ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966

Seria: MECHANIKA z. 25 Nr kol. 147

WALERY SZUŚCIK
Katedra Mechaniki Technicznej

WYZNACZANIE MOMENTÓW STATYCZNYCH BEZWŁADNOŚCI I DEWIACJI FIGUR PŁASKICH ZA POMOCĄ SIATEK

Streszczenie: W pracy podano sposób sporządzenia i stosowania siatek. Wywód przeprowadzono w sposób oryginalny i prosty a siatkę momentów dewiacji wyprowadzono i sporządzono po raz pierwszy

1. Wstęp

W płaskiej geometrii mas znane są różne metody wyznaczania wielkości statycznych takich, jak moment statyczny, bezwładności i dewiacji. Jedną z nich jest metoda siatek polegająca na wykonaniu następujących czynności:

1° - Przykłada się odpowiednią siatkę do powierzchni, dla której chcemy wyznaczyć daną wielkość statyczną; siatka ta narysowana jest na przejrzystej kalce lub celofanie w ten sposób, że każdy jej prostokącik odpowiada jednostce danej wielkości statycznej,

2° - Oblicza się ilość pól całkowicie mieszczących się wewnątrz tej powierzchni,

3° - Dodaje się połowę ilości pól tylko częściowo mieszczących się wewnątrz powierzchni.

Tak otrzymana liczba jest równa wartości liczbowej pożądanej wielkości statycznej.

W pracy [1] podano sposób wyznaczania momentów statycznych powołując się na pracę [2], w której podano między innymi sposób sporządzania siatek dla momentów bezwładności. W pracy niniejszej podano oryginalny sposób sporządzania siatek momentów statycznych i bezwładności, a siatkę momentów dewiacji wyprowadzono i sporządzono po raz pierwszy.

2. Wyznaczanie siatki dla momentów statycznych

Siatkę momentów statycznych uzyskuje się w ten sposób, że na osi odciętych przyjmuje się skalę $x_n = n$, natomiast na osi rzędnych taką skalę, aby prostokąty utworzone przez nią dały momenty statyczne względem osi x równe 1 (rys. 1):

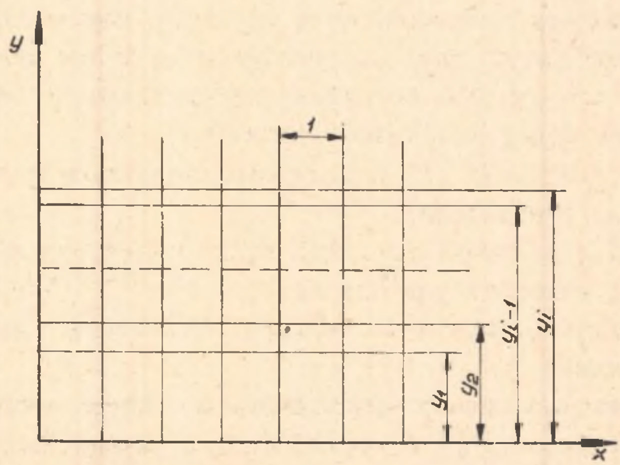
$$S = (y_i - y_{i-1})\,(x_n - x_{n-1})\,\frac{y_i + y_{i-1}}{2} =$$

$$= \frac{y_i^2 - y_{i-1}^2}{2} = 1. \qquad (1)$$

Warunek ten jest spełniony tylko dla

$$y_i = \sqrt{2i}. \qquad (2)$$

Do tego samego wyniku można dojść obliczając kolejno odległości kresek od osi x. Odległość pierwszej kreski od osi x mu-



Rys. 1. Wyznaczanie siatki momentów statycznych

si byó taka, aby uzyskane prostokąciki dały moment statyczny względem osi x równy 1

$$S_x = 1 \cdot y_1 \cdot \frac{y_1}{2} = 1,$$

skąd

$$y_1 = \sqrt{2}.$$

Odlęgłość drugiej kreski od osi x musi być taka, aby uzyskany prostokącik zawarty między nią, a osią x dał moment statyczny względem osi x równy 2:

$$S_x = 1 \cdot y_2 \cdot \frac{y_2}{2} = 2,$$

skąd

$$y = \sqrt{4}.$$

Odległość i-tej kreski, dającej z osią x prostokącik o momencie statycznym względem sosi x równym i wynosi

$$S_x = 1 \cdot y_i \cdot \frac{y_i}{2} = i,$$

skąd

$$y = \sqrt{2\, i}.$$

Otrzymano więo wynik zgodny ze wzorem (2).

Siatka momentów statyoznych jest zarazem siatką wskaźnika skręcania plastycznego w analogii Nadaia (którą to siatkę autor zastosował w pracy [3]), przy czym jedna kratka odpowiada w tym przypadku 2 cm^3.

3. Wyznaczanie siatki dla momentów bezwładności

Siatkę momentów bezwładności uzyskuje się w ten sposób, że na osi odciętych przyjmuje się skalę $x_n = n$, natomiast na osi rzędnych taką skalę, aby prostokąty utworzone przez nie dały momenty bezwładności względem osi x równe 1 (rys. 1):

$$I_x = (x_n - x_{n-1})\left[\frac{(y_i - y_{i-1})^3}{12} + (y_i - y_{i-1})\left(\frac{y_i + y_{i-1}}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{y_i^3 - y_{i-1}^3}{3} = 1. \tag{3}$$

Warunek ten spełnia tylko

$$y = \sqrt[3]{3\,i}. \tag{4}$$

Do tego samego wyniku można dojść obliczając kolejno:

1° – Odległość od osi x pierwszej kreski, dającej z osią x pola o momencie bezwładności względem osi x równym 1:

$$I_x = \frac{1\ y_1^3}{3} = 1;$$

stąd

$$y_1 = \sqrt[3]{3}.$$

2° – Odległość od osi x drugiej kreski, dającej z osią x pola o momencie bezwładności względem osi x równym 2:

$$I_x = \frac{1\ y_2^3}{3} = 2;$$

stąd

$$y_2 = \sqrt[3]{6}.$$

3^o - Odległość i-tej kreski, dającej z osią x pola o momencie bezwładności względem osi x równym i:

$$I_x = \frac{1\ y_i^3}{3} = i;$$

stąd

$$y_i = \sqrt[3]{3\ i}.$$

Otrzymano więc wynik zgodny ze wzorem (4).

4. Wyznaczanie siatki dla momentów dewiacji

Siatka momentów dewiacji musi mieć oś symetrii pod kątem 45^o do osi odciętych x i rzędnych y, dlatego też osie te muszą mieć tą samą skalę.

Narysujmy proste x_i = const i y_i = const spełniające warunek, że dla $x_i = y_i$ moment dewiacji pola zawartego miedzy osiami x, y i prostymi x_i = const i y_i = const względem osi xy jest równy i^2:

$$D_{xy} = x_i\ y_i\ \frac{x_i}{2}\ \frac{y_i}{2} = i^2, \tag{5}$$

stąd

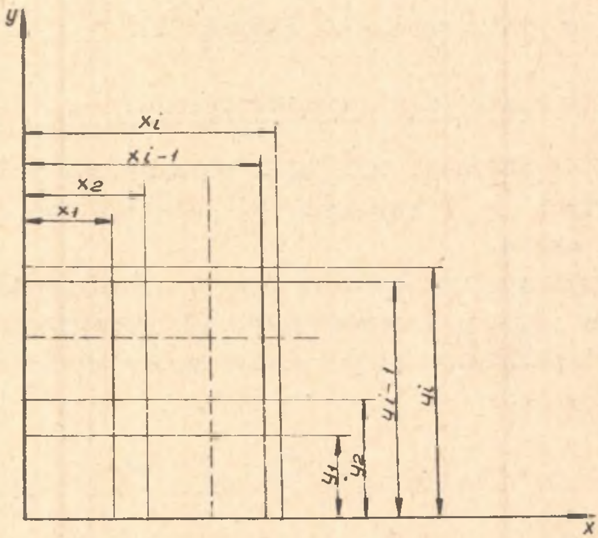
$$x_i = y_i = \sqrt[4]{4\ \ i^2} = \sqrt{2}\ i. \tag{6}$$

Jeżeli wykażemy, że każdy z prostokącików uzyskanych za pomocą takiej siatki daje moment dewiacji względem osi xy równy jedności, to tak sporządzona siatka jest siatką dla momentów dewiacji.

Moment dewiacji jednego prostokącika względem osi xy wynosi

$$D_{xy} = (x_k - x_{k-1})(y_i - y_{i-1}) \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \frac{y_i + y_{i-1}}{2} =$$

$$= \frac{(x_k^2 - x_{k-1}^2)(y_i^2 - y_{i-1}^2)}{4}. \tag{7}$$



Rys. 2. Wyznaczanie siatki momentów dewiacji

Po podstawieniu zależności (6) do (7) otrzymamy

$$D = \frac{[2i - 2(i-1)][2k - 2(k-1)]}{4} = 1.$$

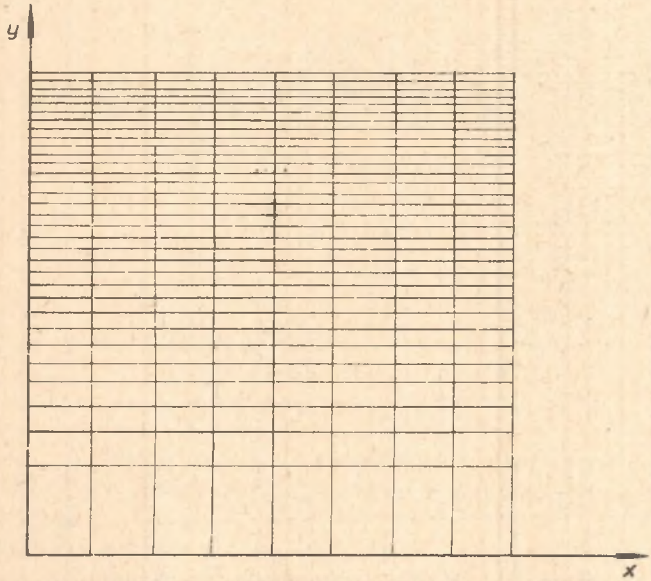
Siatka o skali

$$\left.\begin{aligned} x &= 2i, \\ y &= 2k, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

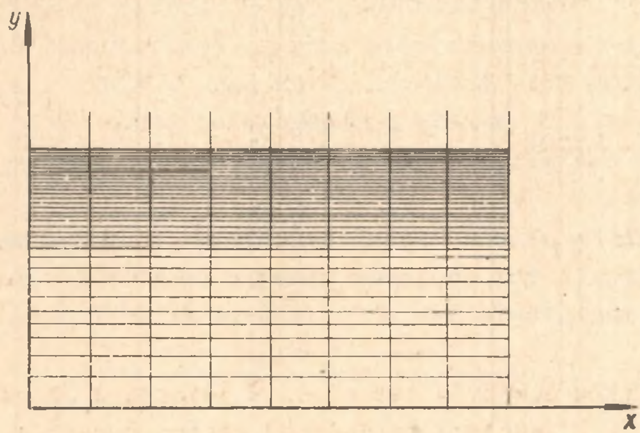
jest więc siatką momentów dewiacji. W związku z identycznością wzorów (8) i (2) jest ona "podwójną" siatką momentów statycznych.

6. Stosowanie siatek

Chcąc obliczyć pewną wielkość statyczną danej figury płaskiej należy do jej rysunku, wykonanego w skali naturalnej przyłożyć odpowiednią siatkę, tzn. dla momentu statycznego siatkę wg rys. 3, dla momentu bezwładności - wg rys. 4, a dla momentu dewiacji wg rys. 5. Ta ostatnia siatka sporządzona została na

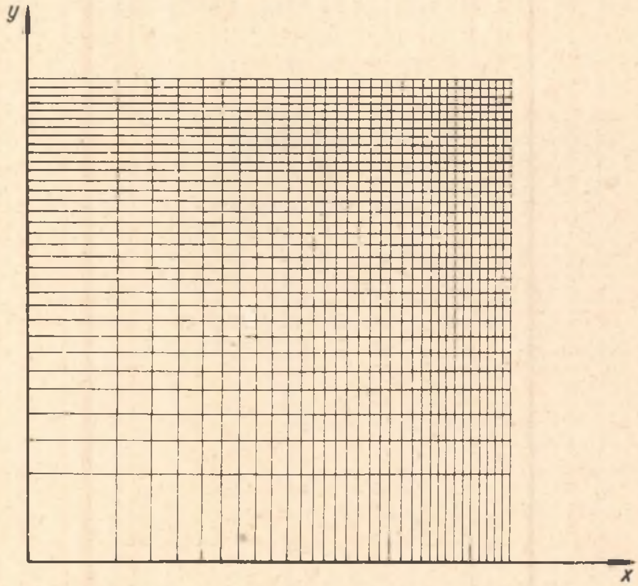


Rys. 3. Siatka momentów statycznych



Rys. 4. Siatka momentów bezwładności

podstawie wzoru (8). Siatkę trzeba przyłożyć w ten sposób, aby oś x lub w przypadku momentu dewiacji osie x,y pokrywały się z osiami, względem których obliczamy daną wielkość statyczną.



Rys. 5. Siatka momentów dewiacji

Liczba pól n obliczona tak, jak to podano we wstępie jest wielkością danego momentu statycznego, bezwładności lub dewiacji. Jeżeli dane pole zostanie narysowane w skali 1:s, to otrzymaną liczbę n należy pomnożyć albo przez s^3, aby uzyskać moment statyczny, albo przez s^4, gdy obliczamy momenty drugiego rzędu.

Podstawiona tu metoda siatek jest łatwa w zastosowaniu i znacznie usprawnia tok obliczeń przy projektowaniu belek na dopuszczalne naprężenie lub na dopuszczalny udźwig [3].

LITERATURA

[1] Lawina M.: Wyznaczenie momentów statycznych i położeń środków geometrycznych za pomocą siatek. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Górnictwo, Zeszyt 2.

[2] Spiegler A.: Graphisohe Ermittlung von Momenten mittels Hilfsraster. VDI, 1942 str. 378.

[3] Szuścik W.: Stan graniozny profilów stalowej obudowy górniczej. Praoa doktorska - niepublikowana. Biblioteka Politechniki Śląskiej.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ, ИНЕРЦИИ И ДЕВИАЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР ПРИ ПОМОЩИ СЕТОК

Р е з ю м е

В работе представлено способы изготовления и применения сеток. Доказательство проведено оригинально и просто, а сетку моментов девиации изготовлено впервые.

Метод сеток состоит в том, что к нарисованной плоской фигуре прикладывается прозрачный целлофан с нарисованной сеткой, в которой каждое отверстие отвечает единице статического момента, инерции или девиации и подсчитывается количество отверстий, находящихся на плоской фигуре полностью, и количество отверстий, покрывающих её частично.

DETERMINATION OF STATICAL MOMENTS, INERTIA AND PLANE FIGURES DEVIATIONS BY MEANS OF NETWORKS

S u m m a r y

In the paper the ways of making and applying networks have been given. The deduction has been made in a new and simple way,and the network of deviation momenta was derived and made for the first time.

The network method depends upon laying of a network on the drawn plane figure delineated on the transparent cellophane. In the network each mesh corresponds to the units of the statical momentum, inertia or deviation; we count then the complete number of meshes being on the plane figure and the number of meshes covering it partially.