

ANTONI JAKUBOWICZ, ROMAN KLUS  
Katedra Mechaniki Technicznej

WPLYW WSTĘPNYCH ODKSZTAŁCEN TRWAŁYCH  
ORAZ WIELKOŚCI PROMIENIA KRZYWIZNY KOLANA RUROWEGO  
NA JEGO SZTYWNOŚĆ ZGINANIA

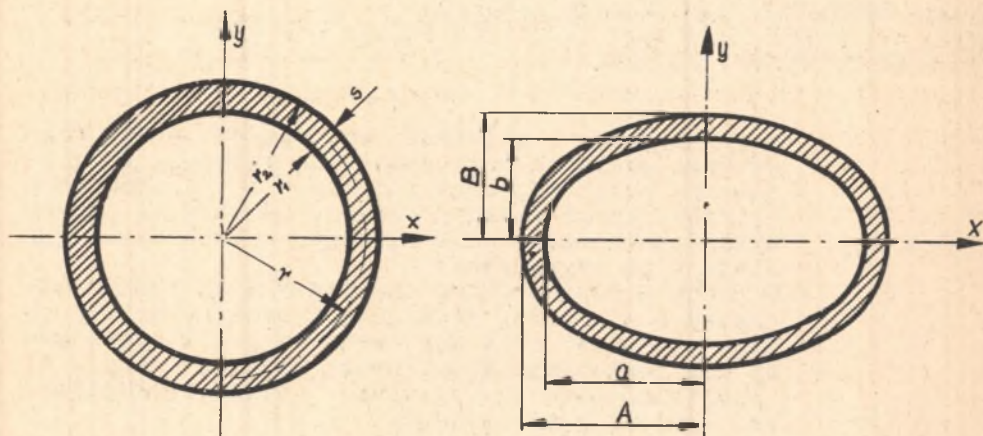
**Streszczenie:** W kolanach wykonanych przez plastyczne wygięcie rury występuje wstępne zowalizowanie przekroju oraz różnice w grubościach ścianek. Znane metody Karmana, Lorenza i innych wyznaczenia sztywności zginania kolana nie uwzględniają tych czynników.

W pracy przeprowadzono analizę wpływu tych odchyłek i wielkości promienia krzywizny kolana na jego sztywność oraz wyprowadzono odpowiednie wzory dla obliczenia dodatkowego współczynnika  $K_1$  umożliwiającego skorygowanie sztywności wyznaczanej wymienionymi metodami.

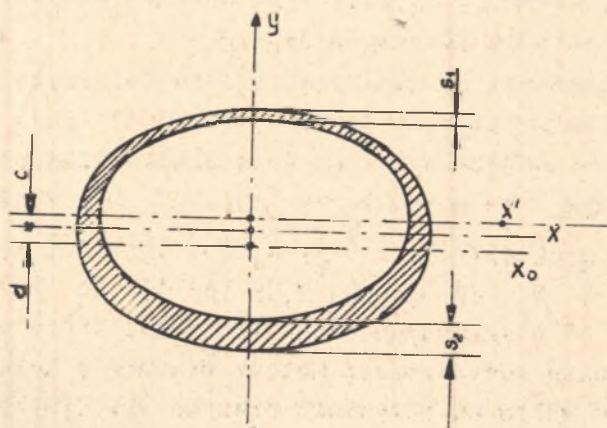
### 1. Uwagi ogólne

Dla rur stalowych bez szwu o średnicy zewnętrznej  $d_z$  od 25 mm do 108 mm kolana wykonuje się przez gięcie rury na zimno bądź też na gorąco. Wskutek takiego kształtowania kolan poprzednio okrągły przekrój rury przybiera kształt owalny (rys. 1). Miarą zowalizowania przekroju jest  $\omega_1 = \frac{r_2 - B}{r_2}$ . Dopuszcza się [1] w zależności od wielkości promienia gięcia rury maksymalne odchyłki  $\omega_1$  od 0,04 do 0,16 (od 4% do 16%). Grubość ścianki rury na zewnętrznym łuku kolana ulega zmniejszeniu, zaś na wewnętrznym łuku pogrubieniu (rys. 2). Dopuszcza się [1] odchyłki w grubości  $\omega_2 = \frac{s - s_2}{s}$ , w zależności od średnicy rury i grubości  $s$ , od 0,10 do 0,18 (od 10% do 18%). Te wstępne odchyłki od pierwotnych kształtów rury, które muszą pojawiać się w wyniku zastosowanej metody wykonania kolan, mają niewątpliwie wpływ na sztywność oraz na wytrzymałość kolan.

Traktowanie w ustroju rurowym rurociągu kolana jako pręta krzywego i stosowanie w obliczeniach metod teorii prętów, której podstawą jest założenie płaskiego niezmiennego w swym kształcie przekroju, prowadzi do znacznego przecenienia sztywności kolana w porównaniu z wynikami praktyki technicznej.



Rys. 1



Rys. 2

Kolano rury dzięki względnej cienkości ścianek odbiega od modelu pręta i przybliża się do powłoki cienkościennej. W szczególności przy zginaniu zachowuje się sprzecznie z wspomnianym założeniem stałości kształtów przekroju. Okrągły przekrój pierścieniowy ulega w trakcie zginania owalizacji, co w rezultacie pociąga za sobą zmniejszenie się jego sztywności. Poprawne i proste rozwiązania zagadnienia przez zastosowanie ogólnej przybliżonej metody Ritz'a, uzyskał Th. Karman [2].

Wprowadził on współczynnik  $K^x$  zmniejszający efektywną sztywność zginania kolana ( $K < 1$ ) ze sztywności prętowej  $EI$  ( $E$  - moduł Younga,  $I$  - moment bezwładności przekroju rury) na  $EIK$ , przy czym

$$K = \frac{1 + 12 \lambda^2}{10 + 12 \lambda^2} \quad (1.1)$$

gdzie  $\lambda = \frac{R s}{r^2}$  ( $R$  - promień krzywizny kolana,  $s$  - grubość rury,  $r$  - średni promień przekroju rury).

Clarc i Reissner [3] podali nieco inną metodę wyznaczania współczynnika  $K$  oraz wykazali, że późniejsze rozwiązania uzyskane przez Lorenza [4], Karla [5], Beskina [6] różnią się od rozwiązania Karmana w istocie tylko uwzględnieniem większej ilości wyrażen rozwinięcia w szereg podstawowego równania teorii Karmana. Przegląd prac związanych z omawianym zagadnieniem można znaleźć w pracy [7].

Konfrontacja wyników zastosowania wspomnianych metod obliczeń z wynikami praktyki technicznej prowadzi do stwierdzenia, że rzeczywista sztywność kolana jest nieco mniejsza od wyliczonej.

Przyczyną rozbieżności wyników teoretycznych z doświadczeniem nie jest wyłącznie przybliżoność wywodów teoretycznych, lecz w głównej mierze fakt wstępnej owalizacji przekroju ko-

<sup>x)</sup> Liczbą Karmana niekiedy nazywają  $\frac{1}{K}$ .

lana i wstępnych zmian grubości ścianki, czego w obliczeniach nie uwzględnia się. Nie uwzględnia się również i tego, że "sztywność prętowa" kolana jest zależną od promienia jego krzywizny.

## 2. Wpływ wstępnego zowalizowania przekroju i różnic w grubościach ścianek na moment bezwładności przekroju kolana

Biorąc pod uwagę charakter wywodów teoretycznych oraz względnie małą wielkość wstępnych odchyłek, wpływ ich na współczynnik  $K$  będzie nieistotny pod warunkiem, że pod  $I$  będziemy rozumieli odpowiednią wielkość charakteryzującą sztywność prętową kolana po uwzględnieniu wstępnej owalizacji i nierównomierności grubości ścianek.

Zakładamy, że okrągły przekrój rury (rys. 1a) spłaszczy się (zowalizuje) wstępnie przyjmując kształt elipsy (rys. 1b). Ponieważ dopuszczalne spłaszczenia przy stosowanych w budowie kotłów promieniach gięcia są małe, przyjmujemy w dalszych obliczeniach:

$$r_2 \approx \frac{A+B}{2} \approx \sqrt{AB}; \quad r_1 \approx \frac{a+b}{2} \approx \sqrt{ab} \quad (2.1)$$

Moment bezwładności przekroju rury kotłowej względem osi  $x$  wynosi

$$I_x = \frac{\pi}{4} (r_2^4 - r_1^4), \quad (2.2)$$

zaś rury zowalizowanej

$$I_{x \text{ ow}} = \frac{\pi}{4} (AB^3 - ab^3) \quad (2.3)$$

Po wykorzystaniu zależności (2.1) i wprowadzeniu oznaczenia

$$\omega_1 = \frac{r_1 - B}{r_2} = \frac{r_1 - b}{r_1} \quad (2.4)$$

uzyskujemy

$$I_{x_{ow}} = \frac{\pi}{4} (r_2^4 - r_1^4) (1 - \omega_1)^2 \quad (2.5)$$

lub

$$I_{x_{ow}} = I_x (1 - \omega_1)^2 \quad (2.6)$$

Zakładamy, że zmiana grubości ścianek (rys. 2) da się wyrazić przez przesunięcie osi elipsy wewnętrznej (oś  $x'$ ) względem elipsy zewnętrznej (oś  $x$ ) o wielkość  $c$

$$c = \frac{s_1 - s_2}{2} \quad (2.7)$$

Powoduje to przesunięcie środka ciężkości przekroju o odcinek  $d$ . Z warunku momentów wynika

$$AB \pi d - ab \pi (c + d) = 0$$

Wykorzystując zależności (2.1), wyznaczamy przesunięcie  $d$

$$d = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} c \quad (2.8)$$

Wyznaczony moment bezwładności względem osi  $x_0$ , z uwzględnieniem różnic w grubościach ścianek

$$I_{x_0_{ow}} = \frac{\pi}{4} AB^3 + AB \pi d^2 - \frac{\pi}{4} ab^3 - ab \pi (c + d)^2 \quad (2.9)$$

Korzystając z zależności (2.1), (2.4) i (2.5) przekształcamy wyrażenie (2.9) do postaci

$$I_{x_0_{ow}} = \frac{\pi}{4} (r_1^4 - r_2^4) \left[ (1 - \omega_1)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{c}{r_1 - r_2} \right)^2 \right] \quad (2.10)$$

Wprowadzamy do (2.10) oznaczenie

$$\omega_2 = \frac{s - s_2}{s} = \frac{c}{r_2 - r_1} \quad (2.11)$$

i po uwzględnieniu (2.2) uzyskujemy

$$I_{x_0ow} = I_x \left[ (1 - \omega_1)^2 - \frac{1}{2} \omega_2^2 \right]$$

lub

$$I_{x_0ow} = I_x \left( 1 - 2\omega_1 + \omega_1^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2 \right) \quad (2.12)$$

Jak wynika z (2.12) wpływ zmian grubości ścianek (w zakresie dopuszczalnych wartości) na moment bezwładności przekroju kolana jest znacznie mniejszy, niż wpływ wstępnego zowalizowania przekroju.

### 3. Wpływ wielkości promienia krzywizny kolana na jego sztywność "pretowa"

Dla kolana zginanego, traktowanego jako pręt krzywy, odkształcenie określa związek

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{M}{I' E} + \frac{M}{R^2 EA} \quad (3.1)$$

gdzie  $R$  - promień krzywizny kolana,  $A$  - pole powierzchni przekroju,  $I'_x = \int_A \frac{Ry^2}{R+y} dA$  = wielkość charakterystyczna przekroju (odpowiednik momentu bezwładności przy zginaniu pręta prostego),  $E$  - moduł Younga,  $M$  - moment gnący.

Dla uproszczenia wyliczeń wielkości  $I'$  rozwijamy funkcję podcałkową w szereg

$$I'_x = \int_A \frac{Ry^2}{R+y} dA = \int_A \left[ 1 - \frac{y}{R} + \left(\frac{y}{R}\right)^2 - \left(\frac{y}{R}\right)^3 + \left(\frac{y}{R}\right)^4 + \dots \right] y^2 dA,$$

stąd

$$I'_x = I_x - \frac{1}{R} \int_A y^3 dA + \frac{1}{R^2} \int_A y^4 dA - \frac{1}{R^3} \int_A y^5 dA + \frac{1}{R^4} \int_A y^6 dA + \dots \quad (3.2)$$

Dla przekrojów symetrycznych całki potęg nieparzystych zerują się i otrzymujemy

$$I'_x = I_x + \frac{1}{R^2} \int_A y^4 dA + \frac{1}{R^4} \int_A y^6 dA + \frac{1}{R^6} \int_A y^8 dA + \dots \quad (3.3)$$

Wyznaczamy moment bezwładności  $I_x$  oraz wielkość  $I'_x$  dla przekroju w kształcie cienkiego pierścienia (rys. 3)  $y = r \sin \varphi$ ,  $dA = rs d\varphi$ ,  $I_x = r^3 \pi s$ ,

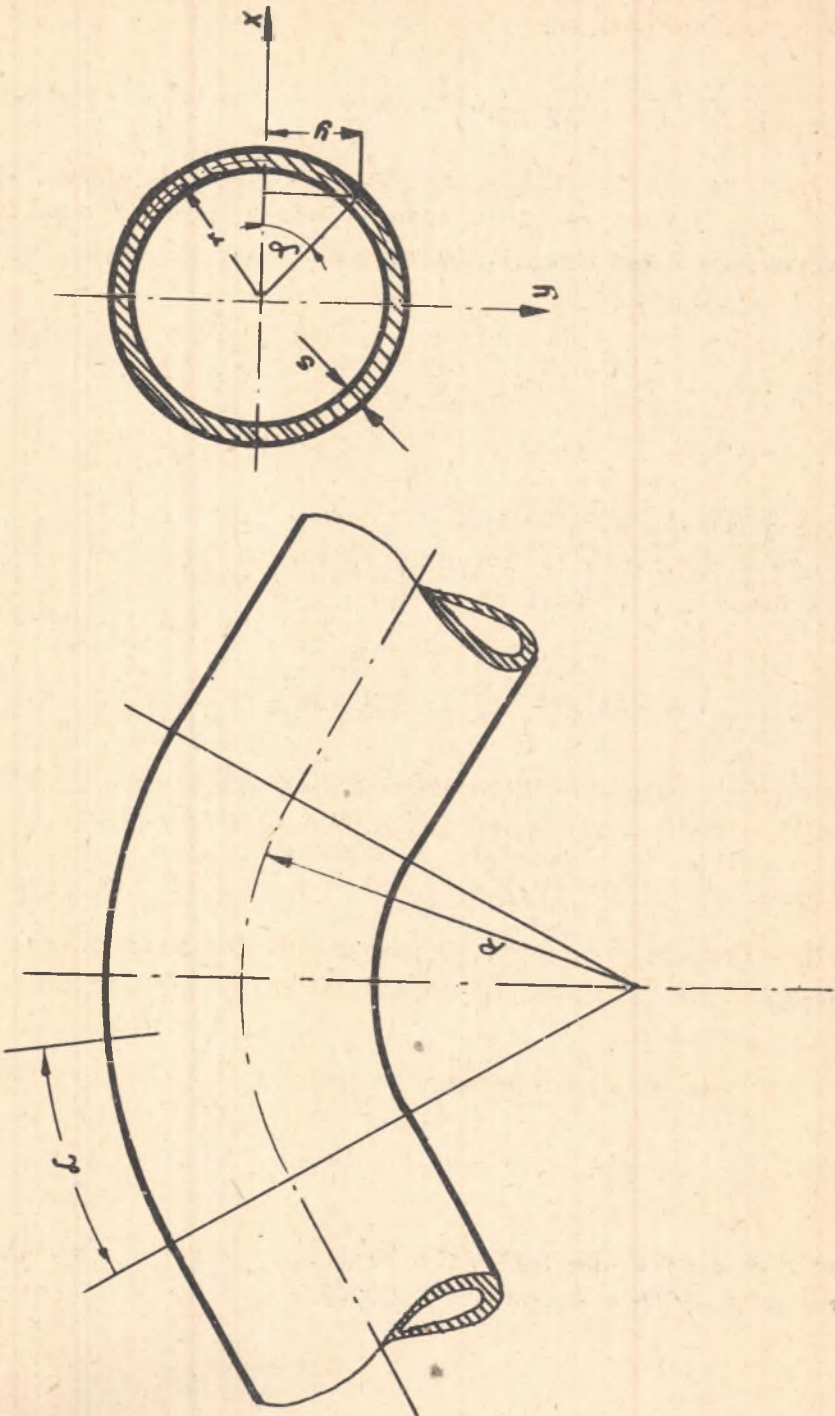
$$I'_x = I_x + \frac{2r^5 s}{R^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi + \frac{2r^7 s}{R^4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi d\varphi + \frac{2r^9 s}{R^6} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^8 \varphi d\varphi \quad (3.4)$$

Oznaczamy

$$\frac{r}{R} = a, \quad (3.5)$$

$$I'_x = I_x (1 + \frac{3}{4} a^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} a^4 + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} a^6 + \dots)$$

W praktyce największa wartość  $a$  wynosi  $a = \frac{1}{3,6}$ , wówczas  $I'_x = I_x (1 + 0,05768 + 0,00036 + 0,00002 + \dots)$ .



Rys. 3



W obliczeniach przyjmujemy

$$I'_x = I_x \left( 1 + \frac{3}{4} a^2 \right) \quad (3.6)$$

Z wystarczającą dla praktyki dokładnością można przyjąć, że wielkość  $I'_{x_{ow}}$  dla przekroju zowalizowanego o nierównomiernej grubości<sup>0</sup> ścianek wyrazi się wzorem

$$I'_{x_{ow}} = I_x \left( 1 - 2 \omega_1 + \omega_1^2 - \frac{1}{2} \omega_2^2 \right) \left( 1 + \frac{3}{4} a^2 \right) \quad (3.7)$$

lub

$$I'_{x_{ow}} = I_x x \quad (3.8)$$

gdzie

$$x = x_1 - x_2 = (1 - 2 \omega_1 + \omega_1^2) \left( 1 + \frac{3}{4} a^2 \right) - \frac{1}{2} \omega_2^2 \left( 1 + \frac{3}{4} a^2 \right) \quad (3.9)$$

Na wykresie (rys. 4) podano zależność  $x_1$  w zakresach dopuszczalnych odchyłek występujących w budowie rurociągów.

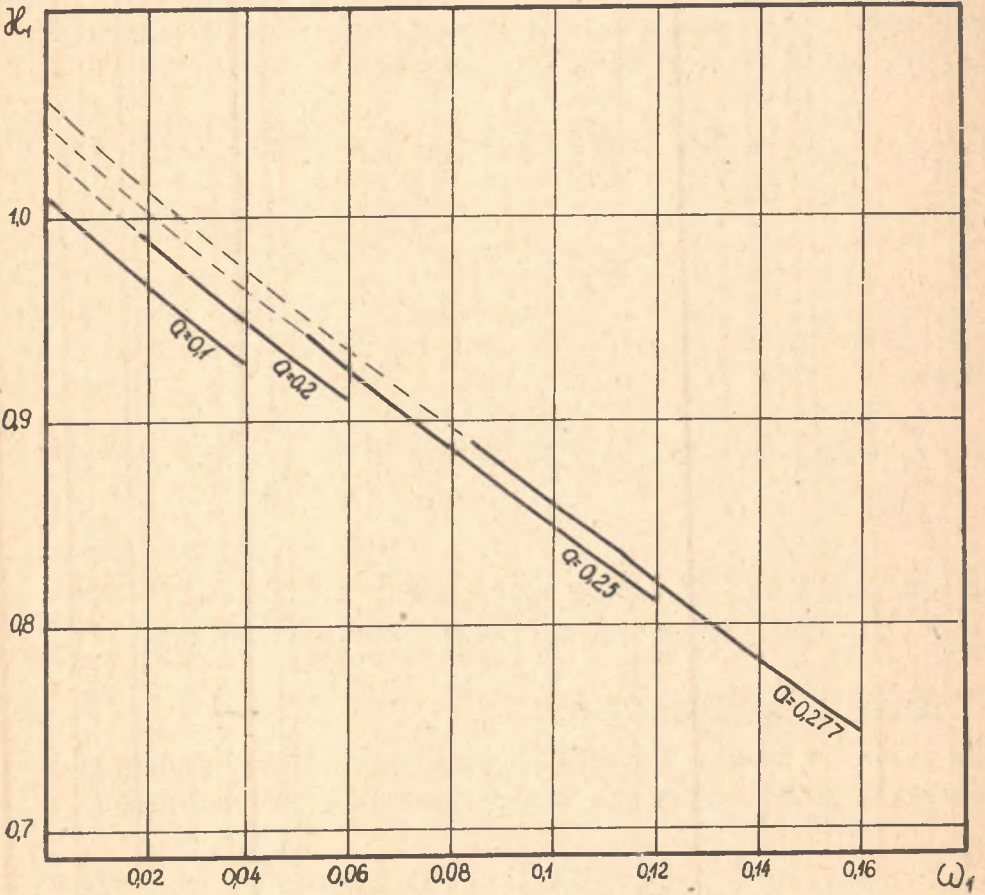
#### 4. Sztywność zginania kolana

Jak wynika z treści poprzednich paragrafów dla wyznaczenia odkształceń kolana zginanego należy formułę (3.1) skorygować

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{M g}{EI_x K x} + \frac{M g}{R^2 EA} \quad (4.1)$$

lub

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{M g}{EI_x} \left[ \frac{1}{K x} + \left( \frac{1}{R} \right)^2 \right] \quad (4.2)$$



Rys. 4

Tutaj "i" oznacza promień bezwładności

$$i^2 = \frac{1}{4} (r_2^2 + r_1^2) \quad (4.3)$$

lub po uwzględnieniu, że  $r_1 = r - \frac{s}{2}$ ,  $r_2 = r + \frac{s}{2}$

$$i^2 = \frac{1}{8} (4 r^2 + s^2) \quad (4.4)$$

Stąd  $(\frac{i}{R})^2 = \frac{1}{8} [4 (\frac{r}{R})^2 + (\frac{s}{R})^2]$ , a ponieważ  $(\frac{s}{R})^2 \ll 4 (\frac{r}{R})^2$ , przeto możemy przyjąć

$$(\frac{i}{R})^2 = \frac{1}{2} a^2 \quad (4.5)$$

Po podstawieniu do wzoru (4.2) wielkości (4.5) uzyskujemy

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{M s}{EI_x \frac{x}{1 + \frac{1}{2} x Ka^2}} \quad (4.6)$$

A zatem sztywność zginania kolana uzyskamy przez pomnożenie sztywności prętowej rury  $EI_x$  przez  $K \cdot K_1$ , gdzie  $K$  jest współczynnikiem Karmana, lub innym tego typu współczynnikiem podanym w pracach [4], [5], [6], zaś

$$K_1 = \frac{x}{1 + \frac{1}{2} x Ka^2} \quad (4.7)$$

Dla występujących w praktyce wielkości  $\frac{1}{2} x Ka^2 \ll 1$ , przeto z wystarczającą dla praktyki dokładnością można przyjąć

$$K_1 \cong x.$$

Ponieważ wpływ różnic grubości ścianek jest nieznaczny w stosunku do wpływu wstępnego zowalizowania, przeto można nawet przyjąć  $K_1 = x_1$ .

## LITERATURA

- [1] Polska Norma  $\frac{PN-59}{H-74252}$  "Rury stalowe kotłowe bez szwu"
- [2] von Karman, Th. Über die Formänderung dünnwandiger Rohre insbesondere federnder Ausgleichrohre. Z.V.D.I. Bd 55 1911.
- [3] Clark R.A., Reissner E.: Bending of Curved Tubes. Advances in Applied Mechanics vol.2. Academic Press Inc. 1951 p.93-112.
- [4] Lorenz H.: Die Biegung krummer Rohre. Z. Physik. Bd 13. 1912 s. 768-774.
- [5] Karl H.: Biegung gekrümmter, dünnwandiger Rohre. Z. Angew. Math. Mech. Bd. 23 1943 s. 331-345.
- [6] Beskin L.: Bending of Curved Tubes. Journal of Applied Mechanics vol. 12 1945 p. 1-7.
- [7] Borkowski S.: Przegląd prac dotyczących zagadnienia Karmana. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Budownictwo 12, 1964, 14.

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ  
И РАДИУСА КРИВИЗНЫ КОЛЕНА ТРУБЫ НА ЖЕСТКОСТЬ ИЗГИБА

Р е з ю м е

В коленах изготовленных путем пластического изгиба трубн выступает переход сечения в овал и дифференцирование толщины стенок. Известные методы Кармана, Лоренца и других исследователей не учитывают этих факторов. В работе произведен анализ влияния этих отклонений и величины радиуса кривизны колена на его жесткость и выведены соответствующие формулы для расчета коэффициента  $K_1$  позволяющего произвести коррекцию жесткости, определенной по названным методам.

THE INFLUENCE OF PERMANENT DEFORMATION AND BEND RADIUS OF  
THE PIPES ELBOW ON ITS STIFFNESS

S u m m a r y

The elbows made by the plastic bending of pipes show out an ovalisation o cross section and difference in wall thickness. Generally known methods of determination of the stiffness of elbow bending, given by Karman, Lorenz and others, do not take these factors into consideration.

In the paper the analysis of influence of ovalisation and an elbow bend radius on the elbow stiffness in given as well as the proper formulas for calculation the additional coefficient  $K_1$ , which makes possible correction of stiffness determined by methods mentioned above.