ihre Differenz eine gerade Zahl ist. Da nämlich $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ ist, so brauchen wir von den beiden Zahlen nur die halbe Summe und Differenz zu berechnen, was man meist im Kopfe ausführen kann, deren Quadrate aufzusuchen und zu subtrahieren. Wenn der Vorteil dabei auch nicht gerade sehr groß ist, so ist die Rechnung doch wenigstens etwas vereinfacht. So ist z. B. $654 \cdot 432 = 543^2 - 111^2 = 294\,849 - 12\,321 = 282\,528$.

Selbstverständlich kommen diese Anwendungen der Tafel zu Multiplikationen nur in zweiter Linie, ihr Hauptwert besteht in der schnellen Ausführung von Quadrierungen, die ja im Gesamtgebiete der Mathematik und ihrer Anwendungen ziemlich oft vorkommen. Ebenso anwendbar ist die Tafel aber auch beim Quadratwurzelziehen, indem sie sofort die ersten drei Stellen liefert. Wir müssen nur in der Tafel die nächst kleinere Quadratzahl aufsuchen. Suchen wir z. B. $\sqrt{987654}$, so finden wir 986049 als Quadrat von 993, wir können also die Rechnung wie folgt unter Anwendung der abgekürzten Rechnung auf 6 Stellen ausführen:

$$\begin{array}{r l} \sqrt{987654} & = 993{,}808 \\ 986049 & \\ \hline 1605 & \\ 16. & \end{array}$$

Suchen wir $\sqrt{2}$, so gehen wir von der vor 20 000 stehenden Quadratzahl aus:

$$\begin{array}{r l} \sqrt{2} & = 1{,}4142 \\ 19881 & \\ \hline 119 & \\ 6 & \end{array}$$

Auch beim Quadratwurzelziehen kann also die Tafel gute Dienste leisten.

Neben dieser praktischen Verwertung der Tafel ist sie aber auch dadurch nicht ohne Interesse, daß auf ihr eine Reihe von Beziehungen der Quadratzahlen besonders leicht zu erkennen sind. Betrachten wir nämlich die in den Spalten stehenden Werte, also die Quadratzahlen ohne ihre Zehner und Einer, so sehen wir, daß deren Anwachsen in allen Spalten durchaus gleichmäßig erfolgt. In jeder Spalte, die auf die Zahl $50n$ folgt, ist jede Hunderterzahl um n größer als die vorhergehende, wenn die gleichen Zeilen in der ersten Spalte um 0 differieren, dagegen um $n+1$, wenn dort die Differenz 1 beträgt. Man vergleiche:

$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 5$
$23^2 = 529$	$73^2 = 5329$	$123^2 = 15129$	$273^2 = 74529$
$24^2 = 576$	$74^2 = 5476$	$124^2 = 15376$	$274^2 = 75076$
$25^2 = 625$	$75^2 = 5625$	$125^2 = 15625$	$275^2 = 75625$

Von 500^2 an wiederholen sich, wie schon erwähnt, die Hunderterzahlen. Die Tausender wachsen hier um 1, wenn sie bei den ersten 500 Quadratzahlen nicht wachsen, um 2, wenn sie dort um eins zunehmen. Entsprechendes würde sich bei einer Fortsetzung der Tafel über 1000^2 hinaus ergeben, wo z. B. bis 1500^2 die Tausender um 2 bez. 3 zunehmen usw., allgemein zwischen $500n$ und $500(n+1)$ um n bezw. $n+1$. Als Beispiel mögen folgende Reihen dienen, die dieses Anwachsen der Tausender zeigen:

$375^2 = 140\,625$	$875^2 = 765\,625$	$1375^2 = 1'890\,625$
$376^2 = 141\,376$	$876^2 = 767\,376$	$1376^2 = 1'893\,376$
$377^2 = 142\,129$	$877^2 = 769\,129$	$1377^2 = 1'896\,129$
$378^2 = 142\,884$	$878^2 = 770\,884$	$1378^2 = 1'898\,884$

Gehen wir nun noch kurz auf einige weitere Beziehungen ein. Zunächst ist es ja allgemein bekannt, daß eine Quadratzahl nie 2, 3, 7 oder 8 Einer haben kann, daß in den Quadraten also nur 60 % aller möglichen Einerzahlen vorkommen. Noch weit beschränkter ist die Zahl der Möglichkeiten bei den beiden letzten Ziffern. Ist nämlich die letzte Ziffer eine 1, 4 oder 9, also eine Quadratzahl, so muß die Zehnerziffer eine gerade Zahl sein, ist sie eine 6, dann eine ungerade, und dazu kommen noch die Zahlen 25 und 00. Dies gibt also nur 22 Endungen und ebensoviel % aller möglichen Fälle. Bei den drei letzten Ziffern bleiben nur 15,9 %, es gibt nämlich bei 1 und 9 Einern je 5, bei 4 und 6 Einern je 10, bei 0 Einern 6, bei 5 Einern 3 Möglichkeiten für die Hunderter, im letzten Falle kommen die Endungen 025, 225 und 625 vor. Bei 1

	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	*ZE*	
1	0	102	404	906	1608	2510	3612	4914	6416	8118	01	1
2		04	08	12	16	20	24	28	32	36	04	2
3		06	12	18	24	30	36	42	48	54	09	3
4		08	16	24	32	70	48	56	64	72	16	4
5		10	20	30	40	50	60	70	80	90	25	5
6		12	24	36	48	60	72	84	96	8208	36	6
7		14	28	42	56	70	84	98	6512	26	49	7
8		16	32	48	64	80	96	5012	28	44	64	8
9		18	36	54	72	90	3708	26	44	62	81	9
10	1	21	41	61	81	2601	21	41	61	81	00	10
11		23	45	67	89	11	33	55	77	99	21	11
12		25	49	73	97	21	45	69	93	8317	44	12
13		27	53	79	1705	31	57	83	6609	35	69	13
14		29	57	85	13	41	69	97	25	53	96	14
15	2	32	62	92	22	52	82	5112	42	72	25	15
16		34	66	98	30	62	94	26	58	90	56	16
17		36	70	1004	38	72	3806	40	74	8408	89	17
18	3	39	75	11	47	83	19	55	91	27	24	18
19		41	79	17	55	93	31	69	6707	45	61	19
20	4	44	84	24	64	2704	44	84	24	64	00	20
21		46	88	30	72	14	56	98	40	82	41	21
22		48	92	36	80	24	68	5212	56	8500	84	22
23	5	51	97	43	89	35	81	27	73	19	29	23
24		53	501	49	97	45	93	41	89	37	76	24
25	6	56	06	56	1806	56	3906	56	6806	56	25	25
26		58	10	62	14	66	18	70	22	74	76	26
27	7	61	15	69	23	77	31	85	39	93	29	27
28		63	19	75	31	87	43	99	55	8611	84	28
29	8	66	24	82	40	98	56	5314	72	30	41	29
30	9	69	29	89	49	2809	69	29	89	49	00	30
31		71	33	95	57	19	81	43	6905	67	61	31
32	10	74	38	1102	66	30	94	58	22	86	24	32
33		76	42	08	74	40	4006	72	38	8704	89	33
34	11	79	47	15	83	51	19	87	55	23	56	34
35	12	82	52	22	92	62	32	5402	72	42	25	35
36		84	56	28	1900	72	44	16	88	60	96	36
37	13	87	61	35	09	83	57	31	7005	79	69	37
38	14	90	66	42	18	94	70	46	22	98	44	38
39	15	93	71	49	27	2905	83	61	39	8817	21	39
40	16	96	76	56	36	16	96	76	56	36	00	40
41		98	80	62	44	26	4108	90	72	54	81	41
42	17	201	85	69	53	37	21	5505	89	73	64	42
43	18	04	90	76	62	48	34	20	7106	92	49	43
44	19	07	95	83	71	59	47	35	23	8911	36	44
45	20	10	600	90	80	70	60	50	40	30	25	45
46	21	13	05	97	89	81	73	65	57	49	16	46
47	22	16	10	1204	98	92	86	80	74	68	09	47
48	23	19	15	11	2007	3003	99	95	91	87	04	48
49	24	22	20	18	16	14	4212	5610	7208	9006	01	49
50	25	225	625	1225	2025	3025	4225	5625	7225	9025	00	50
	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	*ZE*	

	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	*ZE*	
51	26	228	630	1232	2034	3036	4238	5640	7242	9044	01	51
52	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	04	52
53	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	09	53
54	29	37	45	53	61	69	77	85	93	9101	16	54
55	30	40	50	60	70	80	90	5700	7310	20	25	55
56	31	43	55	67	79	91	4303	15	27	39	36	56
57	32	46	60	74	88	3102	16	30	44	58	49	57
58	33	49	65	81	97	13	29	45	61	77	64	58
59	34	52	70	88	2106	24	42	60	78	96	81	59
60	36	56	76	96	16	36	56	76	96	9216	00	60
61	37	59	81	1303	25	47	69	91	7413	35	21	61
62	38	62	86	10	34	58	82	5806	30	54	44	62
63	39	65	91	17	43	69	95	21	47	73	69	63
64	40	68	96	24	52	80	4408	36	64	92	96	64
65	42	72	702	32	62	92	22	52	82	9312	25	65
66	43	75	07	39	71	3203	35	67	99	31	56	66
67	44	78	12	46	80	14	48	82	7516	50	89	67
68	46	82	18	54	90	26	62	98	34	70	24	68
69	47	85	23	61	99	37	75	5913	51	89	61	69
70	49	89	29	69	2209	49	89	29	69	9409	00	70
71	50	92	34	76	18	60	4502	44	86	28	41	71
72	51	95	39	83	27	71	15	59	7603	47	84	72
73	53	99	45	91	37	83	29	75	21	67	29	73
74	54	302	50	98	46	94	42	90	38	86	76	74
75	56	06	56	1406	56	3306	56	6006	56	9506	25	75
76	57	09	61	13	65	17	69	21	73	25	76	76
77	59	13	67	21	75	29	83	37	91	45	29	77
78	60	16	72	28	84	40	96	52	7708	64	84	78
79	62	20	78	36	94	52	4610	68	26	84	41	79
80	64	24	84	44	2304	64	24	84	44	9604	00	80
81	65	27	89	51	13	75	37	99	61	23	61	81
82	67	31	95	59	23	87	51	6115	79	43	24	82
83	68	34	800	66	32	98	64	30	96	62	89	83
84	70	38	06	74	42	3410	78	46	7814	82	56	84
85	72	42	12	82	52	22	92	62	32	9702	25	85
86	73	45	17	89	61	33	4705	77	49	21	96	86
87	75	49	23	97	71	45	19	93	67	41	69	87
88	77	53	29	1505	81	57	33	6209	87	61	44	88
89	79	57	35	13	91	69	47	25	7903	81	21	89
90	81	61	41	21	2401	81	61	41	21	9801	00	90
91	82	64	46	28	10	92	74	56	38	20	81	91
92	84	68	52	36	20	3504	88	72	56	40	64	92
93	86	72	58	44	30	16	4802	88	74	60	49	93
94	88	76	64	52	40	28	16	6304	92	80	36	94
95	90	80	70	60	50	40	30	20	8010	9900	25	95
96	92	84	76	68	60	52	44	36	28	20	16	96
97	94	88	82	76	70	64	58	52	46	40	09	97
98	96	92	88	84	80	76	72	68	64	60	04	98
99	98	96	94	92	90	88	86	84	82	80	01	99
00	100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100	10000	00	00
	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	*ZE*	

und 9 Einern haben wir stets eine geradzahlige Anzahl von Hunderten, wenn die Zehnerzahl durch 4 teilbar ist, sonst eine ungeradzahlige, man vergleiche die Quadratzahlen 19321 und 19881.

Weitere Eigentümlichkeiten zeigen die Horizontalreihen, mögen wir jede Halbtafel für sich betrachten, oder die Spalten der zweiten zwischen die der ersten an der betreffenden Stelle einschieben. Wir sehen, daß die Hunderterzahlen in ihnen durchweg arithmetische Reihen erster Ordnung bilden, deren Differenz zu der Einerzahl der Wurzel in einer einfachen Beziehung steht. Betrachten wir alle Spalten, deren Wurzeln also auf einer Zeile um 50 differieren, so beträgt die Differenz der Hunderter, wie schon erwähnt, $100\,(n+25)$. Sie nimmt also für eine Zahl mit e Einern, also für $n=10z+e$ den Wert an $d=1000\,(z+2)+100\,(e+5)$. Wir haben also die Einerzahl der Wurzeln nur um 5 zu vermehren, so gibt uns die Zahl der erhaltenen Einer die Differenz der Hunderterzahlen der Quadrate an. So beträgt diese z. B. bei 4 Einern der Wurzel, also etwa in den Zeilen 14 bezw. 64, stets 9, bei 7 Einern stets 2, es sind also die Hunderter

bei 14/64: 1, 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 usw.
bei 17/67: 2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, 6, 8, 0, 2 usw.

Besonderes Interesse bieten die Quadrate der Zahlen mit 5 Einern, bei denen die Zahl der Hunderter stets konstant ist, nämlich 0, wenn der 5 eine 0, 4, 5 oder 9 vorangeht, 2 bei 1, 3, 6 und 8, und 6 bei 2 und 7.

Betrachten wir jede Halbtafel für sich, so sind die arithmetischen Reihen noch einfacher. Ihre Differenz ist dann bei e Einern stets $2\,e$, also bei 1 und 6 Einern 2, bei 2 und 7 Einern 4, bei 3 und 8 Einern 6, bei 4 und 9 Einern 8, während bei 5 und 0 Einern die Hunderter stets konstant sind.

Auch die Tausenderzahlen zeigen manche Eigentümlichkeiten, die einer Periode von 100 Gliedern entsprechen. Auch hier haben wir vielfach arithmetische Reihen erster Ordnung, z. B. finden wir als Tausender:

in Zeile 5: 0, 1, 2, 3, ⋯
„ „ 10: 0, 2, 4, 6, ⋯
„ „ 15: 0, 3, 6, 9, ⋯
„ „ 20: 0, 4, 8, 2, ⋯
„ „ 25: 0, 5, 0, 5, ⋯
„ „ 50: 2, 2, 2, 2, ⋯
„ „ 60: 3, 5, 7, 9, ⋯
„ „ 65: 4, 7, 0, 3. ⋯

Diese Reihen finden sich also bei allen Zahlen mit 0 oder 5 Einern. Ist die zweistellige Zahl $5\,n$, so beträgt die Differenz n, in Reihe 50 können also die Tausender überhaupt keine Differenz aufweisen.

Wollten wir alle Spalten in fortlaufender Reihe zusammen betrachten, also wieder von n^2 zu $(n+50)^2$ fortschreiten, so erhalten wir Reihen von verschiedenem Typus, zunächst solche, die abwechselnd um 0 und n fortschreiten, wenn die Zahl am Kopfe der Zeile $5\,n$ ist. So haben wir bei 20/70 die Reihe 0, 4, 4, 8, 8, 2, 2 usw., während wir bei 25/75 um 0 und 5, bei 30/80 um 0 und 6 fortschreiten. Bei 50/100 wechseln 2 und 0 in den Tausendern regelmäßig ab; wieder andere Reihen mit wechselnden Differenzen finden wir bei 10/60: 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6 und ähnlich bei 40, bei 15 oder 35, bei 5 oder 45.

Solcher Beziehungen ließen sich noch manche aus der Tafel herauslesen, es mag aber genügen, wenn wir hier auf die ausgeprägtesten Eigenschaften der Quadratzahlen hingewiesen haben, die zwar an sich nichts neues bieten, aber doch in dieser übersichtlichen Darstellung von besonderem Interesse sind.

Die Binomialreihe.

Von Prof. Milarch in Bonn.

$$(1)\quad (1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \cdots$$

$$(2)\quad (1+x_1)^{\frac{m}{n}} = 1 + Ax_1 + Bx_1^2 + Cx_1^3 + Dx_1^4 + \cdots$$

$$(3)\quad \frac{(1+x)^{\frac{m}{n}} - (1+x_1)^{\frac{m}{n}}}{(1+x) - (1+x_1)} = A + B(x+x_1) + C(x^2+xx_1+x_1^2) + D(x^3+x^2x_1+xx_1^2+x_1^3) + \cdots$$

$$(4)\quad (1+x)^{\frac{1}{n}} = a$$

$$(5)\quad (1+x_1)^{\frac{1}{n}} = a_1$$

$$(6)\quad \frac{a^m - a_1^m}{a^n - a_1^n} = \frac{a-a_1}{a-a_1}\cdot K \qquad K = \frac{a^{m-1} + a^{m-2}a_1 + a^{m-3}a_1^2 + \cdots + a\,a_1^{m-2} + a_1^{m-1}}{a^{n-1} + a^{n-2}a_1 + a^{n-3}a_1^2 + \cdots + a\,a_1^{n-2} + a_1^{n-1}}$$

wird nun $a_1 = a$ gesetzt, so folgt auch $x_1 = x$ und (3) geht über in:

$$(7)\quad \frac{m\cdot a^{m-1}}{n\cdot a^{n-1}} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \cdots$$

$$(8)\quad \frac{m}{n}\cdot a^{m-n} = \frac{m}{n}\cdot(1+x)^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n}(1+x)^{\frac{m}{n}-1} = \frac{m}{n}\cdot\frac{(1+x)^{\frac{m}{n}}}{1+x} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \cdots$$

$$(9)\quad \frac{m}{n}\cdot(1+x)^{\frac{m}{n}} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \cdots + Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + \cdots$$

(1) mit $\frac{m}{n}$ multipliziert.

$$(10)\quad \frac{m}{n}(1+x)^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} + Ax\frac{m}{n} + Bx^2\frac{m}{n} + Cx^3\frac{m}{n} + 4Dx^4\frac{m}{n} + \cdots$$

Aus dem Vergleich der Reihen (9) und (10) folgt:

$$A = \frac{m}{n};\quad 2B + A = A\frac{m}{n};\qquad 3C + 2B = B\frac{m}{n};$$

$$2B = A\left(\frac{m}{n}-1\right);\quad 3C = B\left(\frac{m}{n}-2\right);$$

$$B = \binom{\frac{m}{n}}{2};\qquad C = \binom{\frac{m}{n}}{3};$$

$$4D + 3C = C\cdot\frac{m}{n};$$

$$4D = C\left(\frac{m}{n}-3\right);$$

$$D = \binom{\frac{m}{n}}{4}\cdots$$

in (1) eingesetzt:

$$(11)\quad (1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + \binom{\frac{m}{n}}{1}x + \binom{\frac{m}{n}}{2}x^2 + \binom{\frac{m}{n}}{3}x^3 + \cdots$$

speziell:

$$(12)\quad \left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m} + \frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\frac{n}{m}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\frac{n}{m}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{1}{3!} + \cdots$$

$$(13)\quad \left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{(1-n/m)}{2!} + \frac{(1-n/m)(1-2\cdot n/m)}{3!} + \cdots$$

wird n gegen m unendlich klein, so geht (13) über in:

$$(14)\quad \left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e.$$
$$(n=0)$$

Mit dieser Zahl $e = 2{,}7182818$ hängt zusammen die logarithmische Reihe (für die Basis 10).

$$(15)\quad \log(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \cdots$$

$$(16)\quad \log(1+x_1) = Ax_1 + Bx_1^2 + Cx_1^3 + Dx_1^4 + \cdots$$

$$(17)\quad \frac{\log\frac{1+x}{1+x_1}}{x-x_1} = A + B(x+x_1) + C(x^2 + xx_1 + x_1^2) + {} + D(x^3 + x^2x_1 + xx_1^2 + x_1^3) + \cdots$$

$$(18)\quad \frac{1+x_1}{x-x_1}\cdot\log\left(1 - \frac{1+x_1}{1+x_1} + \frac{1+x}{1+x_1}\right) = (1+x_1)\cdot \left\{A + B(x+x_1) + C(x^2+\cdots) + D(x^3+\cdots) + \cdots\right\}$$

$$(19)\quad \log\left(1 + \frac{x-x_1}{1+x_1}\right)^{\frac{1+x_1}{x-x_1}} = (1+x)(A + B(x+x_1) + C(x^2+\cdots) + D(x^3+\cdots) + \cdots)$$

für $x = x_1$

$$(20)\quad \log e = (1+x)(A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \cdots)$$

$$(21)\quad \log e = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \cdots + Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + D4\cdot x^4 + \cdots$$

$$(22)\quad 0 = (A - \log e) + x(2B + A) + x^2(3C + 2B) + {} + x^3(4D + 3C) + \cdots$$

Daraus folgt:

$$(23)\quad \begin{aligned} &A = \log e; \quad 2B = -A; \quad 3C = -2B; \\ &B = -\frac{\log e}{2}; \quad C = -\frac{\log e}{3}; \\ &4D = -3C; \\ &D = -\frac{\log e}{4}; \end{aligned}$$

in (15) eingesetzt:

$$(24)\quad \log(1+x) = \log e\,x - \log e\frac{x^2}{2} + \log e\frac{x^3}{3} - \log e\frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$(25)\quad \log(1+x) = \log e\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$$

$x = 0{,}024$

$$(26)\quad \log\frac{1024}{1000} = \log e\,P;$$

worin P der Zahlenwert der Klammer für $x = 0{,}024$.

$x = 0{,}25$

$$(27)\quad \log\frac{10}{8} = \log e\,Q;$$

worin Q der Zahlenwert der Klammer für $x = 0{,}25$.

$$(28)\quad 10\log 2 - 3 = \log e\,P$$

$$(29)\quad 1 - 3\log 2 = \log e\,Q$$

$$(30)\quad 30\log 2 - 9 = 3\log e\,P$$

$$(31)\quad 10 - 30\log 2 = 10\log e\,Q$$

$$(32)\quad 1 = \log e\,(3P + 10Q)$$

$$(33)\quad \log e = \frac{1}{3P + 10Q} = M$$

$$(34)\quad \log(1+x) = M\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right).$$

Elementare Ableitung der Reihen für sinus und cosinus.

Von Prof. Milarch (Bonn).

Zur Figur: Bogen $AP = \alpha$, seine Sinuslinie $AA_1 = a$; seine Kosinuslinie $OA_1 = d$, Bogen $BP = \beta$, seine Sinuslinie $BB_1 = b$, seine Kosinuslinie $OB_1 = c$; $\widehat{AM} = \widehat{BM}$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke OMM_1 und ABC folgt:

$$(1)\quad \frac{a-b}{s} = \frac{l}{r} \text{ und } \frac{c-d}{s} = \frac{m}{r}, \text{ für } r = 1$$

$$(2)\quad \frac{a-b}{s} = l \text{ und } \frac{c-d}{s} = m.$$

Unter Zuhilfenahme unbestimmter Koeffizienten sei:

$$(3)\quad a = \alpha - x\alpha^3 + y\alpha^5 - z\alpha^7 + \cdots$$

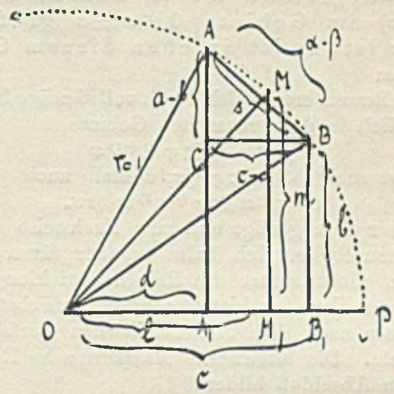
und, weil die Reihe allgemeine Gültigkeit haben soll,

$$(4)\quad b = \beta - x\beta^3 + y\beta^5 - z\beta^7 + \cdots$$

$$(5)\quad a - b = (\alpha - \beta)\left\{1 - x(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + {} + y(\alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 + \beta^4) - z(\alpha^6 + \cdots\beta^6) + \cdots\right\}$$

beiderseits durch s dividiert:

$$(6)\quad l = \frac{\alpha-\beta}{s}\left\{1 - x(\alpha^2 + \cdots) + y\{\alpha^4 + \cdots) - {} - z(\alpha^6 + \cdots) + \cdots\right\}.$$



Rückt nun B nach A, so nähert sich β unendlich an α, l unendlich an d und $\frac{\alpha-\beta}{s}$ unendlich an 1, mithin beim Uebergang zur Grenze:

$$(7)\quad d = 1 - 3x\alpha^2 + 5y\alpha^4 - 7z\alpha^6 + \cdots$$

und, weil die Reihe allgemeine Gültigkeit haben soll:

$$(8)\quad c = 1 - 3x\beta^2 + 5y\beta^4 - 7z\beta^6 + \cdots$$

$$(9)\quad c - d = (\alpha - \beta)\left\{3x(\alpha+\beta) - 5y(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3) + {} + 7z(\alpha^5 + \cdots\beta^5) - \cdots\right\}$$

beiderseits durch s dividiert:

$$(10)\quad m = \frac{\alpha-\beta}{s}\left\{3x(\alpha+\beta) - 5y(\alpha^3 + \cdots) + 7z(\alpha^5 + \cdots) - \cdots\right\}$$

wie oben beim Uebergang zur Grenze, wenn B nach A rückt:

$$(11)\quad a = 2\cdot 3x\alpha - 4\cdot 5y\alpha^3 + 6\cdot 7z\cdot\alpha^5 - \cdots$$

$$(3)\quad a = \alpha - x\alpha^3 + y\alpha^5 - z\alpha^7 + \cdots$$

Aus dem Vergleich der Reihen (11) und (3) folgt:

$$(12)\quad 2\cdot 3x = 1; \quad 4\cdot 5y = x; \quad 6\cdot 7z = y$$

$$x = \frac{1}{3!}; \quad y = \frac{1}{5!}; \quad z = \frac{1}{7!}$$

usw. eingesetzt in (3) und (7)

$$(13)\quad \alpha; \quad a = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \cdots \text{ und}$$

$$(13\text{b})\quad d = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \cdots$$

Kleinere Mitteilungen.

Ableitung der Maclaurinschen Reihe.

Von Prof. Dane (Mayen, Rheinland).

Wenn ein Schüler mit der graphischen Darstellung der Funktion hinreichend vertraut ist, so erscheint ihm der folgende Satz als selbstverständlich (übrigens macht auch eine strengere Begründung keine Schwierigkeiten).

Wenn zwei Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ für $x = 0$ gleiche Werte haben, $f'(x)$ aber in dem ganzen Gebiete $0 \leqq x \leqq a$ überall größer als $\varphi'(x)$ ist, so ist in eben diesem Gebiete $f(x) \geqq \varphi(x)$.

Da $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ ebenfalls Funktionen von x sind, so gilt ebenso der Satz: Wenn $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ für $x=0$ gleiche Werte haben, $f''(x)$ aber in dem ganzen Gebiete $0 \leqq x \leqq a$ größer (oder gleich) $\varphi''(x)$ ist, so ist in eben diesem Gebiete $f'x \geqq \varphi' x$.

Daraus ergibt sich:

Wenn zwei Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ sowie ihre ersten n-Differentialquotienten für $x=0$ gleiche Werte haben, während $f^{(n+1)}(x)$ im Gebiete $0 \leqq x \leqq a$ größer als $\varphi^{(n+1)} x$ ist, so ist in eben diesem Gebiete $fx \geqq \varphi x$.

Der Beweis ergibt sich durch vollständige Induktion. Da nämlich in dem genannten Gebiete

$$f^{(n+1)} x \geqq \varphi^{(n+1)} x$$

ist, so ist auch $f^{(n)} x \geqq \varphi^{n} x$, deshalb auch

$$f^{(n-1)} x \geqq \varphi^{(n-1)} x \text{ usw.}$$

Dieser Satz genügt nun zum Nachweise der Maclaurinschen Reihe. Ich halte es aber für methodisch richtiger, nicht sofort die Reihenentwicklung in der allgemeinen Form zu bieten, sondern zunächst einzelne Funktionen nach dem „Maclaurinschen Verfahren" zu entwickeln. Die allgemeine Maclaurinsche Reihe mag dann den Abschluß bilden.

Als Beispiel wähle ich $\sin x$.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, eine ganze Funktion 20. Grades $f(x)$ mit folgenden Eigenschaften zu finden:

1. Für $x=0$ wird $f(x)$ [ebenso wie $\sin x$] zu 0.
2. Alle Differentialquotienten vom ersten bis zum neunzehnten stimmen für $x=0$ mit den entsprechenden von $\sin x$ überein.
3. $f^{(20)} x$ ist für positives x größer als der zwanzigste Differentialquotient von $\sin x$.

Da letzterer wiederum $\sin x$ lautet und nicht größer als 1 werden kann, so genügt es, wenn wir $f^{(20)}(x) = 1$ setzen.

Die allgemeine Form einer solchen Funktion ist

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + + a_{20} x^{20}.$$

Indem wir $\sin x$ und $f(x)$ sukzessive differentiieren und immer wieder $x=0$ setzen und zum Schlusse beachten, daß $f^{(20)}(x) = 20!\ a_{20}$ also eine Konstante ist, finden wir

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots - \frac{x^{19}}{19!} + \frac{x^{20}}{20!}.$$

Wie oben bewiesen, ist $f(x)$ für jedes positive x größer oder gleich $\sin x$.

Ebenso ergibt sich, daß die ganze Funktion 20. Grades

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots - \frac{x^{19}}{19!} - \frac{x^{20}}{20!}$$

für jedes positive x kleiner als $\sin x$ ist.

Beide Funktionen unterscheiden sich nur durch ihr 20. Glied. Setzt man also

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots - \frac{x^{19}}{19!},$$

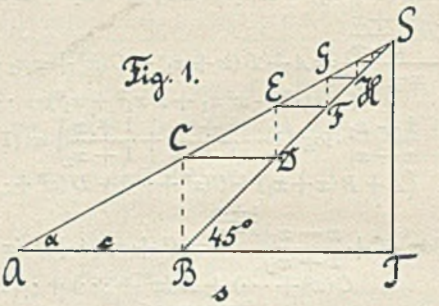
so ist der Fehler nicht größer als $\pm \frac{x^{20}}{20!}$. Für $x \leqq 1$ wird er also z. B. nicht größer als $\frac{1}{20!}$, für $x \leqq 2$ nicht größer als $\frac{2^{20}}{20!}$. Man kann aber jederzeit auch größere Genauigkeit erreichen, wenn man die Anzahl der Glieder nur hinreichend groß nimmt.

Natürlich kann man die Untersuchung ebenso auf negative Werte von x ausdehnen.

Anschauliche Summation geometrischer Reihen.

Von Dr. H. Böttcher (Leipzig).

In Fig. 1 ist an c in $A \measuredangle \alpha < 45^0$, in B ein Winkel von 135^0 angetragen.



Man setze $\operatorname{tg} \alpha = \lambda \ (< 1)$. Dann ist

$$BC = CD = c \cdot \lambda$$
$$DE = EF = c \cdot \lambda^2$$
$$FG = GH = c \cdot \lambda^3$$

usw. Die Summe aller Horizontalstrecken:

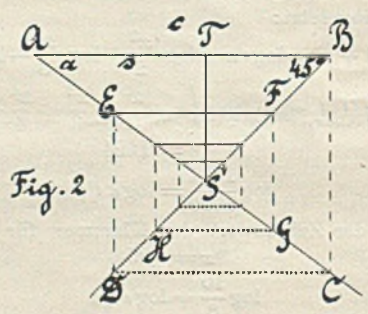
$$AB + CD + EF + GH + \cdots\cdots$$

ist einerseits

$$c + c \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda^3 + \cdots\cdots,$$

andererseits gleich der Strecke $AT = s$. Diese aber genügt wegen $BT = TS = s \cdot \lambda$ der Gleichung

$$s - s \cdot \lambda = c \text{ oder } s = \frac{c}{1-\lambda}.$$



Aehnlich hat man in Fig. 2

$$AB = c$$
$$BC = CD = c\lambda$$
$$DE = EF = c\lambda^2$$
$$FG = GH = c\lambda^3$$

usw. Das Aggregat von lauter Horizontalstrecken:

$$AB - CD + EF - GH + \cdots\cdots$$

ist einerseits

$$c - c \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2 - c \cdot \lambda^3 + \cdots\cdots,$$

andererseits gleich der Strecke $AT = s$. Diese aber genügt wegen $BT = TS = s \cdot \lambda$ der Gleichung

$$s + s \cdot \lambda = c \text{ oder } s = \frac{c}{1+\lambda}.$$

Beide Betrachtungen gelten ersichtlich nur für $\alpha < 45^0$.

Vereine und Versammlungen.

84. Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte in Münster i. W., 15. bis 21. September 1912.

Sonntag, den 15. September: Begrüßungsabend.

Montag, den 16. September vormittags: Erste allgemeine Versammlung. Begrüßungsansprachen. Vorträge von

V. Czerny-Heidelberg: Die nichtoperative Behandlung der Geschwülste.

Becher-Münster: Leben und Seele.

Graf Arco-Berlin: Ueber drahtlose Telegraphie.

Nachmittags: Abteilungssitzungen.

Dienstag, den 17. September: Abteilungssitzungen.

Nachmittags: Ausflüge.

1. nach dem Fürstlichen Bade Bentheim.
2. nach Essen zur Besichtigung der Gußstahlfabrik von Friedr. Krupp.
3. nach Henrichenburg zur Besichtigung des Schiffshebewerks.

Mittwoch, den 18. September vormittags: Naturwissenschaftliche Hauptgruppe: Abteilungssitzungen. Medizinische Hauptgruppe: Gesamtsitzung.

Nachmittags: Naturwissenschaftliche Hauptgruppe: Gesamtsitzung. Vorträge von

v. Wettstein-Wien:
A. Czerny-Straßburg:
v. Hanstein-Berlin:
Kerp-Berlin:
} Die Wissenschaft vom Leben in ihrer Bedeutung für die Kultur der Gegenwart.

Medizinische Hauptgruppe: Abteilungssitzungen.

Abends: Festmahl.

Donnerstag, den 19. September vormittags: Geschäftssitzung der Gesellschaft. Gemeinsame Sitzung beider Hauptgruppen. Vorträge von

Correns-Münster:
Goldschmidt-München:
} Vererbung und Bestimmung des Geschlechts.

Straub-Freiburg: Ueber die Bedeutung der Zellmembran für die Wirkung chemischer Substanzen.

Nachmittags· Abteilungssitzungen. Ausflüge

1. nach Zeche Radbod.
2. nach Georgsmarienhütte.

Freitag, den 20. September vormittags: Zweite allgemeine Versammlung. Vorträge von

Nernst-Berlin: Zur neueren Entwicklung der Thermodynamik.

Sarasin-Basel: Ueber den gegenwärtigen Stand des Weltnaturschutzes.

Küttner-Breslau: Moderne Kriegschirurgie.

Nachmittags: Ausflüge.

Samstag, den 21. September: Tagesausflüge

1. nach Bad Oeynhausen.
2. nach Detmold und dem Hermannsdenkmal.

* * *

Fünfter Internationaler Mathematiker-Kongress. Cambridge 22. bis 28. August 1912.

Der Kongreß wird in vier Abteilungen zerfallen, die in weitere Unterabteilungen getrennt werden sollen, soweit die Anzahl der angemeldeten Vorträge es wünschenswert erscheinen läßt.

1. Abteilung. Arithmetik, Algebra, Analyse.
2. Abteilung. Geometrie.
3. Abteilung. Mechanik, Physikalische Mathematik, Angewandte Mathematik.
4. Abteilung. Philosophische, historische und didaktische Probleme.

In Verbindung mit Abteilung 4 werden drei Verhandlungen stattfinden, zu denen die in Rom ernannte Internationale Unterrichtskommission den Anstoß gegeben hat.

Angemeldet sind u. a. folgende

Vorträge.

M. Bôcher (Havard). Boundary problems in one dimension.

E. Borel (Paris). Définition et domaine d'existence des fonctions monogènes uniformes.

E. W. Brown (Yale). Periodicity in the solar system.

F. Enriques (Bologna). I problemi relativi ai principii della Geometria.

Prince B. Galitzin (St. Petersburg). The principles of instrumental seismology.

E. Landau (Göttingen). Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion.

Sir J. Larmor (Cambridge). The Dynamics of Radiation.

Sir W. H. White, K.C.B. (formerly Director of Naval Construction). The place of Mathematics in Engineering Practice.

* * *

Im August des Jahres hat Herr Geheimrat Klein auf eine 40jährige Tätigkeit als Professor der Mathematik zurückgeblickt. Auf einstimmigen Beschluß der XXI. Hauptversammlung hat der Vorstand dem Jubilar zu diesem Gedenktage Glück gewünscht Mit Stolz hat der Verein ihn stets zu seinen Mitgliedern gezählt. Was er der Wissenschaft geleistet hat, so bedeutend es ist, tritt für den Leserkreis der Unterrichtsblätter noch zurück gegenüber dem, wie er die Ziele des Vereins gefördert. Die Reform des mathematischen Unterrichts in Deutschland führt mit Recht seinen Namen. Für sie hat er gewirkt durch seine Vorlesungen, insbesondere solche über Elementarmathematik, durch seine Vorträge im Verein und auf Philologenversammlungen, als einflußreichstes Mitglied der Unterrichtskommission der Naturforscherversammlung und dem daraus hervorgegangenen Deutschen Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, als Vorsitzender der internationalen mathematischen Unterrichtskommission. Möge es ihm noch lange vergönnt sein, die weitere Entwicklung der hauptsächlich durch seine Worte und Taten angeregten Unterrichtsbewegung zu fördern.

* * *

Der Verband deutscher Schulgeographen, eine Notwendigkeit unserer Zeit! Ein Aufruf mit Begründung von J. Becker, H. Fischer, H. Haack, E. Heise, G. A. Lukas, A. Müller und G. Rüetschi. Gotha 1912.

Ueber die Bedeutung der Geographie bei der gegenwärtigen nationalen und internationalen Lage Worte machen, hieße Eulen nach Athen tragen. In der Schule wird aber trotzdem die Geographie noch vielfach verkannt, ja mißachtet. Wie anders ist es zu erklären, daß in der Mehrzahl der neunstufigen Schulen der Geographieunterricht in den Tertien bereits abschließt! Wie ist es sonst möglich, daß in Berlin 52,5%, im Königreich Sachsen 49,7, in Elsaß-Lothringen gar 56,5% der mit erdkundlichem Unterricht betrauten Lehrer keine Lehrbefähigung in diesem Fache besaßen! Und gibt es nicht noch heute Lehrer, die in öder Paukerei Stationen an Eisenbahnen und ähnliches auswendig lernen lassen?

Da ist es mit Freuden zu begrüßen, daß sich die beteiligten Kreise zum „Verband deutscher Schulgeographen" zusammengeschlossen haben, um der Geographie auch in der Schule die ihr gebührende Stellung zu erringen. Die Werbeschrift des jungen Vereins enthält eine eingehende Begründung der Ziele und kann ebenso wie der Beitritt nur empfohlen werden. Die Mitgliedschaft kostet 6 M, wofür die Zeitschrift „Der Geographische Anzeiger", deren Bezugspreis bisher schon 6 M betrug, umsonst geliefert wird.

Dr. R. Lütgens (Hamburg).

* * *

XXI. Hauptversammlung in Halle a. S.
Biologisch-chemische Abteilung.

In der biologisch-chemischen Abteilung sprachen am Dienstag, den 28. Mai, Herr Prof. Dr. Löwenhardt als Berichterstatter und Herr Oberlehrer Dr. Doermer als Mitberichterstatter über den chemischen Unterricht an den Realanstalten. Die Vortragenden behandelten eine Reihe von Grundfragen des Unterrichts.*) Wegen der sehr beschränkten Zeit mußte leider von der in Aussicht genommenen Diskussion über die gedruckt vorliegenden Leitsätze abgesehen werden. — Daran schloß sich ein höchst interessanter Demonstrationsvortrag des Herrn Oberlehrer Dr. Doermer über die künstlichen Edelsteine der Deutschen Edelsteingesellschaft. An der Hand von Lichtbildern und unter Vorlegung einer reichen Kollektion teils roher, teils herrlicher geschliffener Steine, die die lebhafteste Bewunderung aller Anwesenden erregten, erläuterte der Vortragende Eigenschaften und Herstellung der künstlichen, sog. synthetischen Korunde durch die elektrochemischen Werke in Bitterfeld nach dem Wild-Müthersehen Verfahren. Diese Fabrikate der ersten deutschen Rubingesellschaft werden von der Deutschen Edelsteingesellschaft in Idar a. d. Nahe weiterverarbeitet. Die synthetischen Edelsteine sind physikalisch und chemisch vollkommen identisch mit den Natursteinen, also sozusagen vollkommen „echt". Es werden alle Varietäten des roten Rubins, des blauen Saphirs, des Luckophans sowie die ganz seltenen Abarten dargestellt. — Am Nachmittag besichtigten die Mitglieder der Abteilung teils den Schulgarten der Franckeschen Stiftungen, teils die Hallesche Zuckerraffinerie. Zeigte jener, wie mit nicht allzugroßen Mitteln ein wertvolles, unentbehrliches Hilfsmittel des biologischen Unterrichts geschaffen und ausgestattet werden kann, so führte diese in eine der wichtigsten Industrien der Provinz Sachsen ein. Die besichtigte Fabrik, die unter der Leitung einer der ersten Autoritäten auf diesem Gebiete, des Herrn Prof. Dr. v. Lippmann, steht, gehört zu den größten ihrer Art. Sie raffiniert etwa 10% des deutschen Rohzuckers. Die gewaltigen Dimensionen des Betriebes (nicht minder die fast überall herrschende hohe Temperatur), erregten das Staunen der sehr zahlreichen Besucher. Man verfolgte die Umwandlung des gelblichen Rohzuckers durch die verschiedenen Stadien der Reinigung unter Verwendung der modernsten Hilfsmittel wie u. a. des Wulffschen Patents der „Kristallisation in Bewegung" in den wasserhellen Kristallzucker. Man sah die Darstellung des Würfel- und Hutzuckers und die versandmäßige Verpackung der fertigen Ware. — Am folgenden Tage sprach Herr Prof. Dr. Oels über „Material für die biologischen Schülerübungen"*) und führte in außerordentlich anschaulicher, lebendiger Weise an einigen Beispielen, wie z. B. keimenden Erbsen, der Vogelfeder, den Schrittorganen der Insekten u. a., aus, wie auch leicht zugängliche, alltägliche Objekte wertvolles Beobachtungsmaterial und Gelegenheit zu allgemeinen Ausblicken in die Natur liefern.

*) Die Vorträge werden später ausführlich wiedergegeben.

Hatte die Besichtigung am Mittwoch Nachmittag einen Begriff von der Bedeutung der Zuckerindustrie gegeben, so führte am Nachmittag des 30. Mai die Fahrt auf das Werschen-Weißenfelser Braunkohlenwerk Köpsen bei Webau in die typische Industrie der mittleren Provinz Sachsen ein, nämlich in eine Paraffin- und Solarölfabrik nebst Kerzenfabrikation größeren Umfanges. Denn die letztere stellt täglich 6000 kg Kerzen her! Die verwendete Schwelkohle enthält etwa 15% ölgebende Bestandteile. Der früher vorkommende Pyropisut, der sich durch hellere Farbe auszeichnet, ist in den betr. Gruben erschöpft. Die trockene Destillation erfolgt in hohen eingemauerten Zylindern, die mit einer Kolonne konisch geformter Eisenringe ausgesetzt sind. Während der Koks unten abgezogen wird, entweichen die leichteren (vorwiegend Wasser-) Dämpfe durch ein oberes, die schwereren Teerdämpfe durch ein unteres Abzugsrohr aus dem Innern jener Kolonne, um dann direkt durch Teerkästen zu gehen, hinter denen Exhaustoren eingeschaltet sind. 30 solcher Destillierzylinder sind hier in Tätigkeit. Die nicht kondensierbaren Gase werden sofort verheizt, während der Teer in Destillationsblasen zur Trockne abdestilliert wird. Die Rückstände sind hier poröser Koks bezw. Asphalt. Das Rohöl wird nun mit etwa 2 bis 3% 66grädiger Schwefelsäure in offenen Kesseln durch eingepreßte Luft gründlich gemischt. Darauf zieht man die Säure, die sich unter dem Oel absetzt, ab, um sie dann mit Aetznatron zur Ausscheidung eines, „Kreosot" genannten Anteilys zu behandeln. — Das Oel wird dann gewaschen und wiederholt fraktioniert. Die Fraktionen sind Benzin, Gasöl, Paraffinöl und Rohparaffin. Letzteres wird mit Kohle entfärbt, wiederholt in Filterpressen zwischen starken Hanftüchern abgepreßt, umgeschmolzen, in flachen gemauerten Bassins auf Wasser gegossen und in Tafeln geschnitten. Es ist jetzt fast weiß und wird nun noch mit Wasserdampf abgeblasen, d. h. mit Wasserdämpfen von den letzten Spuren Benzin usw. befreit und schließlich nochmals unter 150 Atm. abgepreßt, so daß es nun völlig geruchfrei, rein weiß und für die Kerzenfabrikation passend ist. In sinnreich gebauten Maschinen erfolgt die Herstellung der Kerzen, von denen wir die verschiedensten Sorten in mancherlei Farben entstehen und versandfertig machen sahen.

E. Löwenhardt (Halle a. S.)

* * *

Kassenbericht für das Jahr 1911.

Einnahmen:

Kassenbestand am 1. Januar 1911	230,38 M
1218 Mitgliederbeiträge	6090,00 „
Summa Einnahmen	6320,38 M
Hiervon Ausgaben	5194,87 „
Bleiben	1125,51 M
Der Bestand des Sparkassenbuches für Ablösungen beträgt	185,14 M

Anzahl der Mitglieder 1219.

*) Der Vortrag wird ausführlich veröffentlicht.

Ausgaben:

1. An Herrn Dr. Salle für 1218 Mitglieder	3045,00 M
2. Kosten der Versammlung in Münster .	1183,80 „
3. Reisekosten und Tagegelder	353,20 „
4. Kassenverwaltung	243,60 „
5. Porti, Schreibhilfe und Drucksachen . .	213,27 „
6. Beitrag an den Deutschen Ausschuß für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht	100,00 „
7. Auslagen der Berliner Ortsgruppe . . .	50,00 „
8 Beitrag als Mitglied des deutschen Museums in München	6,00 „
Summa Ausgaben .	5194,87 M

* * *

Druckfehler im Bericht über den Vortrag des Herrn Geh. Rat E. Dorn.

Statt „Rutherfordert" muß es heißen: „Rutherford". Statt „Halbierungszahl": „Halbierungszeit". Statt „Reichweite der x-Strahlen": „Reichweite der α-Strahlen".

Bücher-Besprechungen.

H. Poincaré, Der Wert der Wissenschaft. Uebersetzt von E. Weber, mit Anmerkungen von H. Weber. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1910, Teubner. 251 S. M 3,60.

Ist es in unserer Zeit noch nötig, ein Buch zu schreiben über den Wert der Wissenschaft? Scheint doch der Hunger nach Wissenschaft selbst in den entferntesten Winkeln des Vaterlandes so groß wie noch nie! Ueberall Vorträge, Kurse, Journale, Bücher, die Wissenschaft zu verbreiten suchen, die die Wissenschaft preisen und zu ihrer Pflege auffordern! Ja, gerade bei diesem Zustande ist das Buch von Poincaré nicht nur zeitgemäß, sondern notwendig. Es fährt nicht in dem seichten Wasser der Ueberschwemmungsgebiete gemächlich daher, sondern steuert mutig in den Strom und gerade die stärksten Wirbel und die reißendsten Strömungen sucht es auf. Von vornherein stellt Poincaré sich auf eine hohe Warte. Das Leben hat den Zweck, die Wahrheit zu erforschen, die wissenschaftliche und die moralische. Freilich untersucht der Verfasser die letztere nicht, sondern nur die erste, aber die Art, wie er die erstere aufsucht, ist selbst eine moralische Tat und zeigt, wie sein Ausspruch gemeint ist, daß jeder, welcher eine der beiden Wahrheiten liebt, die andere auch lieben muß.

Das Buch setzt die Bekanntschaft mit dem vorhergehenden Werke: „Wissenschaft und Hypothese" voraus, wenigstens wenn man die hier gebotenen Untersuchungen richtig einstellen will. Es ist aber nicht etwa eine Korrektur an jenem vielbesprochenen Werke. Freilich tritt es Mißverständnissen, welchen jenes Buch ausgesetzt gewesen ist, entgegen, so besonders dem, daß durch den Nachweis, wie unser Wissen überall auf Hypothesen ruht, der Wert der Wissenschaft herabgesetzt wäre. Die Skepsis ist angebracht, wenn es sich um den eigenen Erfolg handelt, aber sie ist unberechtigt, wenn es sich um den Fortschritt der objektiven Wissenschaft handelt. Objektiv? Gibt es denn im Zeitalter des Relativitätsprinzips noch etwas Objektives? Freilich nicht das, was der große Haufe unter Objektivität versteht, aber das, was als das Bleibende zwischen den rohen Tatsachen steht.

Poincaré unterscheidet sehr fein zwischen der rohen Tatsache und der wissenschaftlichen Tatsache. Die rohe ist unzugänglich und unfaßbar, sie ist nicht Objekt der wissenschaftlichen Untersuchung. Ueber die „Dinge" kann ich nichts aussagen, aber über die Beziehungen der Dinge, und diese Beziehungen sind die wissenschaftlichen Tatsachen. Sie sind objektiv, sofern sie bei allen Menschen in gleicher Weise auffindbar sind. In gleicher Weise — aber nicht in gleicher Sprache! Nicht nur das Idiom der Rede ist bei den verschiedenen Menschen verschieden, sondern auch die wissenschaftliche Fassung der Beziehung ist verschieden je nach Zeit wie nach Ort. Aber die früheren Fassungen solcher Gesetze sind nicht wertlos, weil wir durch Entdeckung neuer wissenschaftlicher Tatsachen genötigt waren, eine neue Fassung zu geben; sie enthalten schon einen Keim für das neue, es ist eine Entwicklung, durch welche die objektive Wahrheit mehr und mehr erkannt wird. Und diese Entwicklung ist nicht eine zufällige, nicht eine launenhafte, sie ist gebunden an die immanenten Differentiale der wissenschaftlichen Tatsachen.

In ganz wundervoller Weise führt Poincaré diese Gedanken durch für die Mathematik und man wird nur in sehr untergeordneten Punkten spezielle Wünsche zur Geltung bringen wollen. In bezug auf die Vorzeitigkeit möchte ich ein Bedenken äußern. Es ist nicht nur das Verhältnis von Ursache und Wirkung, welches die Anschauung der Vorzeitigkeit gibt, sondern man hat ein unmittelbares Urteil über die Vorzeitigkeit auch bei Ereignissen, deren kausale Verknüpfung nicht nur unnötig, sondern sogar unmöglich ist. Auch von der Zeitmessung ist dies Urteil unabhängig; daß z. B. die Nacht dem Tage folgt, ist dem Menschen, auch wenn er noch gar kein Bedürfnis zu einer Zeitmessung hat, völlig bewußt und die Gleichzeitigkeit beider ist absolut ausgeschlossen. Hier liegt eine Schwierigkeit, die bisher wissenschaftlich noch nicht gelöst ist. Denn daß man sagt, wir haben eine unmittelbare Anschauung für diese Divergenz, ist keine Lösung, sondern nur eine Tatsachenbehauptung. Bei der Ableitung des Sehraumes scheint mir der Hinweis auf das Sehen mit zwei Augen zu fehlen oder doch nicht so gewürdigt zu sein, wie er es sein sollte. Die Akkommodation ist für die Konstruktion des Sehraumes freilich von großem Wert, mit ihr allein aber würde, wegen der geringen Intensität der Empfindung, der Sehraum unvollständig konstruiert werden, wenn nicht die Stellung der beiden Augen ein empfindlicheres Maß gäbe.

Von aktuellem Interesse ist die Behandlung der physikalischen Wissenschaft. Es ist selbstverständlich, daß Poincaré die mathematische Physik meint. Hier zeigt er nicht nur die wechselseitige Befruchtung, sondern auch die großen Schwierigkeiten, den wirklichen Beziehungen näher zu kommen. Bei der gegenwärtigen Krisis der Mechanik ist das Kapitel über die Zukunft der mathematischen Physik recht trostreich, wenn auch noch nicht die Zeit gekommen zu sein scheint, aus dem Wirrsal widersprechender Versuche den wirklichen Ausweg gefunden zu haben.

In dem dritten Teile setzt sich Poincaré wesentlich mit dem Philosophen Le Roy auseinander, um die Grenze des Nominalismus festzulegen und dadurch den Wert der Wissenschaft zu begründen.

Der deutschen Uebersetzung sind wertvolle Zusätze von H. Weber angefügt und sie sind notwendig, teils um etwas kurz ausgefallenen Bemerkungen Poincarés den entsprechenden Nachdruck zu geben, teils um historische Berichtigungen zu bieten. Zur achten Bemerkung über die Beziehung der Bogengänge im Ohr zur Raumauffassung möchte ich sagen, daß nach den Experimenten Fröhlichs an den Seepferden diese Beziehung doch sehr problematisch geworden ist. Uebrigens sind die „Ebenen“ der Mittelschnitte der Bogengänge doch auch nur angenähert senkrecht aufeinander und ein solches „Koordinatensystem“ wäre einer nur mangelhaften Raumorientierung fähig.

Die Uebersetzung ist durchaus zu loben und ebenso fließend wie das Original. Trotzdem ist das Buch keine leichte Lektüre, aber die Mühe, welche man sich macht, um alle die vielen kurzen Bemerkungen zu verstehen, ist nicht vergeblich. Man hat einen großen Genuß von dem sorgfältigen Studium des Werkes und gewinnt einen überraschend freundlichen Einblick in die Denkmethode des Verfassers. Wir wünschten, daß die beiden Werke Poincarés: „Wissenschaft und Hypothese“ und dieses, „Der Wert der Wissenschaft“, von jedem Lehrer der Mathematik und Physik gründlich gelesen werden. Keiner wird die Zeit nutzlos dazu aufwenden. Wir können dem bedeutenden Verfasser und der gewandten Uebersetzerin nur danken für die genußreichen Stunden. Hoppe (Hamburg).

* * *

Crantz, P., Arithmetische Aufgaben für Lyzeen sowie die mittleren und oberen Klassen der Studienanstalten. Leipzig u. Berlin 1911, B. G. Teubner. IV und 88 S. 1,40 M.

Diese Aufgabensammlung ist nach des Verfassers Angabe dazu bestimmt, den Uebungsstoff zu dem arithmetischen Abschnitte in dem zweiten und dritten Teile seines Lehrbuches für höhere Mädchenbildungsanstalten zu liefern. Deshalb sind den Paragraphen der einzelnen Kapitel — Potenzierung; Radizierung; Logarithmierung; Gleichungen; arithmetische und geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung; komplexe Zahlen, binomischer Satz und unendliche Reihen; Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit — Hinweise auf die entsprechenden Stellen des Lehrbuches beigegeben.

Das vorausgeschickt dürften wohl die Fragen am Platze sein: 1. Inwieweit zeigt diese Aufgabensammlung etwas Charakteristisches? und 2. wie stellt sie sich, nach dem gebotenen Stoff zu urteilen, zu der Forderung, daß gerade für die Mädchenbildungsanstalten eine zeitgemäße vorsichtige Unterrichtsgestaltung und deswegen auch ein von manchem althergebrachten Ballast befreiter Zuschnitt des ganzen Lehrstoffes geboten ist? Abgesehen davon, daß an einigen Stellen „Funktionen zur graphischen Darstellung“ vorgelegt werden, findet man zumeist Aufgaben von der Art und dem Stile, wie sie seit Jahrzehnten in den an Knabenanstalten benutzten Büchern sich eingebürgert haben. Starkes Ueberwiegen des rein Formalen unter Einflechtung vieler gekünstelten Beispiele, die doch die Pläne von 1908 vermieden sehen wollen, ist der Sammlung eigen. Um das zu belegen, verweise ich auf folgende Beispiele, die für den Unterrichtsfortschritt nur fraglichen Wert haben: die gewöhnliche Auswertung von $\sqrt[4]{11\,316\,496}$ u. dergl. (p. 11); $\log^{\frac{1}{3}} 27$ u. dergl. (p. 23); allgemeine reziproke Gleichungen (p. 49); viele quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten (p. 50 ff.); Gleichungen von der Form $x + y + ixy = a + ib$ (p. 77 und 78). Das gleiche bestätigt auch ein Blick in das Kapitel (p. 81), wo Beispiele für Reihenentwicklungen dargeboten werden. Wozu sollen die Schülerinnen mit Entwicklungen von $\lg \frac{\sqrt{1+x^2}}{(1-x^2)^3}$ oder $\lg \sqrt[5]{(1-x^2)^3}$ geplagt werden? Ferner finden sich dort auch wieder Beispiele vom ununterbrochenen Zinszuschlage, womit niemandem genützt ist.

Diese Erwägungen veranlassen mich zu der Aeußerung, daß die hier besprochene Aufgabensammlung mir nur wenig dem Sinne der Bestimmungen in den Lehrplänen von 1908 zu entsprechen scheint; die Stoffgestaltung hätte nur gewinnen können, wenn die in den neuen Lehrplänen betonten und in so geschickter Weise formulierten Prinzipien weitgehende Berücksichtigung erfahren hätten. J. Schröder (Hamburg).

* * *

Schuster, Prof. Dr. M., Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie nach konstruktiv-analytischer Methode, nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von Dr. W. Lietzmann. Teil II: Trigonometrie. 2. vermehrte und verbess. Aufl. Leipzig 1911, B. G. Teubner.

Die zweite Auflage der Schusterschen Trigonometrie unterscheidet sich im großen und ganzen nicht wesentlich von der ersten; sie bietet daher in ihrer eigenartigen Anlage, die von der der meisten Lehrbücher abweicht, dieselben großen Vorteile wie diese. Neu ist eine noch größere Berücksichtigung der graphischen Darstellung der Funktionen und eine kurze zusammenhängende Darstellung der Geschichte der Trigonometrie, die sehr zu begrüßen ist. Dr. E. Behn (Hamburg).

* * *

V. Kommerell, Rektor Dr., und **K. Kommerell**, Prof. Dr., Analytische Geometrie für den Schulgebrauch bearbeitet. II. Teil. Tübingen 1912, H. Lauppsche Buchhandlung.

Dieser zweite Teil handelt von den algebraischen Kurven höherer Ordnung und einigen transzendenten Kurven und von der analytischen Geometrie des Raumes einschließlich der Flächen zweiten Grades. Die Darstellung ist klar und übersichtlich. Der behandelte Stoff ist sehr umfangreich, für die Schule zu umfangreich. Aber man kann ja auswählen. Im ersten Abschnitt ist besonders die Behandlung der singulären Kurvenpunkte sehr schön. Die 57 Figuren sind gut. Eine kurze historische Uebersicht beschließt das durchaus zu empfehlende Buch. H. W. E. Jung (Hamburg).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Serret, J. A., Integralrechnung. 5. Aufl. bearb. von Georg Scheffers. Leipzig, Teubner. geb. M 13.—.

Teubner, B. G., Die Hundertjahrfeier. 1811—1911. Ebenda.

—„— Schulkatalog 1811—1911. Ebenda.

Thaer, A., Geuther, N., Böttger, A., Der mathematische Unterricht der Hansestädte, Mecklenburgs und Oldenburgs. IMUK I, 4. Ebenda. M 2.—.

Timerding, Prof. Dr. H. E., Die kaufmännischen Aufgaben im mathemat. Unterricht der höheren Schulen. IMUK III, 5. Ebenda. M 1.60.

—„— Die Naturwissenschaften und die Fortbildungsschulen. DAMNU, Heft 12. Ebenda. M 1.20.

Treutlein, Geh.-R. Dir. P., Der geometrische Anschauungsunterricht. Ebenda. geb. M 5.60.

Verband Deutscher Schulgeographen. Gotha, Justus Perthes.

Wieleitner, H., Der Begriff der Zahl. Ebenda. M 0.80.

Weißbach, Hans, An langen Winterabenden. Dresden, Ica.

Wigand, F., Mikroskopisches Praktikum. Godesberg, Naturwissenschaftlicher Verlag. M. 1.50.

Wirz, Prof. J., Der mathematische Unterricht in Elsaß-Lothringen. IMUK II, 7. Leipzig, Teubner. M 1.80.

Zacharias, O., Das Süßwasserplankton. 2. Aufl. Ebenda.

Zühlke, Dr. P., Der Unterricht im Linearzeichnen und in der Darstellenden Geometrie. Ebenda. M 2.60.

Ausgegeben 17. August 1912.