ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972

Seria: Mechanika z. 49 Nr kol. 358

Andrzej Miądowicz
Lesław Socha
Janusz Szopa

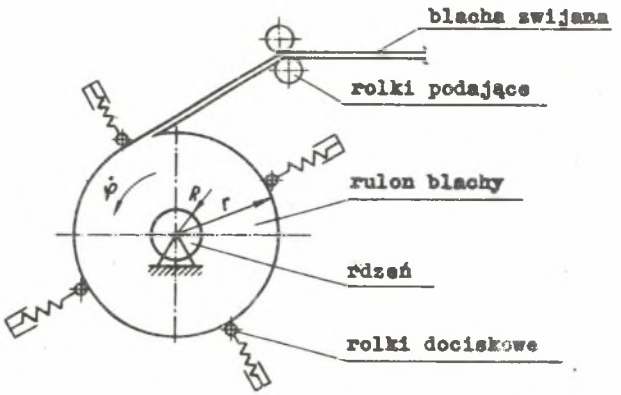
Instytut Konstrukcji i Technologii
Urządzeń Automatyki i Elektroniki

ANALIZA RÓWNAŃ RUCHU I STABILNOŚCI ZWIJARKI BLACHY PRZY DZIAŁANIU WYMUSZENIA STOCHASTYCZNEGO

Streszczenie. W niniejszym artykule rozważano układ o zmiennej masie jakim jest zwijarka blach. Analizie poddano równania jej ruchu, gdy moment napędzający jest procesem stochastycznym oraz zbadano stabilność stochastyczną takiego układu metodą Lapunowa.

Wstęp

Zwijarka blach jest zaliczana do grupy maszyn, w których zmiana masy następuje wskutek nawijania się blachy na jej rdzeń. Uproszczony model zwijarki przedstawia rys. 1.



Rys. 1

Równania ruchu ([1]) wyprowadza się przy założeniu, że rulon blachy, rdzeń i rolki dociskowe oddziela się od rolek podających. Jest to układ o zmiennej masie oraz o zmiennym momencie bezwładności.

Równania ruchu mają postać:

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{M_n - M_o}{J_{zr}\,\omega}, \tag{1}$$

gdzie

φ - kąt obrotu rulonu blachy,

ω - prędkość obrotowa rulonu blachy,

$M_n = M_n(\omega)$ - zredukowany moment napędowy,

$M_o = M_o(\varphi)$ - zredukowany moment oporu,

J_{zr} - zredukowany moment bezwładności.

Dla układu o jednym stopniu swobody, który posiada n członów ruchomych, zredukowany moment bezwładności wyraża się wzorem ([1])

$$\frac{J_{zr}\,\omega^2}{2} = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{J_{sj}\,\omega_j^2}{2} + \frac{m_j\,V_{sju}^2}{2}\right], \tag{2}$$

gdzie

n - liczba ruchomych członów rozpatrywanego układu,

ω - prędkość kątowa członu, na który redukujemy masę,

ω_j - prędkość kątowa j-tego członu,

J_{sj} - moment bezwładności j-tego członu, względem jego środka masy,

m_j - masa j-tego członu,

V_{sju} - prędkość unoszenia j-tego członu.

Dla rozważanej zwijarki n = 3, gdzie jako pierwszy człon przyjęto rdzeń, jako drugi - rulon blachy nawiniętej na rdzeń, a jako trzeci - blachę nabiegającą od rolek podających do rulonu blachy nawiniętej.

Niech R - oznacza promień rdzenia

a r - promień rdzenia z nawiniętą blachą,

wtedy:

$$J_{s1} = \frac{m_1 R^2}{2},$$

gdzie

J_{s1} - moment bezwładności rdzenia względem środka masy,

m_1 - masa rdzenia,

$\omega_1 = \omega$,

gdzie ω_1 - prędkość kątowa rdzenia,

$V_{s1u} = 0$

gdzie V_{s1u} - prędkość unoszenia środka masy rdzenia,

$J_{s2} = m_{II} \frac{r^2}{2} - m_I \frac{R^2}{2}$

gdzie J_{s2} - moment bezwładności blachy nawiniętej względem środka obrotów,

m_{II} i m_I - masy walców składających się z samej blachy o promieniach r i R,

$\omega_2 = \omega$

gdzie ω_2 - prędkość kątowa blachy nawiniętej,

$V_{s2u} = 0$

gdzie V_{s2u} - prędkość unoszenia środka masy blachy nawiniętej,

J_{s3} - moment bezwładności blachy nabiegającej od rolek podających do rulonu blachy nawiniętej,

$\omega_3 = 0$

gdzie ω_3 - prędkość kątowa blachy nabiegającej od rolek podających do rulonu blachy nawiniętej,

$V_{s3u} = \omega \cdot r$

gdzie V_{s3u} - prędkość unoszenia blachy nabiegającej od rolek podających do rulonu blachy nawiniętej.

Niech m_3 oznacza masę blachy nabiegającej od rolek podających do rulonu blachy nawiniętej. Jeśli przez a oznaczymy szerokość blachy, przez b jej grubość a przez k - gęstość, wtedy można przyjąć:

$$r = r(\varphi) = R + \frac{b}{2\pi} \varphi \tag{3}$$

przy założeniu, że blacha jest cienka i $b \ll R$,

$$\begin{aligned} m_{II} &= k \cdot \pi \cdot r^2(\varphi) \cdot a \\ m_I &= k \cdot \pi \cdot R^2 \cdot a \end{aligned} \tag{4}$$

oraz

$$J_{s2} = \frac{1}{2} k\pi a \left[\frac{2R^3 b\varphi}{\pi} + \frac{3R^2 b^2 \varphi^2}{2\pi^2} + \frac{Rb^3\varphi^3}{2\pi^3} + \frac{b^4\varphi^4}{16\pi^4}\right].$$

Ostatecznie po przekształceniu wzoru (2) otrzymamy:

$$J_{zr} = \frac{m_1 R^2}{2} + \frac{1}{2} k\pi a \left[\frac{2R^3 b\varphi}{\pi} + \frac{3R^2 b^2\varphi^2}{2\pi^2} + \frac{Rb^3\varphi^3}{2\pi^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{b^4\varphi^4}{16\pi^4}\right] + m_3 \left[R^2 + \frac{Rb\varphi}{\pi} + \frac{b^2\varphi^2}{4\pi^2}\right]. \tag{5}$$

Deterministyczne rozwiązanie problemu

W celu uzyskania deterministycznego rozwiązania równania (1) założono:

$$\begin{aligned} M_n(\omega) &= A\omega + B \\ M_o &= \text{const} \\ J_{zr} &= N + P \cdot \varphi \quad \text{(dokonujemy linearyzacji - b-małe)} \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie $N = \frac{m_1 R^2}{2} + m_3 R^2$

$P = ka\, R^3 b + \frac{m_3 Rb}{\pi}.$

Równanie (1) przekształcamy do postaci

$$\frac{\omega\, d\omega}{A\omega + B - M_o} = \frac{d\varphi}{N + P\varphi}. \tag{7}$$

Wstawiając $C = B - M_o$, otrzymujemy po scałkowaniu

$$\frac{1}{A}\omega - \frac{C}{A^2} \ln|A\omega + C| + E = \frac{1}{P} \ln|N + P\varphi| \tag{8}$$

(gdzie E - stała z całkowania),

czyli

$$N + P\varphi = \frac{e^{\frac{P}{A}\omega}\, e^{EP}}{|A\omega + C|^{\frac{PC}{A^2}}}. \tag{9}$$

Można to równanie rozwikłać i przedstawić w postaci:

$$\varphi = \frac{e^{\alpha\omega+\beta}}{(\gamma\omega+\delta)^{\delta}} - \eta \tag{10}$$

oraz α, β, γ, δ, ε, η - stałe.

Otrzymano więc układ równań:

$$\begin{cases} \varphi = g(\dot{\varphi}) = g(\omega) \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases} \tag{11}$$

Wg([2]) istnieje przy pewnych warunkach parametryczne rozwiązanie takiego równania w postaci:

$$\begin{cases} t = \nu_0 + \int\limits_{\omega_0}^{\omega} \frac{g(\omega)}{\omega}\, d\omega, \\ \varphi = g(\omega) \end{cases} \tag{12}$$

gdzie $(\nu_0, g(\omega_0))$ jest punktem, przez który ma przechodzić rozwiązanie tego układu równań.

W rozważanym przypadku:

$$\begin{cases} \varphi = \frac{e^{\alpha\omega+\beta}}{(\gamma\omega+\delta)^{\varepsilon}} - \eta \\ t = \nu_0 + \int\limits_{\omega_0}^{\omega} \frac{e^{\alpha\omega+\beta}\left[\alpha - \varepsilon(\gamma\omega+\delta)^{\varepsilon-1}\right]}{\omega(\gamma p + \delta)^{2\varepsilon}}\, d\omega. \end{cases} \tag{13}$$

Analiza zagadnienia stochastycznego

Założono, że moment jest procesem stochastycznym $A\omega + B + \xi(t)$ i wykorzystując równanie Fokkera-Plancka([3]) określono dwuwymiarową gęstość prawdopodobieństwa jakc rozwiązanie równania różniczkowego cząstkowego.

Równanie (7) przyjmie postać:

$$\frac{d\omega}{d\Phi} = \frac{A\omega + C + \xi(t)}{(N + P\Phi)\cdot\omega} \tag{14}$$

Po wymnożeniu równania (14) przez ω oraz uwzględnieniu, że $\omega = \dot{\Phi}$ i $\frac{d\omega}{d\Phi} = \frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{dt}{d\Phi} = \frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{1}{\omega}$ otrzymano:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{A\omega + C + \xi(t)}{N + P\int\omega\, dt} \tag{15}$$

skąd

$$N + P\int\omega\, dt = \frac{A\omega + C + \xi(t)}{\dot{\omega}}. \tag{16}$$

Po zróżniczkowaniu (16)

$$P\omega = \frac{(A\dot{\omega} + \dot{\xi})\dot{\omega} - (A\omega + C + \xi)\ddot{\omega}}{\dot{\omega}^2} \tag{17}$$

$$(A\omega + C + \xi)\ddot{\omega} + P\omega\dot{\omega}^2 - A\dot{\omega}^2 - \dot{\xi}\dot{\omega} = 0 \tag{18}$$

O procesie założono, że powoduje on szybkie zmiany o małej wartości (ξ - nieistotne, $\dot{\xi}$ - istotne) co oznacza, że przyjęto większy wpływ wibracji o dużej częstości niż wolnych przypadkowych zmian momentu napędzającego. Wtedy:

$$\ddot{\omega} = \frac{(A - P\omega)\dot{\omega}^2}{A\omega + C} + \frac{\dot{\omega}}{A\omega + C}\cdot\dot{\xi}. \tag{19}$$

Równanie to sprowadzamy do układu równań:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \varepsilon \\ \dot{\varepsilon} = \dfrac{(A - P\omega)\varepsilon^2}{A\omega + C} + \dfrac{\varepsilon}{A\omega + C}\cdot\dot{\xi} \end{cases} \tag{20}$$

lub też

$$\begin{cases} d\omega = \varepsilon\, dt \\ d\varepsilon = \dfrac{(A - P\omega)\varepsilon^2}{A\omega + C}\, dt + \dfrac{\varepsilon}{A\omega + C}\, d\xi. \end{cases} \tag{21}$$

Wielowymiarowe równanie Fokkera-Plancka wg ([3]) ma postać:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q^i}(\phi^i g) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^i \partial q^j}(D^{ij} g), \tag{22}$$

gdzie zmienne q^i spełniają równanie:

$$dq^i = \phi^i(q^1,\dots,q^N,t)\,dt + \sigma^i_k(q^1,\dots,q^N,t)\,d\xi^k(t) \tag{23}$$

$$i,k = 1,2,\dots,N \quad \text{oraz} \quad D^{ij} = \sigma^i_k \sigma^j_l \delta^{lk}$$

i $\frac{d\xi^k(t)}{dt}$ są niezależnymi normalnymi procesami typu białego szumu.

Dla zwijarki równanie Fokkera-Plancka będzie miało postać:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \omega}(\varepsilon \cdot g) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[\frac{(A - P\omega)\varepsilon^2}{A\omega + C} \cdot g\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}\left[\frac{\varepsilon^2 \cdot g}{(A\omega + C)^2}\right], \tag{24}$$

gdzie $g = g(\omega, \varepsilon, t)$

lub po przekształceniu:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\varepsilon\frac{\partial g}{\partial \omega} - \frac{2(A - P\omega)\varepsilon}{A\omega + C} \cdot g - \frac{(A - P\omega)\varepsilon^2}{A\omega + C} \cdot \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} + \frac{g}{(A\omega + C)^2} + \frac{\varepsilon^2}{2(A\omega + C)^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon^2}. \tag{25}$$

W przypadku gdy odchylenie od stanu deterministycznego opisanego związkiem (7) jest procesem stacjonarnym ($\frac{\partial g}{\partial t} = 0$), to (25) jest równaniem parabolicznym o zmiennych współczynnikach.

Stabilność stochastyczna

Stosując metodę funkcjonału Lapunowa ([4], [5]) zbadano stabilność układu równań (20). Przeprowadzono linearyzację metodą najmniejszych kwadratów osobno dla części deterministycznej i osobno dla wyrażenia występującego przy części stochastycznej.

Część deterministyczna ma postać:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \varepsilon \\ \dot{\varepsilon} = \dfrac{A - P\omega}{A\omega + C}\varepsilon^2 \overset{df}{=} N\varepsilon^2 \dfrac{1}{A\omega + C} - \dfrac{P}{A}\varepsilon^2 \end{cases} \tag{26}$$

$$\text{i } N = \frac{A^2 + CP}{A},$$

a po linearyzacji powinno się otrzymać

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \varepsilon \\ \dot{\varepsilon} = \alpha\omega + \beta\varepsilon \end{cases} \tag{27}$$

Jeżeli $F = \int_0^{\varepsilon_0}\int_0^{\omega_0} (\alpha\omega + \beta\varepsilon - \frac{A - P\omega}{A\omega + C}\varepsilon^2)^2 \, d\omega \, d\varepsilon,$

to musi być spełnione (wg metody najmniejszych kwadratów):

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0. \tag{28}$$

Zmieniając kolejność różniczkowania z całkowaniem oraz przyjmując $M = \ln\left|\frac{A\omega_0 + C}{C}\right|$, otrzymano na współczynniki α i β następujący układ równań

$$\begin{cases} \alpha \dfrac{\omega_0^3 \varepsilon_0}{3} + \beta \dfrac{\omega_0^2 \varepsilon_0^2}{4} = \dfrac{N\omega_0 \varepsilon_0^3}{3A} - \dfrac{P\omega_0^2 \varepsilon_0^3}{6A} - \dfrac{CNM\varepsilon_0^3}{3A} \\ \alpha \dfrac{\omega_0^2 \varepsilon_0^2}{4} + \beta \dfrac{\varepsilon_0^3 \omega_0}{3} = \dfrac{NM\varepsilon_0^4}{4A} - \dfrac{P\omega_0 \varepsilon_0^4}{4A}, \end{cases} \tag{29}$$

skąd

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{7}\left(\dfrac{P\varepsilon_0^2}{A\omega_0} + \dfrac{16N\varepsilon_0^2}{A\omega_0^2} - \dfrac{9MN\varepsilon_0^2}{A\omega_0^2} - \dfrac{16CNM\varepsilon_0^2}{A\omega_0^3}\right) \\ \beta = \dfrac{1}{7}\left(\dfrac{12NM\varepsilon_0}{A\omega_0} - \dfrac{6P\varepsilon_0}{A} - \dfrac{12N\varepsilon_0}{A\omega_0} + \dfrac{12CNM\varepsilon_0}{A\omega_0^2}\right) \end{cases} \tag{30}$$

Część zaburzeniowa ma postać

$$\begin{cases} \dot{\omega} = 0 \\ \dot{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{A\omega + C} \cdot \dot{\xi} \end{cases} \tag{31}$$

Po linearyzacji powinno być:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = 0 \\ \dot{\varepsilon} = \gamma'\omega + \delta'\varepsilon \end{cases} \tag{32}$$

Obecnie $F = \int\limits_0^{\varepsilon_0} \int\limits_0^{\omega_0} \left(\gamma'\omega + \delta'\varepsilon - \dfrac{\varepsilon}{A\omega + C} \cdot \dot{\xi} \right)^2 d\omega\, d\varepsilon$

Postępując analogicznie jak poprzednio, jest:

$$\begin{cases} \gamma' = \dfrac{12}{7} \left(\dfrac{2\varepsilon_0}{A\omega_0^2} - \dfrac{2CM\varepsilon_0}{A^2\omega_0^3} - \dfrac{M\varepsilon_0}{A\omega_0^2} \right) \cdot \dot{\xi} \\ \delta' = \dfrac{2}{7} \left(\dfrac{8M}{A\omega_0} - \dfrac{9}{A\omega_0} + \dfrac{9CM}{A^2\omega_0^2} \right) \cdot \dot{\xi} \end{cases} \tag{33}$$

Badano więc stabilność następującego układu równań ([4], [5]):

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \varepsilon \\ \dot{\varepsilon} = \alpha\omega + \beta\varepsilon + \gamma\omega\dot{\xi} + \delta\varepsilon\dot{\xi} \end{cases} \tag{34}$$

gdzie $\gamma' = \gamma \cdot \dot{\xi}$ i $\delta' = \delta \cdot \dot{\xi}$.

Układ równań (34) można inaczej zapisać:

$$\begin{cases} d\omega = \varepsilon\, dt \\ d\varepsilon = (\alpha\omega + \beta\varepsilon)\, dt + (\gamma\omega + \delta\varepsilon)\, d\xi \end{cases} \tag{35}$$

Jest to liniowy układ równań Jto ([4], [5]) - postać wektorowa tego układu jest następująca:

$$dx = Bx\, dt + \sigma x\, d\xi$$

gdzie w rozważanym przypadku:

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ \varepsilon \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

Warunkiem dostatecznym stabilności rozwiązania $x(t) \equiv 0$ jest tw. ([4], [5]) mówiące o tym, że dla wykładniczej stabilności średniokwadratowej wystarcza, aby dla pewnej istotnie dodatnio określonej formy kwadratowej W rzędu drugiego można było znaleźć istotnie dodatnio określoną formę V również rzędu drugiego spełniającą warunek

$$LV = -W. \tag{36}$$

Operator $L(.)$ ma budowę:

$$L(V) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x^i} F^i(x,t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j} \sigma^i_k \sigma^j_r \delta^{kr}, \tag{37}$$

gdzie równanie wyjściowe ma postać

$$dx^i(t) = F^i(x,t)\, dt + \sigma^i_k(x,t)\, d\xi^k(t). \tag{38}$$

Dla układu równań (35) jest:

$$k = 1; \quad i = 1,2; \quad x^1 = \omega; \quad x^2 = \varepsilon; \quad F^1 = \varepsilon;$$

$$F^2 = \alpha\omega + \beta\varepsilon; \quad \sigma^1_1 = 0; \quad \sigma^2_1 = \gamma\omega + \delta\varepsilon,$$

oraz

$$L(.) = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \omega} + (\alpha\omega + \beta\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{2}(\gamma\omega + \delta\varepsilon)^2 \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}. \tag{39}$$

Przyjęto:

$$\begin{cases} W = A\omega^2 + B\omega\varepsilon + C\varepsilon^2 \\ L = \frac{1}{2} V_1 \omega^2 + V_2 \omega\varepsilon + \frac{1}{2} V_3 \varepsilon^2, \end{cases} \tag{40}$$

gdzie A, B, C, V_1, V_2, V_3 - stałe oraz A, B, C - można dobierać, tak jednak aby W było formą kwadratową istotnie dodatnio określoną.

Po podstawieniu (40) do (39) i (36) i porównaniu współczynników występujących przy ω^2, $\omega \cdot \varepsilon$, ε^2 otrzymuje się układ równań ze względu na V_1, V_2 i V_3:

$$\begin{cases} \alpha V_2 + \frac{1}{2}\gamma^2 V_3 = -A \\ V_1 + \alpha V_3 + \beta V_2 + \gamma\delta V_3 = -B \\ V_2 + \beta V_3 + \frac{1}{2}\delta^2 V_3 = -C, \end{cases} \tag{41}$$

skąd

$$\begin{cases} V_1 = -B - \dfrac{(\alpha + \gamma\delta)(A - C\alpha)}{\alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha\delta^2 - \frac{1}{2}\gamma^2} + C\beta + \dfrac{\beta(\beta + \frac{1}{2}\delta^2)(A - C\alpha)}{\alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha\delta^2 - \frac{1}{2}\gamma^2} \\ V_2 = -C - \dfrac{(\beta + \frac{1}{2}\delta^2)(A - C\alpha)}{\alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha\delta^2 - \frac{1}{2}\gamma^2} \\ V_3 = \dfrac{A - C\alpha}{\alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha\delta^2 - \frac{1}{2}\gamma^2}. \end{cases} \tag{42}$$

Warunkiem dostatecznym stabilności stochastycznej analizowanego układu jest dodatnia określoność formy kwadratowej V, czyli

$$\begin{aligned} V_1 &> 0 \\ V_1 V_3 - V_2^2 &> 0. \end{aligned} \tag{43}$$

BIBLIOGRAFIA

1. W. Bogusz, J. Adamczyk - Mechanika układów o zmiennej masie, maszynopis (praca niepublikowana), Kraków, 1970.
2. E. Kamke - Spravocznik po obyknowiennym differencjalnym uravnienijam, Izd. Nauka, Moskva, 1965.
3. B. Skalmierski, A. Tylikowski - Procesy stochastyczne w dynamice, PWN, 1972.
4. B. Skalmierski, A. Tylikowski - Stabilność w mechanice, Wyd. PTMTiS, Gliwice, 1972.
5. Chazmieński R.E. - Ustoiczivost sistem differencjalnych uravnienij pri słuczajnych vozmuszczenijach ich parametrov, Izd. Nauka, Moskva, 1969.

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И СТАБИЛЬНОСТИ МОТАЛКИ ЖЕСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРИНУЖДЕНИЯ

Р е з ю м е

В работе расмотрено уравнение движения системы с переменной массой какой является листовая моталка при стохастическим характере тягового момента. Дальше дается достаточные условия устойчивой работы этой системы.

ANALYSIS OF THE EQUATIONS OF MOTION ADN STABILITY OF THE SHEET TWISTING MACHINE AT ACTION OF THE STOCHASTIC FORCING

S u m m a r y

In the paper we weighed out o formation of changing mass - the reeling machine. We analysed its movement when on the driving moment is a stochastic perturbation, and studed the stochastic Lapunov stability.