

JULIAN ZIELIŃSKI
Katedra Mechaniki Technicznej

CHARAKTERYSTYKA TŁUMIENIA ŁĄCZNIKA GUMOWEGO

Streszczenie: Przeprowadzono badania, których celem było wyznaczenie charakterystyki tłumienia dwuwarstwowego łącznika gumowego, pracującego przy obciążeniach okresowo zmiennych wywołujących odkształcenia postaciowe elementów gumowych. Wyznaczono charakterystykę tłumienia na drodze syntezy drgań ustalonych układu o jednym stopniu swobody przy zastosowaniu odwrotnej metody SCHWESINGERA.

1. Wstęp

Aby dokonać analizy ruchu układu, którego części składowe o pewnej masie i dużym stosunku sztywności własnych do sztywności więzów wykonują ruchy względne, konieczna jest znajomość tzw. charakterystyk ruchu. Są to funkcje, które ujmują działające na układ siły zachowawcze i dyssypacyjne, zależne od wzajemnej konfiguracji elementów konstrukcji i ich prędkości względnych. Funkcję, która ujmuje siły zachowawcze przyjęto nazywać charakterystyką sprężystą; funkcję ujmującą siły dyssypacyjne i określającą ubytek energii sprężystej podczas ruchu przyjęto nazywać charakterystyką tłumienia.

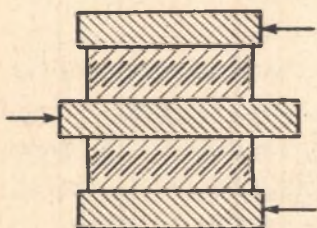
Dużą część podstawowej teorii układów mechanicznych dotyczy poszukiwań zamkniętej postaci ruchu przy małych odkształceniach i małych prędkościach odkształceń więzów, w zakresie których zakłada się liniowość charakterystyk. Założeń tych nie można jednak stosować dla układów z więzami wykonanymi z tworzyw o nieliniowych własnościach lepko-sprężystych, które w czasie ruchu doznają odkształceń skończonych przy dużych prędkościach względnych części układu.

Przykładem tego typu konstrukcji są maszyny wibracyjne rezonansowe z gumowymi więzami sprężystymi, służące do przeniesienia lub klasyfikacji ziarn ciał kopalnych. Są to układy dynamicznie jeszcze wystarczająco nie opracowane, z uwagi na brak dostatecznie dokładnych informacji dotyczących postaci charakterystyk łączników gumowych, które na skutek dużych odkształceń i dużych prędkości ruchu będą nieliniowe.

Badaniom poddano dwuwarstwowy łącznik gumowy pracujący przy obciążeniach okresowo zmiennych, wywołujących odkształcenia postaciowe elementów gumowych łącznika. Wyznaczono charakterystykę tłumienia na drzewce syntezy drgań układu mechanicznego o jednym stopniu swobody wymuszonych kinematycznie. Do wyznaczenia wymienionej charakterystyki zastosowano odwrotną metodę SCHWESINGERA.

2. Opis konstrukcji łącznika i stanowiska do pomiaru drgań

Łącznik (rys. 1) składa się z dwóch elementów gumowych prostopadłościennych o wymiarach 32x16x20 mm, połączonych z członem metalowym przez docisk oraz dodatkowe sklejenie odpowiednich powierzchni klejem kauczukowym. Wkładki wykonano z gumy o twardości $45 \pm 5 \text{ Sh}^0$ i wytrzymałości na rozciąganie $R_m = 169 \text{ kg/cm}^2$ oraz wydłużeniu 700%.



Rys. 1. Schemat łącznika gumowego

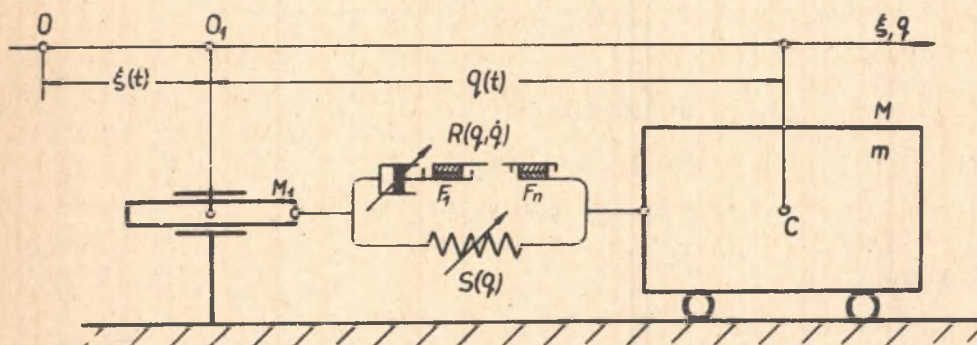
Stanowisko pomiarowe składa się z trzech głównych elementów:

- 1) masy,
- 2) mechanizmu wymuszenia,
- 3) mechanizmu napędu.

Badany łącznik wiąże masę z mechanizmem wymuszenia i stanowi element sprężynująco-tłumiący. Drgania masy, poprzez badany łącznik wymuszane są kinematycznie. Model stanowiska pokazano na rys. 2.

3. Matematyczne ujęcie zagadnienia

Rozpatrzmy drgania wymuszone układu przedstawionego na rys. 2. Ciało M o masie m powiązane jest z ciałem M_1 za pomocą łącznika, który reprezentuje fizyczne założenia odnośnie cha-



Rys. 2. Model stanowiska pomiarowego

rakterystyk ruchu i jednocześnie model mechaniczny, opisujący własności mechaniczne gumy. Ciało M_1 wykonuje drgania ściśle sinusoidalne, o amplitudzie i częstotliwości regulowanych w sposób ciągły. Niech ξ oznacza współrzędną siła M_1 względem nieruchomego układu odniesienia, q współrzędną określającą wychylenie ciała M względem drgającego ciała M_1 . Równanie ruchu ciała M w odniesieniu do jednostki masy ma postać

$$\ddot{q} + R(q, \dot{q}) + S(q) = -\ddot{\xi}, \quad (1)$$

gdzie:

$R(q, \dot{q})$ - charakterystyka tłumienia łącznika,

$S(q)$ - charakterystyka sprężysta łącznika,

$$\xi = h \sin \omega t,$$

h - amplituda drgań ciała M_1 ,

ω - częstotliwość wymuszenia.

Na funkcje $S(q)$ i $R(q, \dot{q})$, nakładamy warunki zgodne z własnościami mechanicznych, dyssypacyjnych układów drgających, a mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} S(q)q > 0 \\ S(-q) = -S(q), \\ S(0) = 0; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} R(q, \dot{q})\dot{q} &\geq 0, \\ R(-q, \dot{q}) &= R(q, \dot{q}), \\ R(q, -\dot{q}) &= -R(q, \dot{q}), \\ R(q, 0) &= 0, \\ R(0, \dot{q}) &\neq 0 \text{ dla } \dot{q}^2 \neq 0, \\ \text{dla } 0 < \dot{q}_1 < \dot{q}_2 &\text{ jest } R(q, \dot{q}_2) > R(q, \dot{q}_1) \geq 0, \\ \text{dla } 0 \leq |q_1| < |q_2| &\text{ jest } 0 \leq |R(q_1, \dot{q})| < |R(q_2, \dot{q})|. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Po podstawieniu $\xi = h \sin \omega t$ w prawą stronę równania (1) i uwzględnieniu przesunięcia fazowego między siłą wymuszającą $G(t) = -\xi(t)$ i wychyleniem $q(t)$ ciała M w samej funkcji $G(t)$, równanie (1) przyjmie postać

$$\ddot{q} + R(q, \dot{q}) + S(q) = G_s \sin \omega t + G_c \cos \omega t, \quad (4)$$

gdzie:

$$G_s = h \omega^2 \cos \theta \text{ i } G_c = h \omega^2 \sin \theta - \text{amplitudy składowych sinusowej i cosinusowej funkcji } G(t),$$

θ - kąt przesunięcia fazowego między $G(t)$ i $q(t)$.

Składowe G_s i G_c spełniają równanie

$$(G_s^2 + G_c^2)^{\frac{1}{2}} = h \omega^2. \quad (5)$$

Dla równania (4) założono istnienie rozwiązania w postaci kombinacji liniowej odpowiednio dobranych i liniowo niezależnych funkcji

$$q(t) = \Phi_0(t) + A_2 \Phi_2(t) + \dots + A_n \Phi_n(t). \quad (6)$$

Pierwszą funkcję $\Phi_0(t)$ należy dobrać tak, aby możliwie najlepiej aproksymowała rozwiązanie. Pozostałe człony spełniają rolę członów korekcyjnych funkcji $\Phi_0(t)$.

Ponieważ siła wymuszająca

$$G(t) = G_s \sin \omega t + G_c \cos \omega t \quad (7)$$

jest funkcją okresowo zmienną i układ jest tłumiony, to wychylenie $q(t)$ ciała M można przedstawić jako sumę skończoną następujących funkcji

$$q(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2 \omega t + \dots + A_n \sin n \omega t. \quad (8)$$

Stosując tylko pierwszy człon szeregu (8)

$$q(t) = A \sin \omega t \quad (9)$$

jako przybliżone rozwiązanie równania (4) otrzymuje się pozostałość

$$Q(t) = -A\omega^2 \sin \omega t + R(A \sin \omega t, A\omega \cos \omega t) + S(A \sin \omega t) + \\ - G_s \sin \omega t - G_c \cos \omega t. \quad (10)$$

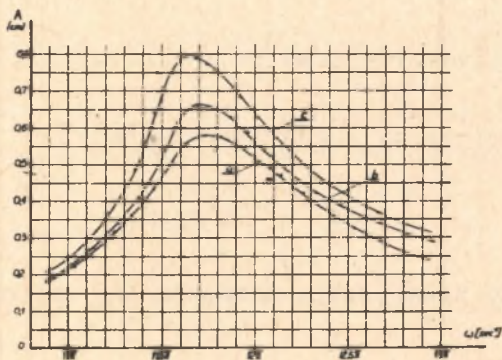
Pozostałość (10) ma wymiar siły przypadającej na jednostkę masy i można ją uważać jako siłę zaburzającą, działającą na masę spowodowaną przez harmoniczne wyższych rzędów.

O dokładności rozwiązania (9) można sądzić na podstawie tego, w jakim stopniu pozostałość (10) zbliża się do zera w pewnym ograniczonym przedziale czasu $t_1 \leq t \leq t_2$. Z uwagi na to,

że funkcja (9) jest funkcją okresową wybieramy przedział czasu równy okresowi tej funkcji. Jako kryterium dokładności rozwiązania przyjęto minimum wartości następującej całki

$$J = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} Q^2(t) dt. \quad (11)$$

Pozostałość $Q(t)$ określona równaniem (10) zależy nie tylko od czasu, ale również od amplitudy drgań $A = A(\omega)$ oraz od amplitudy siły wymuszającej, wyrażonej za pomocą składowych $G_S = G_S(\omega)$ i $G_C = G_C(\omega)$. Dla każdej częstości wymuszenia A , G_S , G_C spełniają rolę stałych i występują w pozostałości (10) oraz w całce (11). Ponieważ amplitudę drgań $A = A(\omega)$ masy układu wyznaczono doświadczalnie (rys. 3), poszukiwać będziemy



Rys. 3. Krzywe rezonansowe

a) $h = 0,05$ cm, b) $h = 0,08$ cm, c) $h = 0,1$ cm

wartości składowych G_S i G_C , które minimalizują całkę (11) w wybranym przedziale czasu. Minimum całki (11) otrzymuje się jeśli zostaną spełnione następujące warunki:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial G_S} &= \int_0^{2\pi} Q(\tau) \frac{\partial Q(\tau)}{G_S} d\tau = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial G_C} &= \int_0^{2\pi} Q(\tau) \frac{\partial Q(\tau)}{\partial G_C} d\tau = 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

gdzie:

$$\tau = \omega t.$$

Po podstawieniu (10) do równań (12) otrzymuje się:

$$G_S = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [S(q) - A\omega^2 \sin\tau] \sin\tau d\tau, \quad (13)$$

$$G_C = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R(q, \dot{q}) \cos\tau d\tau. \quad (14)$$

Składowe G_S i G_C określone równaniami (13) i (14) muszą spełniać równanie (5) oraz następujące równanie:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{G_C}{G_S}. \quad (15)$$

Zauważamy, że postępując teraz w kierunku odwrotnym tj. wyznaczając dla układu o nieznannej jednej z charakterystyk, funkcje $G_S = G_S(\omega)$ i $G_C = G_C(\omega)$, można dobrać funkcję $S(q)$ lub $R(q, \dot{q})$ wykorzystując w tym celu równania (13) i (14).

Opisaną metodę, jako odwrotną metodę SCHWESINGERA [7] zastosowano do wyznaczenia charakterystyki tłumienia łącznika. W tym celu charakterystykę sprężystą łącznika

$$S(q) = \frac{1}{m} \varphi(q) \quad (16)$$

wyznaczone przez aproksymację szeregiem potęgowym z nieparzystymi potęgami krzywej zależności siły od średnich wartości odkształceń łącznika przy obciążeniu statycznym (rys. 4)

$$\varphi(q) = a_1 q + a_2 q^3 + \dots + a_n q^{2n+1} \quad (17)$$

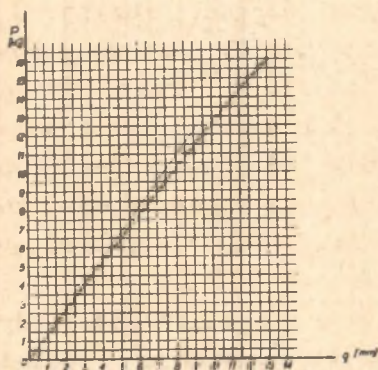
Stosując tylko pierwsze dwa wyrazy szeregu (17) otrzymuje się

$$S(q) = \alpha q + \beta q^3, \quad (18)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{a_1}{m},$$

$$\beta = \frac{a_2}{m}.$$



Rys. 4. Charakterystyka sprężysta łącznika

Współczynniki a_1 i a_2 funkcji (17) wyznaczone stosując metodę najmniejszych kwadratów. Po przeprowadzeniu niezbędnych obliczeń wymienione współczynniki mają wartość

$$a_1 = 13,333 \text{ kGcm}^{-1},$$

$$a_2 = -0,61 \text{ kGcm}^{-3},$$

$$\text{Masa } m = 0,0097 \text{ kGsec}^2 \text{cm}^{-1}.$$

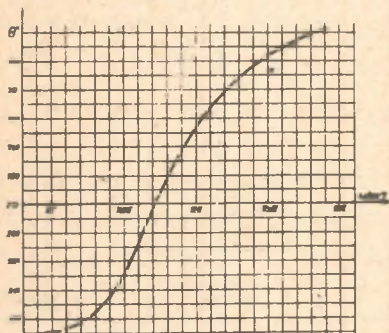
Podstawiając wartości a_1 , a_2 i m do (18) otrzymuje się

$$S(q) = 1374,23 q - 62,89 q^3. \quad (19)$$

Funkcję (18) wprowadzamy do równania (13) i po uwzględnieniu założonego przybliżonego rozwiązania (9) otrzymuje się po scałkowaniu

$$G_{\Sigma} = (\alpha - \omega^2)A + \frac{3}{4}\beta A^3. \quad (20)$$

Zależność funkcji (20) od częstości wymuszenia przedstawiono na wykresie rys. 6 (krzywa a).



Rys. 5. Kąt przesunięcia fazowego $\theta = \theta(\omega)$ $h = 0,08$ cm

Ciągowi wartości funkcji G_{Σ} przyporządkowany jest ciąg wartości funkcji G_0 , który można wyznaczyć korzystając z równania (15), jeśli znany jest ciąg wartości kąta przesunięcia fazowego dla każdej częstości wymuszenia.

Krzywa $\theta = \theta(\omega)$ dla amplitudy $h = 0,08$ cm przyjmuje postać przedstawioną na rys. 5.

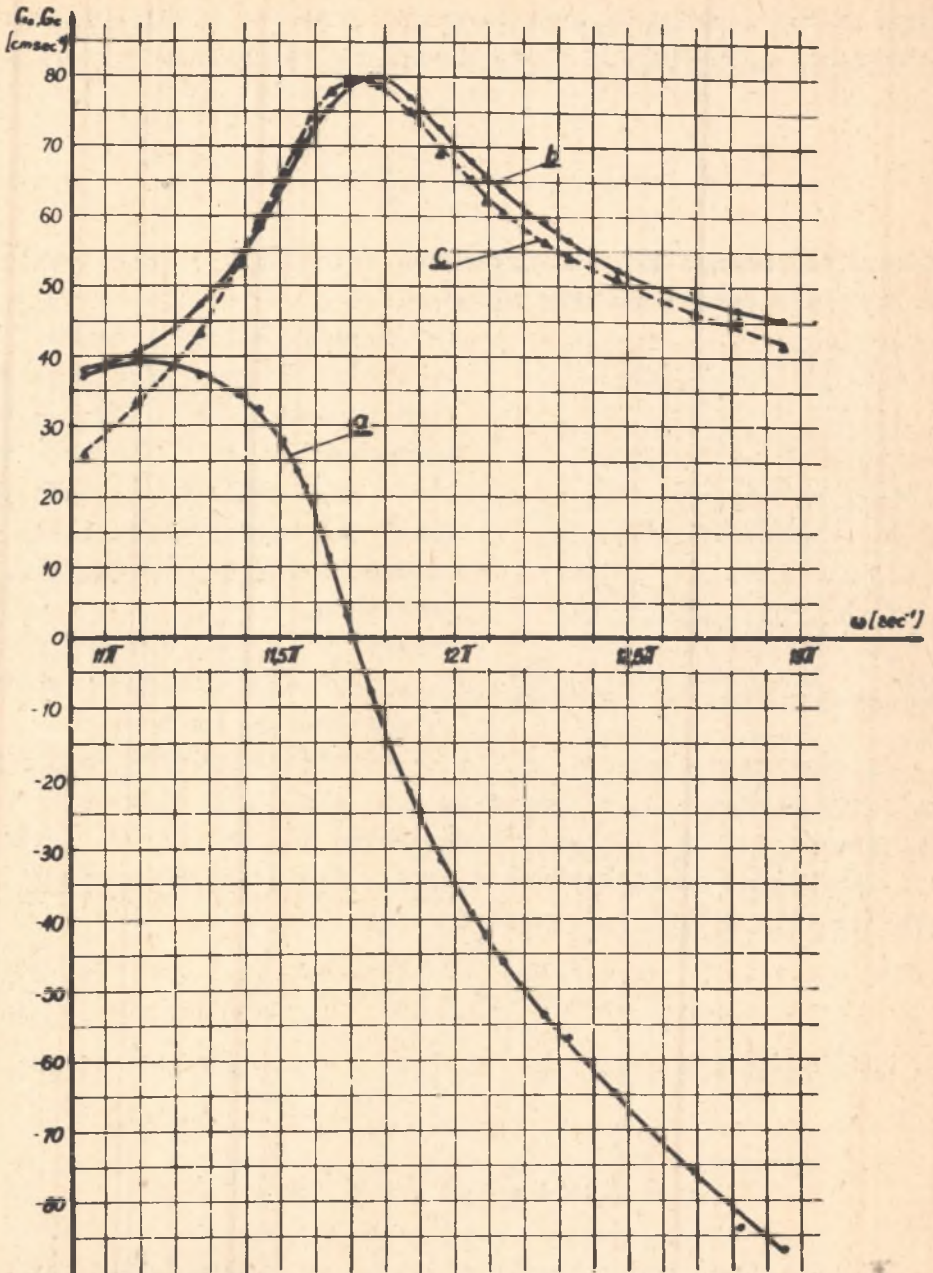
Podstawiając wartości G_{Σ} i odpowiednie wartości kąta przesunięcia fazowego θ do równania (15) obliczono ciąg wartości G_0 . Krzywa $G_0 = G_0(\omega)$ przyjmuje postać jak na rys. 6 (krzywa b). Zakładając analityczność funkcji $R(q, \dot{q})$ przy warunkach (3) przyjęto dla $R(q, \dot{q})$ następujące rozwinięcie:

$$R(q, \dot{q}) = C_1 \dot{q} + C_2 q^2 \dot{q} + C_3 \dot{q}^3. \quad (21)$$

Po podstawieniu funkcji (21) do (14) i scałkowaniu otrzymuje się

$$G_0 = C_1 A \omega + \frac{1}{4} C_2 A^3 \omega + \frac{3}{4} C_3 A^3 \omega^3. \quad (22)$$

Dalsze postępowanie będzie polegało na wyznaczeniu współczynników C_1 , C_2 , C_3 . Ten etap pracy sprowadzi się do rozwią-



Rys. 6. Składowe amplitudy siły wymuszającej - $h = 0,08$ cm
 a - składowa sinusowa G_s , b - składowa cosinusowa G_c ,
 c - składowa cosinusowa $G_0 = C_1 A\omega + \frac{1}{4} C_2 A^3 \omega + \frac{3}{4} C_3 A^3 \omega^3$

zania odpowiednio dobranego układu j ($j = 1, 2, 3$) równań algebraicznych na wymienione współczynniki

$$C_1 A^{(j)} \omega^{(j)} + \frac{1}{4} C_2 [A^{(j)}]^3 \omega^{(j)} + \frac{3}{4} C_3 [A^{(j)} \omega^{(j)}]^3 = G_0^{(j)}. \quad (23)$$

Układ równań (23) należy dobrać tak, aby po jego rozwiązaniu i podstawieniu wartości współczynników do (22) funkcja ta aproksymowała w sposób optymalny krzywą

$$G_0 = G_s \operatorname{tge} \theta. \quad (24)$$

Po przeprowadzeniu szeregu prób polegających na każdorazowym doborze, rozwiązaniu układu równań (23) i wykreślaniu krzywej aproksymującej, poszukiwane współczynniki przyjmują następujące wartości:

$$\begin{aligned} C_1 &= 3,93 \operatorname{seo}^{-1}, \\ C_2 &= 45,06 \operatorname{cm}^{-2} \operatorname{seo}^{-1}, \\ C_3 &= -0,0131 \operatorname{cm}^{-2} \operatorname{sec}. \end{aligned}$$

Krzywą aproksymującą (22) dla wyznaczonych współczynników pokazano na rys. 6 (krzywa c).

Po podstawieniu wartości współczynników C_1, C_2, C_3 do (21) poszukiwana charakterystyka tłumienia łącznika przyjmuje następującą postać:

$$R(q, \dot{q}) = 3,93 \dot{q} + 45,06 q^2 \dot{q} - 0,0131 \dot{q}^3. \quad (25)$$

LITERATURA

- [1] ALFREY T.: Mechanical Behavior of high Polimers. New York 1948.
- [2] BULGAKOW B.W.: Kolebanja. Moskwa 1954.
- [3] CUNNINGHAM W.J.: Introduction to Nonlinear Analysis. Toronto 1958.
- [4] DIETRICH J.: Teoria i budowa przesiewaczy. Katowice 1962.
- [5] GOBEL J.: Berechnung und Gestaltung von Gummifedern Berlin 1955.
- [6] KAUDERER H.: Nichtlineare Mechanik. Berlin 1958.
- [7] Mac DUFF J.N., COURRERI J.R.: Vibration Control. New York 1958.
- [8] PANOWKO J.G.: Ob ucete gisterezisnych poter w zadaczach prikladnoj teorii uprugosti ZTF T. XXIII, 1953.
- [9] PISARENKO G.S.: Kolebanja uprugich sistem z ucetom rossejanja energii w materjale. Kijów 1955.
- [10] TRELOAR L.: The Phisios of Rubber Elasticity. Oxford 1960.
- [11] ZIEMBA S.: Analiza drgań. Warszawa 1957.
- [12] ZIEMBA S.: Tarcie wewnętrzne przy uwzględnieniu mikroodkształceń plastycznych, Zag. Drgań Niel. T. 1. 1960.

ХАРАКТЕРИСТИКА ДЕМПФИРОВАНИЯ РЕЗИНОВОГО СОЕДИНИТЕЛЯ

Р е з ю м е

Были произведены исследования, которых целью являлось определение характеристики демпфирования двухслойного резинового соединителя, работающего при периодически переменных нагрузках, вызывавших структурные деформации резиновых элементов.

Характеристика демпфирования была определена путём синтеза установившихся колебаний системы с одной степенью свободы при применении обратного метода ШВЕЗИНГЕРА.

CHARAKTERISTIK OF THE SILENTBLOCK DAMPING

S u m m a r y

Investigations have been carried out aiming at determining of the double-layer silentblock damping, working under loads periodically variable and causing form deformations of rubber elements. The charakteristik of damping has been determined by means of the synthesis of fixed systems vibrations with one degree of freedom by adopting the reverse Schwesingers method.