ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966

Seria: MECHANIKA z. 25 Nr kol. 147

JÓZEF WOJNAROWSKI
Katedra Mechaniki Technicznej

CHARAKTERYSTYKA SPRĘŻYSTA WALCA GUMOWEGO PRZY SKRĘCANIU

Streszczenie: W oparciu o metody nieliniowej teorii sprężystości określono charakterystykę sprężystą walca gumowego obciążonego momentem skręcającym M_s, a następnie wyznaczono ją na drodze doświadczalnej dla dwóch gatunków gum: FU-03 i FU-10. Dla oceny wyznaczonych charakterystyk określono dla przyjętego poziomu ufności przedziały ufności i dokładność obserwacji.

1. Wstęp

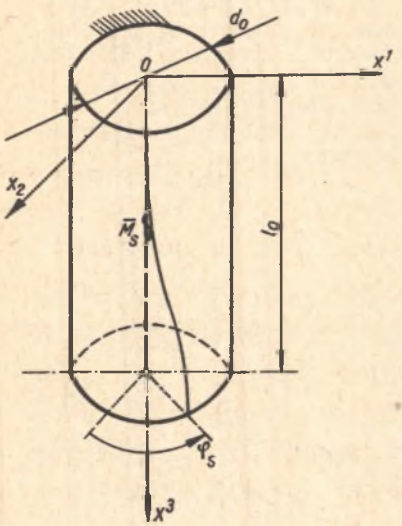
Stosowanie gumy jako materiału konstrukcyjnego staje się obecnie nieodzowne. Jest to wynikiem zdolności do dużych odkształceń gumy przy równoczesnym dużym tłumieniu. Stosowanie elementów gumowych w rozwiązaniach konstrukcyjnych pociąga za sobą konieczność dokładniejszego poznania własności mechanicznych gumy, a w szczególności jej charakterystyki sprężystej i funkcji tłumienia.

W pracy tej wykorzystując metodę i niektóre zależności podane przez A.E. Greena i W. Zerny [1] określono charakterystykę sprężystą pręta gumowego obciążonego momentem skręcającym M_s, a następnie wyznaczono ją na drodze doświadczalnej. Badanie przeprowadzono w temperaturze 20°C na próbkach wykonanych z dwóch gatunków gum: FU-03 - miękkiej o twardości 45 ± 5° Sh oraz FU-10 - twardej o twardości 80 ± 5°Sh.

2. Stan odkształcenia

Rozważmy walcowy pręt gumowy o promieniu r_o i długości l_o. Załóżmy dalej, że górny koniec pręta jest nieruchomy, a na dolny działa moment skręcający M_s w płaszczyźnie prostopadłej do osi pręta.

Odkształcenie pręta jest wywołane naprężeniami powstałymi pod wpływem przyłożonego do dolnego końca pręta, wektora momentu skręcającego $\bar{M}_s$ działającego wzdłuż osi pręta (rys. 1). Pręt gumowy wobec warunku nieściśliwości będzie miał dalej po odkształceniu długość l_o i średnicę d_o.



Rys. 1.

Jeśli oznaczymy układ współrzędnych walcowych związanych z ciałem przez

$$r, \vartheta, z$$

to w odkształconym ciele współrzędne kartezjańskie dowolnego punktu P wyniosą

$$y^1 = r.\cos\vartheta, \quad y^2 = r.\sin\vartheta, \quad y^3 = z \tag{2.1}$$

i składowe kowariantnego i kontrawariantnego tensora metrycznego przyjmą postać

$$G_{ij} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{2.2}$$

$$G_{ij} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{2.3}$$

$$G = \det G_{ij} = r^2 \tag{2.4}$$

W ciele nieodkształconym punkt ten posiadał współrzędne:

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos\left(\vartheta - \frac{\varphi_s}{l_o} \cdot z\right), \\ x^2 &= r \sin\left(\vartheta - \frac{\varphi_s}{l_o} \cdot z\right), \\ x^3 &= z, \end{aligned} \tag{2.5}$$

przy założeniu, że współrzędna walcowa ϑ zmienia się liniowo z długością z. Założenie to jest z dobrym przybliżeniem zgodne z doświadczeniem w odniesieniu do gumy przy obciążeniach skrętnych.

Wobec tego składowe kowariantnego i kontrawariantnego tensora metrycznego można zapisać:

$$g_{ij} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & -\frac{\varphi_s}{l_o} \cdot r^2 \\ 0 & -\frac{\varphi_s}{l_o} \cdot r^2 & 1 + \frac{\varphi_s^2}{l_o^2} \cdot r^2 \end{Vmatrix}, \tag{2.6}$$

$$g^{ij} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varphi_s^2}{l_o^2} + \frac{1}{r^2} & \frac{\varphi_s}{l_o} \\ 0 & \frac{\varphi_s}{l_o} & 1 \end{Vmatrix}, \tag{2.7}$$

$$g = \det g_{ij} = r^2,$$

gdzie:

φ_s – kąt skręcenia dolnego końca próbki.

Niezmienniki stanu odkształcenia są:

$$I_1 = g_{rs}\, G^{rs} = 3 + \frac{\varphi_s^2}{l_o^2} \cdot r^2,$$

$$I_2 = g_{rs}\, G^{rs}\, I_3 = 3 + \frac{\varphi_s^2}{l_o^2} \cdot r^2, \tag{2.9}$$

$$I_3 = \frac{G}{g} = 1, \quad (r, s = 1, 2, 3).$$

Zależność $I_3 = 1$ spełnia warunek nieściśliwości.
Pomocniczy tensor B^{ij} przyjmuje postać:

$$B^{ij} = I_1\, g^{ij} - g^{ir}\, g^{js}\, G_{rs}, \tag{2.10}$$

$$B^{ij} = \begin{Vmatrix} 2 + \frac{\varphi_s^2}{l_o^2} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varphi_s^2}{l_o^2} + \frac{2}{r^2} & \frac{\varphi_s}{l_o} \\ 0 & \frac{\varphi_s}{l_o} & 2 \end{Vmatrix}. \tag{2.11}$$

3. Związek pomiędzy naprężeniem i odkształceniem

Dla gumy jako materiału nieściśliwego i izotropowego potencjał sprężystości W wyraża się jako funkcja dwóch niezmienników stanu odkształcenia

$$W = W\,(I_1, I_2). \tag{3.1}$$

W pracy tej przyjęto bardziej ogólną nieliniową postać potencjału sprężystości [2], a mianowicie

$$W(I_1, I_2) = C_1 \cdot (I_1 - 3) + C_2 \cdot (I_2 - 3) + C_3 \cdot (I_1^2 - 9), \tag{3.2}$$

gdzie:

C_1, C_2 i C_3 – stałe materiałowe.

Kontrwariantny tensor naprężeń określa zależność:

$$\tau^{ij} = \Phi \cdot g^{ij} + \psi \cdot B^{ij} + p \cdot G^{ij}, \tag{3.3}$$

gdzie:

$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \cdot \frac{\partial W}{\partial I_1},$$

$$\psi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \cdot \frac{\partial W}{\partial I_2}, \tag{3.4}$$

$$p = 2\sqrt{I_3} \cdot \frac{\partial W}{\partial I_3}.$$

4. Równania równowagi

Dla warunku równowagi odkształconego pręta gumowego przy pominięciu sił masowych możemy napisać:

$$\nabla_i \tau^{ij} = 0, \tag{4.1}$$

albo:

$$\tau^{ij}_{,i} + \Gamma^{j}_{ir} \tau^{ir} + \Gamma^{r}_{ir} \cdot \tau^{ij} = 0 \tag{4.2}$$

przy warunkach brzegowych

$$\tau^{ij} \cdot n_j = P^i \quad (i, j, r = 1, 2, 3), \tag{4.3}$$

gdzie:

∇_i – pochodna kowariantna w odniesieniu do ciała odkształconego,

Γ^{j}_{ir} – symbole Christoffela drugiego rodzaju,

P^i – kontrawariantne składowe sił powierzchniowych,

n_k – kowariantne składowe wektora jednostkowego.

Dla określenia charakterystyki sprężystej należy wyznaczyć wielkość momentu skręcającego M_s jako funkcję kąta skręcenia dolnego końca próbki. Wyznaczymy więc teraz tę zależność. Na dolnym końcu pręta dla $z = l_o$ jednostkowy wektor normalny do powierzchni czołowej będzie

$$\bar{n} = \frac{\bar{G}^3}{\sqrt{G^{33}}} \tag{4.4}$$

i jego współrzędne wyniosą

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 1. \tag{4.5}$$

Współrzędne kontrawiariantne sił powierzchniowych otrzymujemy z zależności

$$P^j = \bar{P} \cdot \bar{G}^j \tag{4.6}$$

i po uwzględnieniu, że

$$\bar{P} = P^{(i)} \cdot \frac{\bar{G}_i}{\sqrt{G_{ii}}} \tag{4.7}$$

mamy

$$\tau^{ij} \cdot n_j \cdot \sqrt{G_{ii}} = P^{(i)}, \tag{4.8}$$

gdzie:
$P^{(i)}$ oznacza współrzędne fizyczne sił powierzchniowych.

Podstawiając odpowiednie składowe tensora naprężeń (3.3) oraz współrzędne wektora normalnego do zależności (4.8) otrzymujemy na powierzchni czołowej $z = l_o$ siłę $P^{(i)}$ o następujących składowych fizycznych:

$$P^{(1)} = 0, \quad P^{(2)} = r\tau^{23}, \quad P^{(3)} = \tau^{33}. \tag{4.9}$$

W konsekwencji tego otrzymujemy, że moment skręcający w płaszczyźnie prostopadłej do osi pręta wynosi:

$$M_s = 2 \cdot \pi \int_0^{d_o/2} r^3 \cdot \tau^{23} \cdot dr. \qquad (4.10)$$

Po podstawieniu odpowiednich zależności wynika, że

$$M_s = \frac{1}{16} \pi \cdot \frac{d_o^4}{l_o} \cdot (C_1 + C_2 + 6\, C_3) \cdot \varphi_s + \frac{\pi}{48} \cdot \frac{d_o^6}{l_o^3} C_3 \cdot \varphi_s^3 . \qquad (4.11)$$

Zastępując współczynniki przy φ_s i φ_s^3 przez A i B mamy:

$$M_s = A \cdot \varphi_s + B \cdot \varphi_s^3 \qquad (4.12)$$

Zastanówmy się teraz nad znakami współczynników A i B. Ogólnie wiadomo, że C_1 i C_2 są zawsze dodatnie, C_3 może zaś przyjmować wartości ujemne względnie dodatnie [3].
Dla warunków

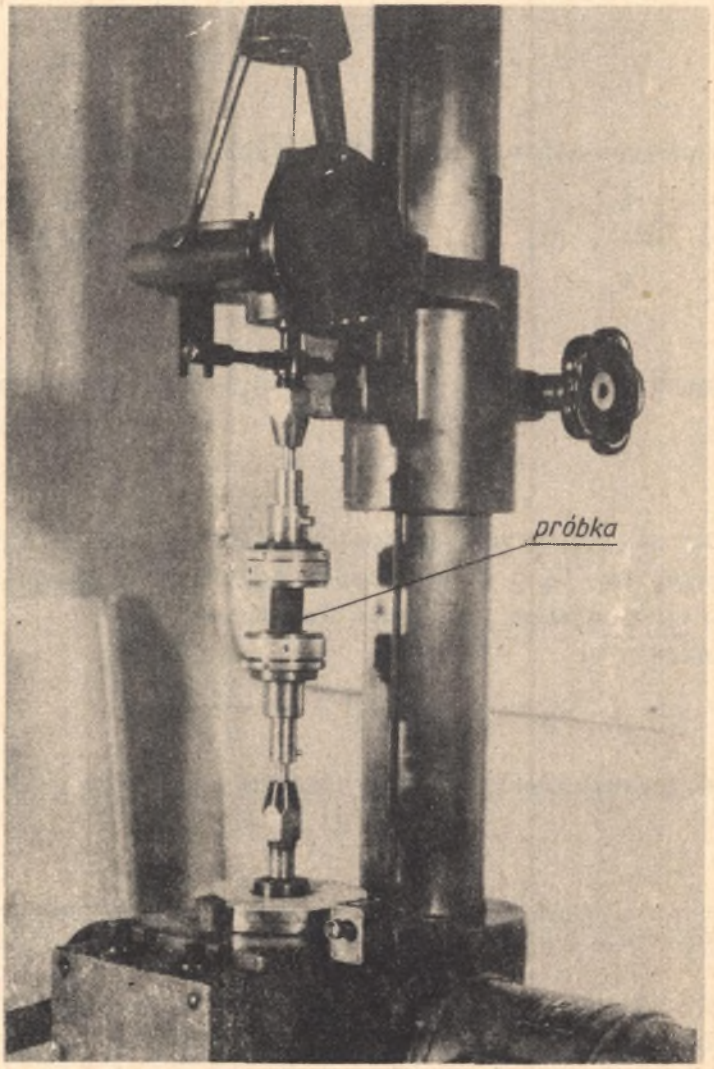
$$C_3 < 0 \quad \text{i} \quad |C_3| < \frac{C_1 + C_2}{6}$$

otrzymana charakterystyka przy czystym skręcaniu jest typu miękkiego ($B < 0$).

5. Wyznaczenie charakterystyki sprężystej na drodze doświadczalnej

Ze względu na duże trudności przy wyznaczaniu stałych materiałowych C_1, C_2 i C_3 określono rzeczywiste charakterystyki próbek gumowych w oparciu o przeprowadzone próby skręcania. Badania przeprowadzono na próbkach o średnicy $d_o = 20$ mm i $l_o = 40$ mm (rys. 2). Otrzymane ciągi pomiarów M_{sj}, φ_{sj} dla $j = 25$ aproksymowano zgodnie z wyprowadzonym wzorem (4.12) parabolą trzeciego stopnia, a mianowicie:

$$y_j = \alpha_1 \cdot x_j + \alpha_2 \cdot x_j^3, \qquad (5.1)$$



Rys. 2

gdzie:

$$y_j = \frac{M_{sj}}{M_{smax}}, \quad x_j = \frac{\varphi_{sj}}{\varphi_{smax}}. \tag{5.2}$$

φ_{sj}, φ_{smax} – bieżący i maksymalny kąt skręcenia próbki.

W oparciu o metodę najmniejszych kwadratów otrzymano układ dwu równań normalnych, z których wyznaczono współczynniki α_r $(r = 1,2)$.
Współczynniki te dla gumy FU-03 wynoszą

$$\alpha'_1 = 1,0119, \quad \alpha'_2 = -0,0078. \tag{5.3}$$

Charakterystyka sprężysta przyjmuje postać

$$y' = 1,0119\ x - 0,0078\ .\ x^3, \tag{5.4}$$

a po uwzględnieniu zależności (5.2) otrzymujemy

$$M'_s = 1,1531\ .\ \varphi_s - 0,0009\ .\ \varphi_s^3. \tag{5.4a}$$

Natomiast dla gumy FU-10

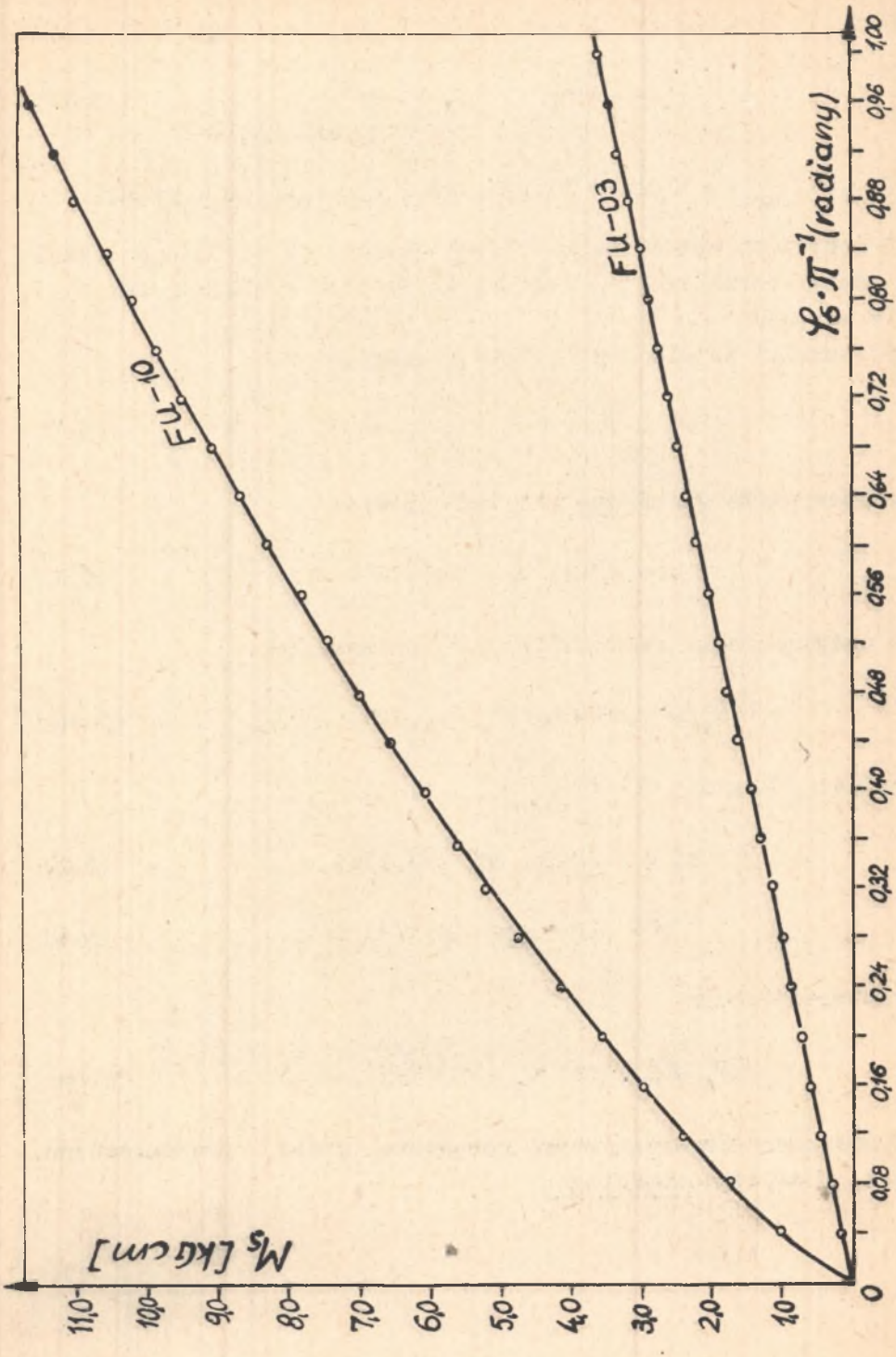
$$\alpha''_1 = 1,3093, \quad \alpha''_2 = -0,3385, \tag{5.5}$$

$$y'' = 1,3093\ x - 0,3385\ x^3. \tag{5.6}$$

Po przekształceniu

$$M''_s = 9,9188\ \varphi_s - 1,0395\ .\ \varphi_s^3. \tag{5.6a}$$

Wyznaczone charakterystyki sprężyste, które przedstawiono na rys. 3 są typu miękkiego.


M_s [kG cm]
11,0
10,0
9,0
8,0
7,0
6,0
5,0
4,0
3,0
2,0
1,0
0
0,08
0,16
0,24
0,32
0,40
0,48
0,56
0,64
0,72
0,80
0,88
0,96
1,00
$\varphi_6 \cdot \pi^{-1}$ (radiany)
FU-10
FU-03

Rys. 3

Należy podkreślić, że o ile dla gumy FU-03 charakterystyka sprężysta przy skręcaniu jest prawie liniowa, to dla gumy FU-10 jest wyraźnie nieliniowa.

Dla oceny dokładności obliczonych współczynników α_r wyznaczono dla poziomu ufności $p_o = 0,90$ i $k = 25 - 2$ stopni swobody, przedziały ufności $I^{(r)}$ [4]. Następnie określono dokładności obserwacji nierównością:

$$P\left\{ \gamma_1 \cdot \tilde{s} < \sigma < \gamma_2 \cdot \tilde{s} \right\} = p_o, \tag{5.7}$$

gdzie:

$\tilde{s}$ - ocena odchylenia standardowego błędów obserwacji,

γ_1, γ_2 - wartości granic przedziałów ufności,

σ - odchylenia standardowe.

I tak dla charakterystyki sprężystej gumy FU-03 (5.4) odpowiednie przedziały ufności wynoszą:

$$\begin{aligned} &\text{dla} \quad \alpha'_1: \; I^{(1)} = [1,0047;\; 1,0191], \\ &\text{dla} \quad \alpha'_2: \; I^{(2)} = [-0,0184;\; 0,0028]. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Dokładności obserwacji określa nierówność

$$0,0400 < \sigma < 0,0066. \tag{.59}$$

Natomiast dla charakterystyki sprężystej gumy FU-10 (5.6) uzyskano następujące przedziały ufności:

$$\begin{aligned} &\text{dla} \quad \alpha''_1: \; I^{(1)} = [1,2692;\; 1,3493], \\ &\text{dla} \quad \alpha''_2: \; I^{(2)} = [-0,2822;\; -0,3948]. \end{aligned} \tag{5.10}$$

oraz dokładność obserwacji

$$0,0214 < \sigma < 0,0352. \tag{5.11}$$

LITERATURA

[1] Green A.E., Zerna W.: Theoretical Elasticity, University Press, Oxford, 1960 r.

[2] Zahorski S.: A Form of the Elastic Potencial for Rubber Like Materials, Arch. Mech. Stos. 5, XI, 1959 r.

[3] Zahórski S.: Doświadczalne badania niektórych własności mechanicznych gumy, Rozpr. Inż. 1, 10, 1962 r.

[4] Linnik I.W.: Metoda najmniejszych kwadratów i teoria opracowywania obserwacji, PWN Warszawa 1962 r.

УПРУГАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РЕЗИНОВОГО ЦИЛИНДРА
ПРИ СКРУЧИВАНИИ

Р е з ю м е

В работе была определена упругая характеристика резинового цилиндра под нагрузкой крутящего момента M.

Применяя метод А.Е. Грина и более общий вид упругого потенциала для материалов каучуко-подобных было установлено, что упругая характеристика резинового цилиндра при чистом скручивании - нелинейная, мягкого типа.

Определённые упругие характеристики, полученные экспериментальным путём на образцах из двух сортов резины ФУ-03 и ФУ-10, подтвердили теоретические данные.

TORSION ELASTIC CHARACTERISTIC OF RUBBER
CIRCULAR CILINDER

S u m m a r y

In the paper a computation was carried out for a elastic characteristic of a rubber circular cilinder with a static load of the torsional moment M_s.

Using A.E. Green's method and using a more general form of the elastic potential for rubber - like materials it has been affirmed that a elastic characteristic of a rubber circular cilinder with pure torsion is the nonlinear soft type. Spesimens experimental elastic characteristics of two kinds: FU-03, and FU-10 have confirmed teoretical dates.