ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

MECHANIKA

Z. 67
GLIWICE
1978

SPIS TREŚCI

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 584

EUGENIUSZ ŚWITOŃSKI

PROBLEMY DYNAMIKI PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH

PL ISSN 0434-0817

GLIWICE 1978

OPINIODAWCY

Prof. dr hab. inż. Oswald Mateja

Doc. dr hab. inż. Józef Wojnarowski

REDAKTOR NACZELNY WYDAWNICTW UCZELNIANYCH POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Jan Bandrowski

REDAKTOR DZIAŁU

Jan Darlewski

SEKRETARZ REDAKCJI

Jan Znamirowski

OPRACOWANIE EDYTORSKIE

Anna Błażkiewicz

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

Druk wykonano z makiet dostarczonych przez Dział Wydawnictw

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Kujawska 2

Nakł. 150+85 Ark. wyd. 4,77 Ark. druk. 5 Papier offsetowy kl. V 70x100, 70 g
Oddano do druku 30.10.1978 Podpis. do druku 30.10.1978 Druk ukończ. w listop. 1978
Zam. 1285/78 Cena zł 12,—

**Fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach**

1. WSTĘP

1.1. Cel i zakres pracy

Tendencje do realizowania coraz lżejszych i oszczędniejszych konstrukcji, pod względem zużycia materiałów, przejawiają się między innymi w projektowaniu konstrukcji cienkościennych. Istnieje szereg konstrukcji cienkościennych, które - ze względu na swoje cechy geometryczne i charakter obciążenia - mogą być modelowane w obliczeniach stereomechanicznych prętem cienkościennym (elementy samolotu, kadłuby okrętów i pojazdów specjalnych, niektóre elementy budowlane itp.).

W obliczeniach stereomechanicznych prętów cienkościennych elementarna teoria obliczeniowa naprężeń i odkształceń, oparta na założeniu płaskich przekrojów, na ogół nie może być stosowana. Z tego względu wynikła konieczność opracowania teorii, która by bardziej adekwatnie oddawała rzeczywistą pracę tego typu konstrukcji.

W teorii prętów cienkościennych wprowadza się następujące dwa podstawowe założenia [116] (oprócz założeń stosowanych w teorii prętów pryzmatycznych):

- pręt cienkościenny rozpatruje się jako powłokę, której przekroje poprzeczne nie ulegają odkształceniu w swoich płaszczyznach,
- pomija się odkształcenie postaciowe powierzchni środkowej pręta.

Założenie o nieodkształcalności konturu jest spełnione dla prętów, u których grubość ścianek jest dostatecznie duża w porównaniu z pozostałymi wymiarami przekroju, lub pręt posiada przepony wystarczająco gęsto rozmieszczone na długości.

Odkształcenie postaciowe powierzchni środkowej pręta jest na ogół tak małe, że można je z całą świadomością pominąć.

Praca podzielona jest na trzy zasadnicze części.

W części pierwszej przedstawiono rozwiązanie zagadnienia drgań swobodnych pręta obciążonego stałą siłą P działającą centralnie (wzdłuż osi pręta). Określono tu parametry ω_n (częstości kątowe drgań swobodnych), jak również funkcje własne pręta stanowiące punkt wyjścia do rozwiązania następnego zagadnienia.

W części drugiej rozpatrzono zagadnienie drgań wymuszonych pręta obciążonego stałą siłą P działającą centralnie oraz poddanego działaniu obciążenia o dowolnej zdeterminowanej funkcji czasowej (przypadek ogólny) lub obciążenia harmonicznie zmiennego.

Trzecia część pracy przedstawia analizę zagadnienia stateczności dynamicznej pręta obciążonego zmienną siłą P(t) działającą centralnie. W części tej podano algorytm wyznaczania stateczności dla przypadku, gdy siła P(t) jest funkcją okresową.

Przedstawione zagadnienia rozpatrzono w ujęciu liniowo-sprężystym przy założeniach tzw. technicznej teorii prętów cienkościennych wprowadzonych przez Kappusa [36], a następnie uogólnionych przez Własowa [118].

Pręt cienkościenny o dowolnej zmianie przekroju poprzecznego modelowano prętem o przekroju odcinkowo stałym, przy czym przyjęto, że główne osie bezwładności poszczególnych odcinków pręta są do siebie równoległe.

Celem niniejszej pracy jest rozwiązanie problemów drgań swobodnych, drgań wymuszonych i podanie algorytmu określenia obszarów dynamicznej stateczności (stabilności) dla prętów cienkościennych o zmiennym przekroju i profilu otwartym przy dowolnych warunkach początkowo-brzegowych.

Przedstawiono również rozwiązanie zagadnienia stateczności statycznej i statyki tych prętów jako przypadki szczególne drgań swobodnych i wymuszonych.

Całość opracowania poprzedzona jest wstępem, w którym omówiono krótko dotychczasowy rozwój zagadnień rozpatrywanych w pracy i podano uzasadnienie przyjętej metodyki rozwiązania zagadnienia. W zakończeniu zamieszczono uwagi dotyczące zbieżności przedstawionych rozwiązań.

Na podstawie podanych w pracy algorytmów rozwiązań poszczególnych zagadnień uruchomiono kilka programów na elektroniczną maszynę cyfrową.

Temat pracy stanowi integralną część badań naukowych Instytutu Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Śląskiej, który wynikł z bezpośredniego zapotrzebowania przemysłu.

Opracowanie niniejsze jest kontynuacją i uogólnieniem dotychczasowych badań autora w zakresie obliczeń stereomechanicznych prętów cienkościennych, opublikowanych w pracach [100, 101, 102, 103, 104].

1.2. Przegląd dotychczas opublikowanych prac związanych z rozpatrywanym zagadnieniem

Teoria prętów cienkościennych, zapoczątkowana przez Wagnera [109] i rozwijana między innymi przez Ostenfelda [76], F.Bleicha i H.Bleicha [7], Kappusa [36], Lundquista i Fligga [52, 53], a następnie uporządkowana i uogólniona przez Własowa [118], ma obecnie bogatą literaturę.

Ze względu na dużą liczbę prac dotyczących tej teorii ograniczymy się tylko do wyszczególnienia niektórych pozycji literaturowych, mających ścisły związek z rozpatrywanym zagadnieniem.

Pręty cienkościenne w wyniku odkształceń przyjmują postać giętno-skrętną, a więc analiza zagadnień dotyczących stereomechaniki tych prętów w ogólnym przypadku prowadzi do rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych lub cząstkowych. Trudności związane z rozwiązaniem tego układu równań stwarzają w wielu przypadkach konieczność stosowania przybliżonych metod obliczeniowych, które przy wykorzystaniu w obliczeniach numerycznych maszyn cyfrowych dają wyniki wystarczająco dokładne. Szczególnie często w tych przypadkach stosuje się rozwinięcie szukanych funkcji w szeregi potęgowe [27, 42,46,51,54,113,114,116] i metodę Bubnowa - Galerkina [69,73,77,80]. Biorąc pod uwagę możliwość stosowania maszyn cyfrowych, pręty o dowolnej zmianie przekroju modeluje się prętami o przekroju odcinkowo stałym[37,113].

Szerokie zastosowanie w obliczeniach stereomechanicznych takich prętów znalazła obecnie metoda macierzy przeniesienia[22,30,57,58,59,60,61,62,63,84,85,86,87,100,101, 102,103,104].

Problemy dynamiki prętów cienkościennych, które stanowią w ostatnich latach jeden z głównych tematów badań w tym zakresie, można podzielić na trzy zasadnicze grupy zagadnień:

- zagadnienia dotyczące drgań swobodnych,
- zagadnienia, które dotyczą drgań wymuszonych,
- zagadnienia obejmujące stateczność dynamiczną.

Najliczniejsza grupa prac koncentruje się na zagadnieniu określenia parametrów własnych (drgania swobodne) prętów cienkościennych. Rozpatrywane w tych pracach problemy dotyczą zwykle prętów o pewnych szczególnych warunkach brzegowych lub prętów o szczególnych cechach geometrycznych [5,10,18,106,118,120].

Prowadzone były również badania wpływu na parametry własne zmiany przekroju poprzecznego i sztywności zamocowania pręta [2,122], stałych sił obciążających pręt [4, 38], niejednorodności tworzywa pręta [49,96] itp. Interesującą analizę zagadnień statyki i drgań swobodnych przedstawiono w pracach [65,112,113], gdzie rozwiązanie postawionego zadania otrzymano przy zastosowaniu elementów skończonych.

Metoda elementów skończonych, której rozwój i popularyzację w kraju należy zawdzięczać głównie pracom Szmeltera [98,99] i Zienkiewicza [123], w przypadku rozwiązywania zagadnień dynamicznych wymaga również stosowania maszyn cyfrowych o stosunkowo dużej pamięci operacyjnej.

Pewne zalety w tym względzie posiada opracowany przez Kruszewskiego [43] oryginalny wariant dyskretyzacji, zwany sztywnymi elementami skończonymi.

Wydaje się jednak, że stosowanie metody elementów skończonych w zagadnieniach dynamicznych prętów, ze względu na stosunkowo dużą liczbę operacji numerycznych a równocześnie możliwość korzystania z innych metod (np. metody macierzy przeniesienia), jest ograniczone.

Problemy z zakresu drgań wymuszonych w większości dotyczą drgań skrętnych [6,13, 33,34,89], lub drgań wymuszonych harmonicznie [104].

Stosunkowo duża liczba prac dotyczy zagadnienia stateczności dynamicznej prętów o określonych cechach geometrycznych, poddanych szczególnym przypadkom obciążenia (np. impuls trójkątny)[11,24,45,70,83].

Oprócz wyżej wymienionych zagadnień poruszanych w literaturze, dotyczących omawianego problemu, spotyka się prace, mające charakter uzupełniający. Dotyczą one zakresu stosowalności teorii prętów cienkościennych w zagadnieniach dynamicznych [48], obliczeń przy wprowadzeniu pewnych uproszczeń [3,32,64,117] lub uściśleń [55].

Na zakończenie należy zaznaczyć, że istnieje jeszcze szereg prac, dotyczących zagadnień dynamicznych prętów cienkościennych o profilu zamkniętym. Z uwagi na to, że nie są one przedmiotem opracowania, prace te pominięto.

Z przedstawionego krótkiego przeglądu opublikowanych dotychczas prac wynika potrzeba opracowania ogólnego rozwiązania zagadnień dynamiki prętów cienkościennych dla dowolnych warunków początkowo-brzegowych z uwzględnieniem stosowania elektronicznej techniki obliczeniowej, jak również potrzeba przeprowadzenia szerszej analizy zastosowania metody macierzy przeniesienia do tego typu rozpatrywanych zagadnień.

1.3. Przyjęta metoda rozwiązywania zagadnień

Zagadnienia dotyczące drgań swobodnych, drgań wymuszonych i stateczności dynamicznej prętów cienkościennych o stałym przekroju sprowadzają się do problemu rozwiązania układu równań różniczkowych o stałych współczynnikach.

W przypadku prętów o zmiennym przekroju równania ruchu opisane są układem równań różniczkowych cząstkowych o współczynnikach funkcyjnych, przy czym funkcje tych współczynników zależą od charakteru zmiany cech geometrycznych przekroju pręta.

Rozwiązanie tego problemu można praktycznie uzyskać w wyniku zastosowania jednej z metod przybliżonych [15,35,67]. Każdorazowo inny charakter zmiany przekroju wymaga na ogół ponownego rozwiązania układu równań.

Zastępując pręt o dowolnie zmiennym przekroju prętem o przekroju odcinkowo stałym (skokowo-zmiennym) i stosując metodę macierzy przeniesienia, możemy otrzymać rozwiązanie powyższego problemu w znacznie prostszej postaci, nadającej się stosunkowo łatwo zaprogramować na elektroniczną maszynę cyfrową.

Pierwsze sformułowanie metody macierzy przeniesienia podali - niezależnie od siebie - Gümbel [26] (1912 r.), Holzer [29] (1921 r.) i Tolle [108] (1921 r.). Metodę tę wykorzystano do określenia swobodnych drgań skrętnych wałów.

Zastosowanie rachunku macierzowego do rozpatrywanej metody wprowadzili Targoff [105] i Thomson [107].

Intensywny rozwój metody macierzy przeniesienia przypada na lata pięćdziesiąte, w których to powstała możliwość stosowania elektronicznej techniki obliczeniowej. W tym właśnie okresie ukazały się między innymi prace Falkego [19], Fuhrkego [21], Marguerrego [56], Pestela [78], Schnella [92]. Popularyzację tej metody w kraju należy przypisać pracom Ponomariewa [81,82], a w szczególności pracom Rakowskiego [84,85,86,87] i Matei [57,58,59,60,61,62,63]. W pracach Matei zastosowano nieco inne, w porównaniu do wymienionych prac, ujęcie metody macierzy przeniesienia zaproponowane przez Wagnera [110,111]. Jako elementy wektora stanu przyjęto nie parametry początkowe lecz wartości funkcji przemieszczeń i wartości kilku pochodnych tej funkcji w rozpatrywanym przekroju.

Zaproponowane przez Wagnera ujęcie jest w wielu przypadkach prostsze od sposobu opartego na metodzie parametrów początkowych, gdyż wystarczy znaleźć całkę ogólną, w której stałymi całkowania są wartości funkcji oraz wartości pochodnych tej funkcji na początku przedziału.

Metoda macierzy przeniesienia pozwala każdorazowo określić granice, w jakich powinno zawierać się rozwiązanie "ścisłe" przy założeniach technicznej teorii prętów cienkościennych, a więc można otrzymać rozwiązanie o żądanej dokładności. Dokładność otrzymanego rozwiązania zależy od liczby odcinków, na które podzielono pręt.

Biorąc pod uwagę wyżej przedstawione aspekty, zdecydowano rozwiązać postawione problemy za pomocą metody macierzy przeniesienia, programując ją na elektroniczną maszynę cyfrową. Metoda macierzy przeniesienia polega na określeniu macierzy zwanej macierzą przeniesienia, którą otrzymuje się w wyniku iloczynów macierzy przęsła i macierzy przekroju (węzła). Macierz przeniesienia określa związki pomiędzy wartościami funkcji przemieszczeń i ich pochodnych na początku i końcu pręta ($x = 0$ i $x = l$). Postać macierzy przęsła wyznacza się na podstawie rozwiązania problemu na ogół dla pręta o stałym przekroju. Macierz przekroju określa się z warunków równowagi i nierozdzielności przemieszczeń w danym przekroju.

Przyjęta w pracy terminologia odnośnie macierzy przeniesienia oparta jest o nazewnictwo przedstawione w pracy Rakowskiego [85].

1.4. Zestawienie ważniejszych oznaczeń

η - przemieszczenie punktów osi środków zginania w kierunku osi y,
ξ - przemieszczenie punktów osi środków zginania w kierunku osi z,
ζ - przemieszczenie punktów osi środków zginania w kierunku osi x,
φ - kąt obrotu przekroju,
x,y,z - główne centralne osi bezwładności przekroju,
y - współrzędna środka zginania w kierunku osi y,
z - współrzędna środka zginania w kierunku osi z,
E - moduł sprężystości podłużnej,
G - moduł sprężystości poprzecznej,
γ - ciężar objętościowy tworzywa, z którego wykonano pręt,
g - przyśpieszenie ziemskie,
A - powierzchnia przekroju,
I_y - moment bezwładności przekroju względem osi y, $I_y = \int_A z^2 dA$,
I_z - moment bezwładności przekroju względem osi z, $I_z = \int_A y^2 dA$,
I_ω - wycinkowy moment bezwładności przekroju $I_\omega = \int_A \omega^2 dA$,
I_x - moment bezwładności przekroju przy czystym skręcaniu,
m - masa skupiona,
I_ζ - masowy moment bezwładności masy skupionej względem osi ζ,
ω_n - częstość kołowa drgań swobodnych,
C_y - stała sprężystego podparcia w kierunku osi y,
C_z - stała sprężystego podparcia w kierunku osi z,
C_φ - stała sprężystego podparcia ze względu na obrót odpowiadający kątowi φ,
P - osiowe obciążenie skupione działające centralnie,
$P_y(t)$ - poprzeczne obciążenie skupione działające równolegle do osi y,
$P_z(t)$ - poprzeczne obciążenie skupione działające równolegle do osi z,
M(t) - skupiony moment skręcający,
$q_y(x,t)$ - poprzeczne obciążenie rozłożone w sposób ciągły równolegle do osi y,
$q_z(x,t)$ - poprzeczne obciążenie rozłożone w sposób ciągły równolegle do osi z,
m(x,t) - moment skręcający rozłożony w sposób ciągły,
Y - wektor stanu,
F - macierz przekroju,
colon[ ] - macierz kolumnowa,
⌊ ⌉ - macierz diagonalna,
H_i - macierz przęsła i,
$\bar{H}$ - macierz przeniesienia.
δ_{nk} - δ Kroneckera

2. WARTOŚCI WŁASNE I FUNKCJE WŁASNE PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH

2.1. Wprowadzenie

Wartościami własnymi w przypadku prętów cienkościennych są siły krytyczne P_{kr} i częstotliwość drgań swobodnych ω_n. Odpowiadające tym wartościom funkcje przemieszczeń osi zginania nazywamy funkcjami własnymi [12,17,95].

W przypadku zagadnień stateczności prętów cienkościennych - wielkości sił krytycznych i odpowiadające im funkcje przemieszczeń określono w pracach [100, 101, 102, 103].

Obecnie przedstawiamy algorytm wyznaczania częstości drgań swobodnych i funkcji przemieszczeń, odpowiadających tym częstościom.

2.2. Określenie macierzy przęsła

Podstawowe równania różniczkowe zagadnienia drgań swobodnych pręta cienkościennego o profilu otwartym i stałym przekroju, obciążonego siłą P, działającą centralnie (rys. 1) mają postać [118] :

$$EA\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \frac{\gamma A}{g}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = 0$$

$$EJ_z\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} - \frac{\gamma J_z}{g}\cdot\frac{\partial^4\eta}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{\gamma A}{g}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + p\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\gamma A z_\alpha}{g}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + p z_\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0$$

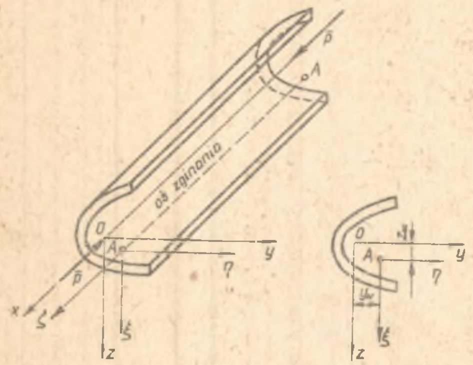
$$EJ_y\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} - \frac{\gamma J_y}{g}\cdot\frac{\partial^4\xi}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{\gamma A}{g}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + p\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - \frac{\gamma A y_\alpha}{g}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - p y_\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\frac{\gamma A z_\alpha}{g}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + p z_\alpha\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \frac{\gamma A y_\alpha}{g}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - p y_\alpha\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + EJ_\omega\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2} - \frac{\gamma J_\omega}{g}\cdot\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial t^2} +$$

$$+ \frac{\gamma A r^2}{g}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - GJ_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + p r^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0 \quad ,$$

gdzie:

$$r^2 = \frac{J_o}{A} + y_\alpha^2 + z_\alpha^2 \quad , \quad J_o = J_z + J_y \; .$$



Rys. 1

Pierwsze równanie układu (2.1) przedstawia równanie różniczkowe swobodnych drgań podłużnych pręta i jest niezależne od pozostałych trzech. Rozwiązanie jego podane jest w każdym podstawowym podręczniku, dotyczącym dynamiki układów o parametrach rozłożonych w sposób ciągły.

Dalsze więc rozważania dotyczyć będą tylko swobodnych drgań giętno - -skrętnych, których funkcje przemieszczeń $\eta(x,t)$, $\xi(x,t)$, $\varphi(x,t)$ określimy w wyniku rozwiązania pozostałych trzech sprzężonych równań różniczkowych układu (2.1).

Stosując metodę rozdziału zmiennych Poissona, funkcje przemieszczeń $\eta(x,t)$, $\xi(x,t)$, $\varphi(x,t)$ - w przypadku drgań swobodnych - wyrazimy w następującej postaci:

$$
\begin{aligned}
\eta(x,t) &= \sum_n \eta_n(x)\sin\omega_n t \;, \\
\xi(x,t) &= \sum_n \xi_n(x)\sin\omega_n t \;, \\
\varphi(x,t) &= \sum_n \varphi_n(x)\sin\omega_n t \;,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

gdzie:

ω_n - n-ta częstość kątowa drgań swobodnych pręta (wartość własna),

$\eta_n(x)$, $\xi_n(x)$, $\varphi_n(x)$ - n-te funkcje przemieszczeń osi odkształconej pręta, zwane dalej funkcjami własnymi.

Podstawiając zależności (2.2) do układu równań różniczkowych (2.1), przekształcimy układ równań różniczkowych cząstkowych w układ równań różniczkowych zwyczajnych o następującej postaci:

$$
\begin{aligned}
& EJ_z\cdot\eta_n^{IV} + \left(\frac{\gamma J_z}{g}\omega_n^2 + P\right)\cdot\eta_n'' - \frac{\gamma A}{g}\omega_n^2\cdot\eta_n - \frac{\gamma A z_\alpha}{g}\omega_n^2\cdot\varphi_n + Pz_\alpha\cdot\varphi_n'' = 0 \\
& EJ_y\cdot\xi_n^{IV} + \left(\frac{\gamma J_y}{g}\omega_n^2 + P\right)\cdot\xi_n'' - \frac{\gamma A}{g}\omega_n^2\cdot\xi_n + \frac{\gamma A y_\alpha}{g}\omega_n^2\cdot\varphi_n + Py_\alpha\cdot\varphi_n'' = 0 \\
& EJ_\omega\cdot\varphi_n^{IV} + \left(Pr^2 + \frac{\gamma J_\omega}{g}\omega_n^2 - GJ_x\right)\cdot\varphi_n'' - \frac{\gamma A r^2}{g}\omega_n^2\cdot\varphi_n - \frac{\gamma A z_\alpha}{g}\omega_n^2\cdot\eta_n + \\
& + Pz_\alpha\cdot\eta_n'' + \frac{\gamma A y_\alpha}{g}\omega_n^2\cdot\xi_n - Py_\alpha\cdot\xi_n'' = 0 .
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Wprowadzimy do równań (2.3) następujące oznaczenia:

$$a_1 = EJ_z\,, \quad a_2 = \left(\frac{\gamma J_z}{g}\omega_n^2 + P\right), \quad a_3 = -\frac{\gamma A}{g}\omega_n^2\,, \quad a_4 = -\frac{\gamma A z_\alpha}{g}\omega_n^2\,, \quad a_5 = P z_\alpha\,,$$

$$b_1 = EJ_y\,, \quad b_2 = \left(\frac{\gamma J_y}{g}\omega_n^2 + P\right), \quad b_3 = -\frac{\gamma A}{g}\omega_n^2\,, \quad b_4 = \frac{\gamma A y_\alpha}{g}\omega_n^2\,, \quad b_5 = -P y_\alpha\,,$$

$$c_1 = EJ_\omega\,, \quad c_2 = \left(P r^2 + \frac{\gamma J_\omega}{g}\omega_n^2 - GJ_x\right), \quad c_3 = -\frac{\gamma A r^2}{g}\omega_n^2\,, \quad c_4 = -\frac{\gamma A z_\alpha}{g}\omega_n^2\,,$$

$$c_5 = P z_\alpha\,, \quad c_6 = \frac{\gamma A y_\alpha}{g}\omega_n^2\,, \quad c_7 = -P y_\alpha\,.$$

Wówczas równania (2.3) przyjmą postać:

$$\begin{aligned} &a_1\eta_n^{IV} + a_2\eta_n'' + a_3\eta_n + a_4\varphi_n + a_5\varphi_n'' = 0\,, \\ &b_1\xi_n^{IV} + b_2\xi_n'' + b_3\xi_n + b_4\varphi_n + b_5\varphi_n'' = 0\,, \\ &c_1\varphi_n^{IV} + c_2\varphi_n'' + c_3\varphi_n + c_4\eta_n + c_5\eta_n'' + c_6\xi_n + c_7\xi_n'' = 0\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Rozwiązanie powyższego układu równań różniczkowych w postaci "zamkniętej", np. z wykorzystaniem transformacji Laplace'a [60,100,101], prowadzi do bardzo pracochłonnych obliczeń i jest z praktycznego punktu widzenia niemalże nieosiągalne [101]. Dlatego, podobnie jak w pracach [57,61,62,114], do rozwiązania układu równań (2.4) zastosowano rozwinięcie funkcji przemieszczeń $\eta_n(x)$, $\xi_n(x)$, $\varphi_n(x)$ w szeregi potęgowe w postaci:

$$\begin{aligned} \eta_n(x) &= \sum_{j=0}^{j=r} \theta_j^n \cdot x^j\,, \\ \xi_n(x) &= \sum_{j=0}^{j=r} \Psi_j^n \cdot x^j\,, \\ \varphi_n(x) &= \sum_{j=0}^{j=r} \varkappa_j^n \cdot x^j\,, \qquad r = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pierwsze cztery współczynniki każdego z szeregów (2.5) są wartościami brzegowymi odpowiednich funkcji $\eta_n(x)$, $\xi_n(x)$, $\varphi_n(x)$ pomnożonymi przez liczbę jeden, dwa i sześć.

Wstawiając funkcje (2.5) do równań różniczkowych (2.4), otrzymamy:

$$\begin{aligned} &a_1 \cdot \sum_{j=0}^{j=r} j(j-1)(j-2)(j-3)\,\theta_j^n \cdot x^{j-4} + a_2 \sum_{j=0}^{j=r} j(j-1)\,\theta_j^n \cdot x^{j-2} + \\ &+ a_3 \sum_{j=0}^{j=r} \theta_j^n \cdot x^j + a_4 \sum_{j=0}^{j=r} \varkappa_j^n \cdot x^j + a_5 \sum_{j=0}^{j=r} j(j-1)\,\varkappa_j^n \cdot x^{j-2} = 0 \\ &b_1 \sum_j j(j-1)(j-2)(j-3)\,\Psi_j^n \cdot x^{j-4} + b_2 \sum_j j(j-1)\,\Psi_j^n \cdot x^{j-2} + \\ &+ b_3 \sum_j \Psi_j^n \cdot x^j + b_4 \sum_j \varkappa_j^n \cdot x^j + b_5 \sum_j j(j-1)\,\varkappa_j^n \cdot x^{j-2} = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$c_1 \sum_j j(j-1)(j-2)(j-3)\varkappa_j^n \cdot x^{j-4} + c_2 \sum_j j(j-1)\varkappa_j^n \cdot x^{j-2} +$$

$$+c_3 \sum_j \varkappa_j^n \cdot x^j + c_4 \sum_j \Theta_j^n \cdot x^j + c_5 \sum_j j(j-1)\Theta_j^n \cdot x^{j-2} +$$

$$+c_6 \sum_j \Psi_j^n \cdot x^j + c_7 \sum_j j(j-1)\Psi_j^n \cdot x^{j-2} = 0$$

Powyższe równania będą spełnione tylko wtedy, gdy suma współczynników przy współrzędnej x o tej samej potędze będzie równa zeru.

Przyrównując więc poszczególne sumy w równaniach (2.6) do zera, otrzymamy:

$$a_1 \frac{j!}{(j-4)!}\Theta_j^n + a_2 \frac{j!}{(j-2)!}\Theta_{j-2}^n + a_3 \cdot \Theta_{j-4}^n + a_4 \cdot \varkappa_{j-4}^n + a_5 \frac{j!}{(j-2)!}\varkappa_{j-2}^n = 0 \ ,$$

$$b_1 \frac{j!}{(j-4)!}\Psi_j^n + b_2 \frac{j!}{(j-2)!}\Psi_{j-2}^n + b_3 \Psi_{j-4}^n + b_4 \cdot \varkappa_{j-4}^n + b_5 \frac{j!}{(j-2)!}\varkappa_{j-2}^n = 0 , \tag{2.7}$$

$$c_1 \frac{j!}{(j-4)!}\varkappa_j^n + c_2 \frac{j!}{(j-2)!}\varkappa_{j-2}^n + c_3 \cdot \varkappa_{j-4}^n + c_4 \cdot \Theta_{j-4}^n + c_5 \frac{j!}{(j-2)!}\Theta_{j-2}^n +$$

$$+ c_6 \cdot \Psi_{j-4}^n + c_7 \frac{j!}{(j-2)!}\cdot \Psi_{j-2}^n = 0 \ ; \qquad j = 4,5,6,\ldots$$

Na podstawie równań (2.7) możemy napisać wzory rekurencyjne na współczynniki szeregów potęgowych, słusznych dla $j \geqslant 4$, jako

$$\Theta_j^n = -\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{(j-4)!}{(j-2)!}\cdot\Theta_{j-2}^n - \frac{a_3}{a_1}\cdot\frac{(j-4)!}{j!}\cdot\Theta_{j-4}^n - \frac{a_4}{a_1}\cdot\frac{(j-4)!}{j!}\cdot\varkappa_{j-4}^n - \frac{a_5}{a_1}\cdot\frac{(j-4)!}{(j-2)!}\cdot\varkappa_{j-2}^n \ ,$$

$$\Psi_j^n = -\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{(j-4)!}{(j-2)!}\cdot\Psi_{j-2}^n - \frac{b_3}{b_1}\cdot\frac{(j-4)!}{j!}\cdot\Psi_{j-4}^n - \frac{b_4}{b_1}\cdot\frac{(j-4)!}{j!}\cdot\varkappa_{j-4}^n - \frac{b_5}{b_1}\cdot\frac{(j-4)!}{(j-2)!}\cdot\varkappa_{j-2}^n \ , \tag{2.8}$$

$$\varkappa_j^n = -\frac{c_2}{c_1}\cdot\frac{(j-4)!}{(j-2)!}\cdot\varkappa_{j-2}^n - \frac{c_3}{c_1}\cdot\frac{(j-4)!}{j!}\cdot\varkappa_{j-4}^n - \frac{c_4}{c_1}\cdot\frac{(j-4)!}{j!}\cdot\Theta_{j-4}^n - \frac{c_5}{c_1}\cdot\frac{(j-4)!}{(j-2)!}\cdot\Theta_{j-2}^n +$$

$$-\frac{c_6}{c_1}\cdot\frac{(j-4)!}{j!}\cdot\Psi_{j-4}^n - \frac{c_7}{c_1}\cdot\frac{(j-4)!}{j!}\cdot\Psi_{j-2}^n \ .$$

Wprowadzając następujące oznaczenia w zależnościach (2.8), otrzymamy:

$$a_2(j) = -\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{(j-4)!}{(j-2)!} \ , \quad a_3(j) = -\frac{a_3}{a_1}\cdot\frac{(j-4)!}{j!} \ , \quad a_4(j) = -\frac{a_4}{a_1}\cdot\frac{(j-4)!}{j!} \ , \quad a_5(j) = -\frac{a_5}{a_1}\cdot\frac{(j-4)!}{(j-2)!} \ ,$$

$$b_2(j) = -\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{(j-4)!}{(j-2)!} \ , \quad b_3(j) = -\frac{b_3}{b_1}\cdot\frac{(j-4)!}{j!} \ , \quad b_4(j) = -\frac{b_4}{b_1}\cdot\frac{(j-4)!}{j!} \ , \quad b_5(j) = -\frac{b_5}{b_1}\cdot\frac{(j-4)!}{(j-2)!} \ ,$$

$$c_2(j) = -\frac{c_2}{c_1}\cdot\frac{(j-4)!}{(j-2)!} \ , \quad c_3(j) = -\frac{c_3}{c_1}\cdot\frac{(j-4)!}{j!} \ , \quad c_4(j) = -\frac{c_4}{c_1}\cdot\frac{(j-4)!}{j!} \ , \quad c_5(j) = -\frac{c_5}{c_1}\cdot\frac{(j-4)!}{(j-2)!} \ ,$$

$$c_6(j) = -\frac{c_6}{c_1}\cdot\frac{(j-4)!}{j!} \ , \quad c_7(j) = -\frac{c_7}{c_1}\cdot\frac{(j-4)!}{(j-2)!} \ .$$

Wtedy:

$$
\begin{aligned}
\theta_j^n &= a_2(j)\cdot\theta_{j-2}^n + a_3(j)\cdot\theta_{j-4}^n + a_4(j)\cdot\varkappa_{j-4}^n + a_5(j)\cdot\varkappa_{j-2}^n\,, \\
\Psi_j^n &= b_2(j)\cdot\Psi_{j-2}^n + b_3(j)\cdot\Psi_{j-4}^n + b_4(j)\cdot\varkappa_{j-4}^n + b_5(j)\cdot\varkappa_{j-2}^n\,, \\
\varkappa_j^n &= c_2(j)\cdot\varkappa_{j-2}^n + c_3(j)\cdot\varkappa_{j-4}^n + c_4(j)\cdot\theta_{j-4}^n + c_5(j)\cdot\theta_{j-2}^n + \\
&\quad + c_6(j)\cdot\Psi_{j-4}^n + c_7(j)\cdot\Psi_{j-2}^n\,.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Za pomocą wzorów rekurencyjnych (2.9) wyrazimy wszystkie współczynniki szeregów potęgowych (2.5) poprzez każde cztery wartości brzegowe funkcji $\eta_n(x)$, $\xi_n(x)$, $\varphi_n(x)$ dla $x = 0$. Wykorzystując wzory (2.9), funkcje przemieszczeń $\eta_n(x)$, $\xi_n(x)$, $\varphi_n(x)$ zapiszemy w postaci

$$
\begin{aligned}
\eta_n(x) &= S_1^n\cdot\theta_0^n + S_2^n\cdot\theta_1^n + S_3^n\cdot\theta_2^n + S_4^n\cdot\theta_3^n + S_5^n\cdot\Psi_0^n + S_6^n\cdot\Psi_1^n + S_7^n\cdot\Psi_2^n + S_8^n\cdot\Psi_3^n + \\
&\quad + S_9^n\cdot\varkappa_0^n + S_{10}^n\cdot\varkappa_1^n + S_{11}^n\cdot\varkappa_2^n + S_{12}^n\cdot\varkappa_3^n\,, \\
\xi_n(x) &= S_{13}^n\cdot\theta_0^n + S_{14}^n\cdot\theta_1^n + S_{15}^n\cdot\theta_2^n + S_{16}^n\cdot\theta_3^n + S_{17}^n\cdot\Psi_0^n + S_{18}^n\cdot\Psi_1^n + S_{19}^n\cdot\Psi_2^n + S_{20}^n\cdot\Psi_3^n + \\
&\quad + S_{21}^n\cdot\varkappa_0^n + S_{22}^n\cdot\varkappa_1^n + S_{23}^n\cdot\varkappa_2^n + S_{24}^n\cdot\varkappa_3^n\,, \\
\varphi_n(x) &= S_{25}^n\cdot\theta_0^n + S_{26}^n\cdot\theta_1^n + S_{27}^n\cdot\theta_2^n + S_{28}^n\cdot\theta_3^n + S_{29}^n\cdot\Psi_0^n + S_{30}^n\cdot\Psi_1^n + S_{31}^n\cdot\Psi_2^n + S_{32}^n\cdot\Psi_3^n + \\
&\quad + S_{33}^n\cdot\varkappa_0^n + S_{34}^n\cdot\varkappa_1^n + S_{35}^n\cdot\varkappa_2^n + S_{36}^n\cdot\varkappa_3^n\,,
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
\eta_n(0) &= \theta_0^n\,, & \xi_n(0) &= \Psi_0^n\,, & \varphi_n(0) &= \varkappa_0^n\,, \\
\eta_n'(0) &= \theta_1^n\,, & \xi_n'(0) &= \Psi_1^n\,, & \varphi_n'(0) &= \varkappa_1^n\,, \\
\eta_n''(0) &= 2\theta_2^n\,, & \xi_n''(0) &= 2\Psi_2^n\,, & \varphi_n''(0) &= 2\varkappa_2^n\,, \\
\eta_n'''(0) &= 6\theta_3^n\,, & \xi_n'''(0) &= 6\Psi_3^n\,, & \varphi_n'''(0) &= 6\varkappa_3^n\,,
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

n - n-ta postać drgań.

Funkcje S_1^n - S_{36}^n, określone na podstawie wzorów rekurencyjnych (2.9), mają postać:

$$
\begin{aligned}
S_1^n &= \sum_{j=0}^{j=r} A_{2j}^1\cdot x^{2j}\,, & S_2^n &= \sum_{j=0}^{j=r} A_{2j+1}^1\cdot x^{2j+1}\,, & S_3^n &= \sum_{j=0}^{j=r} A_{2j}^2\cdot x^{2j}\,, & S_4^n &= \sum_{j=0}^{j=r} A_{2j+1}^2\cdot x^{2j+1}\,, \\
S_5^n &= \sum_{j=0}^{j=r} A_{2j}^3\cdot x^{2j}\,, & S_6^n &= \sum_{j=0}^{j=r} A_{2j+1}^3\cdot x^{2j+1}\,, & S_7^n &= \sum_{j=0}^{j=r} A_{2j}^4\cdot x^{2j}\,, & S_8^n &= \sum_{j=0}^{j=r} A_{2j+1}^4\cdot x^{2j+1}\,, \\
S_9^n &= \sum_{j=0}^{j=r} A_{2j}^5\cdot x^{2j}\,, & S_{10}^n &= \sum_{j=0}^{j=r} A_{2j+1}^5\cdot x^{2j+1}\,, & S_{11}^n &= \sum_{j=0}^{j=r} A_{2j}^6\cdot x^{2j}\,, & S_{12}^n &= \sum_{j=0}^{j=r} A_{2j+1}^6\cdot x^{2j+1}\,, \\
S_{13}^n &= \sum_{j=0}^{j=r} B_{2j}^1\cdot x^{2j}\,, & S_{14}^n &= \sum_{j=0}^{j=r} B_{2j+1}^1\cdot x^{2j+1}\,, & S_{15}^n &= \sum_{j=0}^{j=r} B_{2j}^2\cdot x^{2j}\,, & S_{16}^n &= \sum_{j=0}^{j=r} B_{2j+1}^2\cdot x^{2j+1}\,, \\
S_{17}^n &= \sum_{j=0}^{j=r} B_{2j}^3\cdot x^{2j}\,, & S_{18}^n &= \sum_{j=0}^{j=r} B_{2j+1}^3\cdot x^{2j+1}\,, & S_{19}^n &= \sum_{j=0}^{j=r} B_{2j}^4\cdot x^{2j}\,, & S_{20}^n &= \sum_{j=0}^{j=r} B_{2j+1}^4\cdot x^{2j+1}\,,
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

$$S_{21}^{n}=\sum_{j=0}^{j=r} B_{2j}^{5}\cdot x^{2j},\quad S_{22}^{n}=\sum_{j=0}^{j=r} B_{2j+1}^{5}\cdot x^{2j+1},\quad S_{23}^{n}=\sum_{j=0}^{j=r} B_{2j}^{6}\cdot x^{2j},\quad S_{24}^{n}=\sum_{j=0}^{j=r} B_{2j+1}^{6}\cdot x^{2j+1},$$

$$S_{25}^{n}=\sum_{j=0}^{j=r} C_{2j}^{1}\cdot x^{2j},\quad S_{26}^{n}=\sum_{j=0}^{j=r} C_{2j+1}^{1}\cdot x^{2j+1},\quad S_{27}^{n}=\sum_{j=0}^{j=r} C_{2j}^{2}\cdot x^{2j},\quad S_{28}^{n}=\sum_{j=0}^{j=r} C_{2j+1}^{2}\cdot x^{2j+1},$$

$$S_{29}^{n}=\sum_{j=0}^{j=r} C_{2j}^{3}\cdot x^{2j},\quad S_{30}^{n}=\sum_{j=0}^{j=r} C_{2j+1}^{3}\cdot x^{2j+1},\quad S_{31}^{n}=\sum_{j=0}^{j=r} C_{2j}^{4}\cdot x^{2j},\quad S_{32}^{n}=\sum_{j=0}^{j=r} C_{2j+1}^{4}\cdot x^{2j+1},$$

$$S_{33}^{n}=\sum_{j=0}^{j=r} C_{2j}^{5}\cdot x^{2j},\quad S_{34}^{n}=\sum_{j=0}^{j=r} C_{2j+1}^{6}\cdot x^{2j+1},\quad S_{35}^{n}=\sum_{j=0}^{j=r} C_{2j}^{6}\cdot x^{2j},\quad S_{36}^{n}=\sum_{j=0}^{j=r} C_{2j+1}^{6}\cdot x^{2j+1}.$$

Dla $j = 0,1$ współczynniki A_{2j}^{k}, A_{2j+1}^{k}, B_{2j}^{k}, B_{2j+1}^{k}, C_{2j}^{k}, C_{2j+1}^{k} $(k=1,2,3,4,5,6)$ przyjmują wartości 0 lub 1. Wartości tych współczynników zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

k	A_{2j}^{k}		A_{2j+1}^{k}		B_{2j}^{k}		B_{2j+1}^{k}		C_{2j}^{k}		C_{2j+1}^{k}	
	j=0	j=1	j=0	j=1	j=0	j=1	j=0	j=1	j=0	j=1	j=0	j=1
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

Dla $j>1$ współczynniki A_{2j}^{k}, A_{2j+1}^{k}, B_{2j}^{k}, B_{2j+1}^{k}, C_{2j}^{k}, C_{2j+1}^{k} $(k=1,2,3,4,5,6)$, obliczone na podstawie wzorów rekurencyjnych (2.9), określa się na podstawie zależności:

$$\begin{aligned}
A_{2j}^{k} &= a_2(2j)\,A_{2j-2}^{k} + a_3(2j)\,A_{2j-4}^{k} + a_4(2j)\,C_{2j-4}^{k} + a_5(2j)\,C_{2j-2}^{k},\\
A_{2j+1}^{k} &= a_2(2j+1)\,A_{2j-1}^{k} + a_3(2j+1)\,A_{2j-3}^{k} + a_4(2j+1)\,C_{2j-3}^{k} + a_5(2j+1)\,C_{2j-1}^{k},\\
B_{2j}^{k} &= b_2(2j)\,B_{2j-2}^{k} + b_3(2j)\,B_{2j-4}^{k} + b_4(2j)\,C_{2j-4}^{k} + c_5(2j)\,C_{2j-2}^{k},\\
B_{2j+1}^{k} &= b_2(2j+1)\,B_{2j-1}^{k} + b_3(2j+1)\,B_{2j-3}^{k} + b_4(2j+1)\,C_{2j-3}^{k} + b_5(2j+1)\,C_{2j-1}^{k},\\
C_{2j}^{k} &= c_2(2j)\,C_{2j-2}^{k} + c_3(2j)\,C_{2j-4}^{k} + c_4(2j)\,A_{2j-4}^{k} + c_5(2j)\,A_{2j-2}^{k} +\\
&\quad + c_6(2j)\,B_{2j-4}^{k} + c_7(2j)\,B_{2j-2}^{k},\\
C_{2j+1}^{k} &= c_2(2j+1)\,C_{2j-1}^{k} + c_3(2j+1)\,C_{2j-3}^{k} + c_4(2j+1)\,A_{2j-3}^{k} + c_5(2j+1)\,A_{2j-1}^{k} +\\
&\quad + c_6(2j+1)\,B_{2j-3}^{k} + c_7(2j+1)\,B_{2j-1}^{k}.
\end{aligned}\tag{2.13}$$

Funkcje przemieszczeń (2.10), $\eta_n(x)$, $\xi_n(x)$, $\varphi_n(x)$ oraz ich pochodne, zapisane w postaci macierzowej, przedstawiają się następująco:

$$
\begin{bmatrix}
\eta_n(x) \\ \eta_n(x)' \\ \eta_n(x)'' \\ \eta_n(x)''' \\ \xi_n(x) \\ \xi_n(x)' \\ \xi_n(x)'' \\ \xi_n(x)''' \\ \varphi_n(x) \\ \varphi_n(x)' \\ \varphi_n(x)'' \\ \varphi_n(x)'''
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
S_1^n & S_2^n & S_3^n & S_4^n & S_5^n & S_6^n & S_7^n & S_8^n & S_9^n & S_{10}^n & S_{11}^n & S_{12}^n \\
S_1^{n'} & S_2^{n'} & S_3^{n'} & S_4^{n'} & S_5^{n'} & S_6^{n'} & S_7^{n'} & S_8^{n'} & S_9^{n'} & S_{10}^{n'} & S_{11}^{n'} & S_{12}^{n'} \\
S_1^{n''} & S_2^{n''} & S_3^{n''} & S_4^{n''} & S_5^{n''} & S_6^{n''} & S_7^{n''} & S_8^{n''} & S_9^{n''} & S_{10}^{n''} & S_{11}^{n''} & S_{12}^{n''} \\
S_1^{n'''} & S_2^{n'''} & S_3^{n'''} & S_4^{n'''} & S_5^{n'''} & S_6^{n'''} & S_7^{n'''} & S_8^{n'''} & S_9^{n'''} & S_{10}^{n'''} & S_{11}^{n'''} & S_{12}^{n'''} \\
S_{13}^n & S_{14}^n & S_{15}^n & S_{16}^n & S_{17}^n & S_{18}^n & S_{19}^n & S_{20}^n & S_{21}^n & S_{22}^n & S_{23}^n & S_{24}^n \\
S_{13}^{n'} & S_{14}^{n'} & S_{15}^{n'} & S_{16}^{n'} & S_{17}^{n'} & S_{18}^{n'} & S_{19}^{n'} & S_{20}^{n'} & S_{21}^{n'} & S_{22}^{n'} & S_{23}^{n'} & S_{24}^{n'} \\
S_{13}^{n''} & S_{14}^{n''} & S_{15}^{n''} & S_{16}^{n''} & S_{17}^{n''} & S_{18}^{n''} & S_{19}^{n''} & S_{20}^{n''} & S_{21}^{n''} & S_{22}^{n''} & S_{23}^{n''} & S_{24}^{n''} \\
S_{13}^{n'''} & S_{14}^{n'''} & S_{15}^{n'''} & S_{16}^{n'''} & S_{17}^{n'''} & S_{18}^{n'''} & S_{19}^{n'''} & S_{20}^{n'''} & S_{21}^{n'''} & S_{22}^{n'''} & S_{23}^{n'''} & S_{24}^{n'''} \\
S_{25}^n & S_{26}^n & S_{27}^n & S_{28}^n & S_{29}^n & S_{30}^n & S_{31}^n & S_{32}^n & S_{33}^n & S_{34}^n & S_{35}^n & S_{36}^n \\
S_{25}^{n'} & S_{26}^{n'} & S_{27}^{n'} & S_{28}^{n'} & S_{29}^{n'} & S_{30}^{n'} & S_{31}^{n'} & S_{32}^{n'} & S_{33}^{n'} & S_{34}^{n'} & S_{35}^{n'} & S_{36}^{n'} \\
S_{25}^{n''} & S_{26}^{n''} & S_{27}^{n''} & S_{28}^{n''} & S_{29}^{n''} & S_{30}^{n''} & S_{31}^{n''} & S_{32}^{n''} & S_{33}^{n''} & S_{34}^{n''} & S_{35}^{n''} & S_{36}^{n''} \\
S_{25}^{n'''} & S_{26}^{n'''} & S_{27}^{n'''} & S_{28}^{n'''} & S_{29}^{n'''} & S_{30}^{n'''} & S_{31}^{n'''} & S_{32}^{n'''} & S_{33}^{n'''} & S_{34}^{n'''} & S_{35}^{n'''} & S_{36}^{n'''}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\theta_0^n \\ \theta_1^n \\ \theta_2^n \\ \theta_3^n \\ \psi_0^n \\ \psi_1^n \\ \psi_2^n \\ \psi_3^n \\ \varkappa_0^n \\ \varkappa_1^n \\ \varkappa_2^n \\ \varkappa_3^n
\end{bmatrix}
\qquad (2.14)
$$

gdzie:

$$(\quad)' = \frac{d}{dx} .$$

Macierz kwadratową wyrażenia (2.14), utworzoną z funkcji $S_1^n - S_{36}^n$, oznaczać będziemy przez $H^s = H^s(x)$, a macierze kolumnowe, zwane wektorami stanu, utworzone z wartości funkcji η_n, ξ_n, φ_n i wartości brzegowych tych funkcji dla $x = 0$, oznaczać będziemy odpowiednio przez $Y^n(x)$ i Y_o^n.

Na podstawie zależności (2.11) możemy dla $x = 0$ napisać związek pomiędzy wektorem stanu Y_o^n a wektorem utworzonym ze współczynników szeregów potęgowych przedstawionych w wyrażeniu (2.14).

Jeżeli przez Y_e^n oznaczymy wektor utworzony ze współczynników szeregów potęgowych, to związek pomiędzy Y_o^n i Y_e^n przyjmuje postać

$$Y_o^n = B \cdot Y_e^n, \qquad (2.15)$$

gdzie:

$B = \left[1 \;\; 1 \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{6} \;\; 1 \;\; 1 \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{6} \;\; 1 \;\; 1 \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{6} \right]$ jest macierzą diagonalną.

Przyjmując wyżej wyprowadzone oznaczenia i wprowadzając zależność (2.15) do (2.14), otrzymamy:

$$Y^n(x) = H^s(x) \cdot B \cdot Y^n_0, \tag{2.17}$$

gdzie:

$Y^n(x)$ - wektor stanu w przekroju określonym współrzędną x.

Iloczyn macierzy

$$H^s(x) \cdot B = H^n(x) \tag{2.18}$$

nazywać będziemy macierzą przęsła i wówczas

$$Y^n(x) = H^n(x) \cdot Y^n_0 . \tag{2.19}$$

Macierz przęsła określona jest następująco:

$$H^n(x) = \begin{bmatrix}
S_1^{n} & S_2^{n} & \frac{1}{2}S_3^{n} & \frac{1}{6}S_4^{n} & S_5^{n} & S_6^{n} & \frac{1}{2}S_7^{n} & \frac{1}{6}S_8^{n} & S_9^{n} & S_{10}^{n} & \frac{1}{2}S_{11}^{n} & \frac{1}{6}S_{12}^{n} \\
S_1^{n'} & S_2^{n'} & \frac{1}{2}S_3^{n'} & \frac{1}{6}S_4^{n'} & S_5^{n'} & S_6^{n'} & \frac{1}{2}S_7^{n'} & \frac{1}{6}S_8^{n'} & S_9^{n'} & S_{10}^{n'} & \frac{1}{2}S_{11}^{n'} & \frac{1}{6}S_{12}^{n'} \\
S_1^{n''} & S_2^{n''} & \frac{1}{2}S_3^{n''} & \frac{1}{6}S_4^{n''} & S_5^{n''} & S_6^{n''} & \frac{1}{2}S_7^{n''} & \frac{1}{6}S_8^{n''} & S_9^{n''} & S_{10}^{n''} & \frac{1}{2}S_{11}^{n''} & \frac{1}{6}S_{12}^{n''} \\
S_1^{n'''} & S_2^{n'''} & \frac{1}{2}S_3^{n'''} & \frac{1}{6}S_4^{n'''} & S_5^{n'''} & S_6^{n'''} & \frac{1}{2}S_7^{n'''} & \frac{1}{6}S_8^{n'''} & S_9^{n'''} & S_{10}^{n'''} & \frac{1}{2}S_{11}^{n'''} & \frac{1}{6}S_{12}^{n'''} \\
S_{13}^{n} & S_{14}^{n} & \frac{1}{2}S_{15}^{n} & \frac{1}{6}S_{16}^{n} & S_{17}^{n} & S_{18}^{n} & \frac{1}{2}S_{19}^{n} & \frac{1}{6}S_{20}^{n} & S_{21}^{n} & S_{22}^{n} & \frac{1}{2}S_{23}^{n} & \frac{1}{6}S_{24}^{n} \\
S_{13}^{n'} & S_{14}^{n'} & \frac{1}{2}S_{15}^{n'} & \frac{1}{6}S_{16}^{n'} & S_{17}^{n'} & S_{18}^{n'} & \frac{1}{2}S_{19}^{n'} & \frac{1}{6}S_{20}^{n'} & S_{21}^{n'} & S_{22}^{n'} & \frac{1}{2}S_{23}^{n'} & \frac{1}{6}S_{24}^{n'} \\
S_{13}^{n''} & S_{14}^{n''} & \frac{1}{2}S_{15}^{n''} & \frac{1}{6}S_{16}^{n''} & S_{17}^{n''} & S_{18}^{n''} & \frac{1}{2}S_{19}^{n''} & \frac{1}{6}S_{20}^{n''} & S_{21}^{n''} & S_{22}^{n''} & \frac{1}{2}S_{23}^{n''} & \frac{1}{6}S_{24}^{n''} \\
S_{13}^{n'''} & S_{14}^{n'''} & \frac{1}{2}S_{15}^{n'''} & \frac{1}{6}S_{16}^{n'''} & S_{17}^{n'''} & S_{18}^{n'''} & \frac{1}{2}S_{19}^{n'''} & \frac{1}{6}S_{20}^{n'''} & S_{21}^{n'''} & S_{22}^{n'''} & \frac{1}{2}S_{23}^{n'''} & \frac{1}{6}S_{24}^{n'''} \\
S_{25}^{n} & S_{26}^{n} & \frac{1}{2}S_{27}^{n} & \frac{1}{6}S_{28}^{n} & S_{29}^{n} & S_{30}^{n} & \frac{1}{2}S_{31}^{n} & \frac{1}{6}S_{32}^{n} & S_{33}^{n} & S_{34}^{n} & \frac{1}{2}S_{35}^{n} & \frac{1}{6}S_{36}^{n} \\
S_{25}^{n'} & S_{26}^{n'} & \frac{1}{2}S_{27}^{n'} & \frac{1}{6}S_{28}^{n'} & S_{29}^{n'} & S_{30}^{n'} & \frac{1}{2}S_{31}^{n'} & \frac{1}{6}S_{32}^{n'} & S_{33}^{n'} & S_{34}^{n'} & \frac{1}{2}S_{35}^{n'} & \frac{1}{6}S_{36}^{n'} \\
S_{25}^{n''} & S_{26}^{n''} & \frac{1}{2}S_{27}^{n''} & \frac{1}{6}S_{28}^{n''} & S_{29}^{n''} & S_{30}^{n''} & \frac{1}{2}S_{31}^{n''} & \frac{1}{6}S_{32}^{n''} & S_{33}^{n''} & S_{34}^{n''} & \frac{1}{2}S_{35}^{n''} & \frac{1}{6}S_{36}^{n''} \\
S_{25}^{n'''} & S_{26}^{n'''} & \frac{1}{2}S_{27}^{n'''} & \frac{1}{6}S_{28}^{n'''} & S_{29}^{n'''} & S_{30}^{n'''} & \frac{1}{2}S_{31}^{n'''} & \frac{1}{6}S_{32}^{n'''} & S_{33}^{n'''} & S_{34}^{n'''} & \frac{1}{2}S_{35}^{n'''} & \frac{1}{6}S_{36}^{n'''}
\end{bmatrix} \tag{2.20}$$

2.3. Określenie macierzy przekroju i macierzy przeniesienia

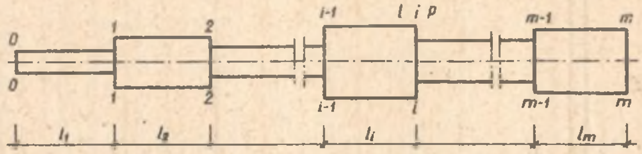
a) Pręt bez warunków pośrednich

Macierz przekroju ułożymy dla pręta bez warunków pośrednich [1], którego główne centralne osie bezwładności przekroju poszczególnych odcinków leżą w jednej płaszczyźnie, a oś pręta jest linią prostą

Rozważmy pręt o skokowo zmiennym przekroju (rys. 2).

---

[1] Pod pojęciem pręta bez warunków pośrednich będziemy rozumieli pręt podparty w sposób dowolny tylko na brzegach i nie posiadający na długości mas skupionych.



Rys. 2

Założymy, że pręt o długości $L = \sum_{i=1}^{m} l_i$ składa się z m odcinków o stałych przekrojach.

Celem określenia parametrów własnych prętów cienkościennych, a następnie funkcji własnych należy wyrazić brzegowe funkcje przemieszczeń $\eta(x), \xi(x), \varphi(x)$ (dla x = l) poprzez wartości brzegowe tych funkcji - dla x = 0.

Zależność ta zapisana w postaci macierzowej przedstawia się następująco:

$$Y_m = H \cdot Y_o \tag{2.21}$$

gdzie:

Y_o - macierz kolumnowa, zwana wektorem stanu w punkcie x = 0, utworzona z wartości brzegowych funkcji i ich pochodnych $\eta(x), \xi(x), \varphi(x)$ (dla x = 0),

Y_m - macierz kolumnowa, utworzona z wartości brzegowych funkcji η, ξ, φ i ich pochodnych, zwana wektorem stanu w punkcie (x = 1),

H - macierz kwadratowa, określająca zależność pomiędzy macierzą Y_o i Y_m.

Kwadratową macierz H nazywamy macierzą przeniesienia. Sposób wyznaczania macierzy przęsła podano w punkcie 2.2.

Macierz przekroju wyznacza się w przekrojach pręta, w których występuje skokowa zmiana charakterystyk geometrycznych pręta lub inny czynnik nieciągłości.

Postać macierzy przekroju określa związek pomiędzy wartościami funkcji η, ξ, φ oraz ich pochodnymi z lewej strony przekroju (w punkcie nieciągłości) oraz wartościami tych funkcji i ich pochodnymi z prawej strony przekroju.

W celu określenia powyższych zależności wyrazimy poszczególne siły wewnętrzne poprzez odpowiednie charakterystyki geometryczne przekroju pręta i pochodne funkcji przemieszczeń.

Wzory na siły wewnętrzne dla prętów cienkościennych przedstawiają się w postaci:

- moment zginający względem osi y

$$M_y = -EJ_y \cdot \xi'' , \tag{2.22}$$

- moment zginający względem osi z

$$M_z = EJ_z \cdot \eta'' ,$$

- bimoment

$$B = -EJ_\omega \cdot \varphi'' ,$$

- moment giętno-skrętny

$$M_\omega = -EJ_\omega \cdot \varphi''' ,$$

- moment czystego skręcania

$$M_x = GJ_x \cdot \varphi' ,$$

- siła poprzeczna działająca w kierunku osi y

$$Q_y = - EJ_z \cdot \eta'''$$

- siła poprzeczna działająca w kierunku osi z

$$Q_z = - EJ_y \cdot \xi'''$$

Na podstawie warunków nierozdzielności przemieszczeń i warunków kinetostatycz - nych napiszemy związki zachodzące pomiędzy funkcjami przemieszczeń η, ξ, φ i ich pochodnymi po obu stronach przekroju, w którym występuje tylko skokowa zmiana cech geometrycznych przekroju. Związki te przyjmują postać:

$$\eta_p = \eta_l - (z_{\alpha p} - z_{\alpha l}) \cdot \varphi_l \, , \qquad (2.23)_1$$

$$\xi_p = \xi_l + (y_{\alpha p} - y_{\alpha l}) \cdot \varphi_l \, , \qquad (2.23)_2$$

$$\eta_p' = \eta_l' - (z_{\alpha p} - z_{\alpha l}) \cdot \varphi_l' \, , \qquad (2.23)_3$$

$$\xi_p' = \xi_l' + (y_{\alpha p} - y_{\alpha l}) \cdot \varphi_l' \, , \qquad (2.23)_4$$

$$\varphi_p = \varphi_l \, , \qquad (2.23)_5$$

$$u_p = u_l \, , \qquad (2.23)_6$$

$$M_{sp} = M_{sl} + Q_{yl}(z_{\alpha p} - z_{\alpha l}) - Q_{zl}(y_{\alpha p} - y_{\alpha l}), \quad M_s = M_\omega + M_x \, , \qquad (2.23)_7$$

$$M_{yp} = M_{yl} \, , \qquad (2.23)_8$$

$$M_{zp} = M_{zl} \, , \qquad (2.23)_9$$

$$B_p = B_l \, , \qquad (2.23)_{10}$$

$$Q_{yp} = Q_{yl} \, , \qquad (2.23)_{11}$$

$$Q_{zp} = Q_{zl} \, . \qquad (2.23)_{12}$$

Warunki $(2.23)_3$ i $(2.23)_4$ nie są ściśle spełnione ze względu na deplanację różną po obu stronach rozpatrywanego przekroju. Jest to więc przybliżenie, które można uznać za najbliższe rzeczywistości.

Warunek $u_p = u_l$, z którego wyznaczamy zależność pomiędzy φ_p' i φ_l', powinien być spełniony tylko dla punktów wspólnych konturów po obu stronach rozpatrywanego prze - kroju.

Ze względu na przybliżone warunki $(2.23)_3$ i $(2.23)_4$ dla każdego punktu wspólnego konturów otrzymamy na ogół różne zależności pomiędzy φ_p' i φ_l'. Ostateczną zależność pomiędzy tymi wielkościami otrzymamy przy zastosowaniu jednaj z metod aproksymacyj - nych [28].

Przemieszczenie punktów przekroju w kierunku osi x określa się na podstawie zależności [118].

$$u(x,s) = \zeta(x) - \eta'(x) \cdot y(s) - \xi'(x) \cdot z(s) - \varphi'(x) \cdot \omega(s), \qquad (2.24)$$

gdzie:

$\zeta(x)$ - jest przemieszczeniem równoległym przekroju w kierunku osi x.

Jeżeli współrzędne kartezjańskie k-tego punktu styku przekrojów oznaczymy przez x_k i y_k, a jego współrzędne wycinkowe po obu stronach rozpatrywanego przekroju przez ω_l^k i ω_p^k, wówczas zależność pomiędzy φ_l' i φ_p' określona z warunku 6 przy wykorzystaniu warunków $(2.23)_3$ i $(2.23)_4$ dla punktu k przedstawiać się będzie w postaci:

$$\varphi_{kp}' = \frac{(z_{\omega p} - z_{\omega l})y_k - (y_{\omega p} - y_{\omega l}) + \omega_l^k}{\omega_p^k} \cdot \varphi_l' \tag{2.25}$$

lub

$$\varphi_{kp}' = W_k \cdot \varphi_l' \quad , \tag{2.26}$$

gdzie:

$$W_k = \frac{(z_{\omega p} - z_{\omega l}) \cdot y_k - (y_{\omega p} - y_{\omega l}) + \omega_l^k}{\omega_p^k}$$

k- punkt styku obu przekrojów.

Stosując jedną z metod statystycznych, otrzymamy ostateczny związek pomiędzy φ_p' i φ_l', jako

$$\varphi_p' = W_l \cdot \varphi_l' \tag{2.27}$$

Wstawiając (2.22) do (2.23) i wykorzystując (2.24), otrzymamy

$$\eta_p = \eta_l - (z_{\omega p} - z_{\omega l}) \cdot \varphi_l \quad , \tag{$(2.28)_1$}$$

$$\xi_p = \xi_l + (y_{\omega p} - y_{\omega l}) \cdot \varphi_l \quad , \tag{$(2.28)_2$}$$

$$\eta_p' = \eta_l' - (z_{\omega p} - z_{\omega l}) \cdot \varphi_l' \quad , \tag{$(2.28)_3$}$$

$$\xi_p' = \xi_l' + (y_{\omega p} - y_{\omega l}) \cdot \varphi_l' \quad , \tag{$(2.28)_4$}$$

$$\varphi_p = \varphi_l \quad , \tag{$(2.28)_5$}$$

$$\varphi_p' = W_l \cdot \varphi_l' \quad , \tag{$(2.28)_6$}$$

$$\varphi_p'' = \frac{J_{zl}}{J_{\omega p}}(z_{\omega p} - z_{\omega l}) \cdot \eta_l''' - \frac{J_{yl}}{J_{\omega p}}(y_{\omega p} - y_{\omega l}) + \frac{GJ_{xp} \cdot W_l - GJ_{xl}}{EJ_{\omega p}} \cdot \varphi_l' + \frac{J_{\omega l}}{J_{\omega p}} \cdot \varphi_l''' \tag{$(2.28)_7$}$$

$$\xi_p'' = \frac{J_{yl}}{J_{yp}} \cdot \xi_l'' \quad , \tag{$(2.28)_8$}$$

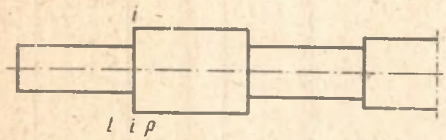
$$\eta_p'' = \frac{J_{zl}}{J_{zp}} \cdot \eta_l'' \quad , \tag{$(2.28)_9$}$$

$$\varphi_p'' = \frac{J_{\omega l}}{J_{\omega p}} \cdot \varphi_l'' \quad , \tag{$(2.28)_{10}$}$$

$$\eta_p''' = \frac{J_{zl}}{J_{zp}} \cdot \eta_l''' \quad , \tag{$(2.28)_{11}$}$$

$$\xi_p''' = \frac{J_{yl}}{J_{yp}} \xi_l''' \quad . \tag{$(2.28)_{12}$}$$

Przedstawione w wyrażeniach (2.28) symbole z indeksem "1" oznaczają funkcje przemieszczeń wraz z pochodnymi i cechy geometryczne dotyczące lewej strony rozpatrywa-



Rys. 3

nego przekroju i-i. Natomiast symbolami z indeksem "p" oznaczono odpowiednie wielkości dotyczące prawej strony przekroju i-i (rys. 3).

Przy wyznaczaniu macierzy przekroju ze względu na przejrzystość zapisu pominięto indeks "i"

Zależności (2.28), zapisane w postaci macierzowej, przedstawiają się następująco

$$\begin{bmatrix} \eta_p \\ \eta_p' \\ \eta_p'' \\ \eta_p''' \\ \xi_p \\ \xi_p' \\ \xi_p'' \\ \xi_p''' \\ \varphi_p \\ \varphi_p' \\ \varphi_p'' \\ \varphi_p''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (z_{sl}-z_{sp}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (z_{sl}-z_{sp}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_{zl}}{J_{zp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_{zl}}{J_{zp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (y_{sp}-y_{sl}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (y_{sp}-y_{sl}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_{yl}}{J_{yp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_{yl}}{J_{yp}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_8 & 0 & 0 & 0 & W_9 & 0 & 0 & \frac{J_{\omega l}}{J_{\omega p}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_2 & 0 & \frac{J_{\omega l}}{J_{\omega p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_l \\ \eta_l' \\ \eta_l'' \\ \eta_l''' \\ \xi_l \\ \xi_l' \\ \xi_l'' \\ \xi_l''' \\ \varphi_l \\ \varphi_l' \\ \varphi_l'' \\ \varphi_l''' \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

gdzie:

$$W_2 = \frac{GJ_{xp} \cdot W_1 - GJ_{xl}}{EJ_{\omega p}}, \quad W_8 = \frac{J_{zl}}{J_{\omega p}}(z_{sp} - z_{sl}), \quad W_9 = -\frac{J_{yl}}{J_{\omega p}}(y_{sp} - y_{sl}).$$

Macierz kwadratową wyrażenia (2.29) nazywamy macierzą przekroju lub macierzą węzła.

Jeżeli przez H_i oznaczymy macierz i-tego przęsła, a przez F_i macierz i-tego przekroju (skokowa zmiana), wówczas macierz przeniesienia H dla danego pręta podzielonego na m odcinków wyraża się w postaci:

$$H = H_m \cdot F_{m-1} \cdot H_{m-1} \cdot F_{m-2} \cdot \ldots \cdot F_i \cdot H_{i-1} \ldots H_1 \cdot F_0 \tag{2.30}$$

lub

$$\bar{H} = H_m \cdot \prod_{j=1}^{m-1} F_j \cdot H_j \tag{2.31}$$

b) Pręt z warunkami pośrednimi

Załóżmy, że w przekroju pręta, w którym chcemy zbudować macierz przekroju, oprócz zmiany cech geometrycznych wystąpi podparcie sprężyste i masa skupiona.

Jeżeli przez C_y, C_z, C_φ oznaczymy stałe sprężynowania odpowiednio w kierunku osi y, z i wokół osi x, a przez m i J_ξ masę skupioną i jej masowy moment bezwładności wokół osi ζ, to, przyjmując zasady znakowania sił wewnętrznych wg [118], warunki kinetostatyczne przyjmują postać

$$
\begin{aligned}
Q_{yp} &= Q_{y_1} + C_y \cdot \eta_0 - B_y , \\
Q_{zp} &= Q_{z_1} + C_z \cdot \xi_0 - B_z , \\
M_{sp} &= M_{s_1} + C_\varphi \cdot \varphi_0 - M_B + Q_{y1}(z_{\alpha p} - z_{\alpha_1}) - Q_{z_1}(y_{\alpha p} - y_{\alpha_1})
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
B_y &= -m \frac{\partial^2 \eta_0(x,t)}{\partial t^2} , \\
B_z &= -m \frac{\partial^2 \xi_0(x,t)}{\partial t^2} , \\
M_B &= -J_\xi \frac{\partial^2 \varphi_0(x,t)}{\partial t^2} ,
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_0 &= \eta_1 + z_{\alpha_1} \cdot \varphi_1 , \\
\xi_0 &= \xi_0 - y_{\alpha_1} \cdot \varphi_1 , \\
\varphi_0 &= \varphi_1
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

Pominięto tu podparcie sprężyste oraz bezwładność obrotową wokół osi y i z.
W przypadku drgań swobodnych po uwzględnieniu (2.34) otrzymamy

$$
\begin{aligned}
B_y &= m\omega_n^2 \eta_1 + m\omega_n^2 z_{\alpha_1} \varphi_1 , \\
B_z &= m\omega_n^2 \xi_1 - m\omega_n^2 y_{\alpha_1} \varphi_1 , \\
M_B &= J_\xi \omega_n^2 \varphi_1 .
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

Wstawiając (2.34) i (2.35) do (2.32), otrzymamy

$$
\begin{aligned}
Q_{yp} &= Q_{y_1} + (C_y - m\omega_n^2)\eta_1 + (C_y z_{\alpha_1} - m\omega_n^2 z_{\alpha_1}) \varphi_1 , \\
Q_{zp} &= Q_{z_1} + (C_z - m\omega_n^2)\xi_1 + (m\omega_n^2 y_{\alpha_1} - C_z y_{\alpha_1}) \varphi_1 , \\
M_{sp} &= M_{s_1} + (C_\varphi - J_\xi \omega_n^2)\varphi_1 + Q_{y1}(z_{\alpha p} - z_{\alpha_1}) - Q_{z1}(y_{\alpha p} - y_{\alpha_1})
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Jeżeli siły wewnętrzne Q_y, Q_z, M_s wyrazimy przez pochodne funkcji η, ξ, φ (zależności (2.22)), wówczas, na podstawie wyrażenia (2.36), możemy napisać

$$
\begin{aligned}
\eta_p''' &= \frac{m\omega_n^2 - C_y}{EJ_{zp}} \cdot \eta_1 + \frac{J_{z_1}}{J_{zp}} \cdot \eta_1''' + \frac{m\omega_n^2 \cdot z_{\alpha_1} - C_y \cdot z_{\alpha_1}}{EJ_{zp}} \cdot \varphi_1 , \\
\xi_p''' &= \frac{m\omega_n^2 - C_z}{EJ_{yp}} \cdot \xi_1 + \frac{J_{y_1}}{J_{yp}} \xi_1''' + \frac{C_z \cdot y_{\alpha_1} - m\omega_n^2 \cdot y_{\alpha_1}}{EJ_{yp}} \cdot \varphi_1 , \\
\varphi_p''' &= \frac{J_\xi \omega_n^2 - C_\varphi}{EJ_{\omega p}} \cdot \varphi_1 + \frac{GJ_{xp} \cdot w_1 - GJ_{x_1}}{EJ_{\omega p}} \cdot \varphi_1' + \frac{J_{\omega_1}}{J_{\omega p}} \cdot \varphi_1''' + \frac{J_{z_1}}{J_{\omega p}}(z_{\alpha p} - z_{\alpha_1}) \cdot \eta_1''' - \frac{J_{y_1}}{J_{\omega p}}(y_{\alpha p} - y_{\alpha_1}) \xi_1'''
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

Pozostałe zależności są takie same jak dla pręta bez warunków pośrednich.
Biorąc powyższe pod uwagę, postać macierzy przekroju przedstawia się następująco:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (z_{xl}-z_{xp}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (z_{xl}-z_{xp}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_{zl}}{J_{zp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_3 & 0 & 0 & \frac{J_{zl}}{J_{zp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & W_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (y_{xp}-y_{xl}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (y_{xp}-y_{xl}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_{yl}}{J_{yp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_5 & 0 & 0 & \frac{J_{yl}}{J_{yp}} & W_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_8 & 0 & 0 & 0 & W_9 & 0 & 0 & \frac{J_{\omega l}}{J_{\omega p}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_7 & W_2 & 0 & \frac{J_{\omega l}}{J_{\omega p}} \end{bmatrix}, \qquad (2.38)$$

gdzie:

W_1, W_2, W_8, W_9 jak dla pręta bez warunków pośrednich

$$W_3 = \frac{m\omega_n^2 - C_y}{EJ_{zp}}, \qquad W_4 = \frac{m\omega_n^2 \cdot z_{xl} - C_y \cdot z_{xl}}{EJ_{zp}},$$

$$W_5 = \frac{m\omega_n^2 - C_z}{EJ_{yp}}, \qquad W_6 = \frac{C_z \cdot y_{xl} - m\omega_n^2 \cdot y_{xl}}{EJ_{yp}},$$

$$W_7 = \frac{J_\xi \omega_n^2 - C_y}{EJ_{\omega p}}.$$

2.4. Określenie wartości własnych i funkcji własnych

Wartości własne (częstotliwości drgań swobodnych lub siły krytyczne) określa się z warunku przyrównania odpowiedniego minora macierzy przeniesienia H (2.30) - tzw. wyznacznik charakterystyczny - do zera. Postać wyznacznika charakterystycznego zależy od warunków brzegowych rozpatrywanego pręta.

Zestawienie niektórych warunków brzegowych przedstawiono w tablicy 2.

Tablica 2

Schemat podpory	Utwierdzenie	Przegub kulisty	Łożysko szyjne	Wolny koniec
Warunki brzegowe	$\eta = 0 \quad \eta' = 0$ $\xi = 0 \quad \xi' = 0$ $\varphi = 0 \quad \varphi' = 0$	$\eta = 0 \quad \eta'' = 0$ $\xi = 0 \quad \xi'' = 0$ $\varphi = 0 \quad \varphi'' = 0$	$\eta = 0 \quad \eta' = 0$ $\xi = 0 \quad \xi' = 0$ $\varphi = 0 \quad \varphi' = 0$	$\eta' = 0 \quad \eta''' = 0$ $\xi' = 0 \quad \xi''' = 0$ $\varphi' = 0 \quad \varphi''' = 0$

Spośród dwunastu wartości brzegowych funkcji η, ξ, φ, tworzących wektor stanu w przekroju początkowym, sześć określa się na podstawie warunków brzegowych dla x=0, pozostałe sześć tworzy układ równań jednorodnych, określający warunki brzegowe dla x = l. Ze względu na prostotę zapisu w dalszych rozwiązaniach pomijać będziemy indeks n oznaczający n-tą postać drgań, pamiętając jednak, że wektor stanu i macierzy przęsła zależy od postaci drgań. Jeżeli przez Y^p_{i-1} oznaczymy wektor stanu z prawej strony przekroju "i-1", wówczas wektor stanu w dowolnym punkcie przęsła "i" określony zależnością (2.19), zapiszemy w postaci

$$Y_i(x) = H_i(x) \cdot Y^p_{i-1}, \tag{2.39}$$

gdzie:

$H_i(x)$ - przedstawia macierz dla i-tego odcinka określoną zależnością (2.20),

$Y_i(x)$ - wektor stanu określający funkcje własne rozpatrywanego przęsła.

Przyjmując oznaczenia ze strony 17, wektor stanu Y^p_{i-1} określony jest następująco:

$$Y^p_{i-1} = F_{i-1}H_{i-1} \cdot \ldots \cdot F_2H_2 \cdot F_1H_1 \cdot Y_o \tag{2.40}$$

lub

$$Y^p_{i-1} = \left[\prod_{j=1}^{i-1} F_jH_j \right] \cdot Y_o \tag{2.41}$$

Wprowadzając zależność (2.41) do (2.39), otrzymamy wyrażenia na funkcje własne zapisane w postaci:

$$Y_i(x) = H_i(x) \cdot \left[\prod_{j=1}^{i-1} F_jH_j \right] \cdot Y_o \tag{2.42}$$

Należy podkreślić, że macierze F i H są funkcjami cech konstrukcyjnych pręta i częstości drgań swobodnych ω_n. Każdej częstości ω_n odpowiada inny wektor stanu $Y_i(x)$.

3. ORTOGONALIZACJA

3.1. Ortogonalizacja funkcji własnych

W rozdziale 2 podano sposób wyznaczania wartości własnych i funkcji własnych rozpatrywanego zagadnienia dla prętów cienkościennych. Zapisane w postaci macierzowej (2.39) funkcje własne stanowić będą punkt wyjścia do rozwiązania zagadnienia drgań wymuszonych omawianych prętów.

Rozwiązanie zagadnienia drgań wymuszonych otrzymano przy zastosowaniu metody rozwinięcia funkcji przemieszczeń $\eta(x,t)$, $\xi(x,t)$, $\varphi(x,t)$ w uogólniony szereg Fouriera [90] według układu funkcji własnych. Ze względu na przeprowadzone operacje całkowe w tym rozwiązaniu celowe jest zortogonalizowanie i znormalizowanie funkcji własnych.

Proces ortogonalizacji i normalizacji funkcji przedstawimy dla układu funkcji $\eta_n(x)$ a następnie podamy końcowe wzory dla funkcji $\xi_n(x)$ i $\varphi_n(x)$.

Załóżmy, że na podstawie zależności, wprowadzonych w rozdziale 2, określimy nieskończony układ funkcji własnych $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$, $\eta_3(x)$, ..., $\eta_n(x)$, ..., liniowo niezależnych, określonych i ciągłych w przedziale $[a,b]$.

Jeżeli przez $f_n(x)$ oznaczymy zortogonalizowane funkcje, to wyrażenia na te funkcje przyjmą postać:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \eta_1 , \\
f_2(x) &= \lambda_{21} f_1 + \eta_2 , \\
f_3(x) &= \lambda_{31} f_1 + \lambda_{32} f_2 + \eta_3 , \qquad (3.1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_n(x) &= \lambda_{n1} f_1 + \lambda_{n2} f_2 + \ldots + \lambda_{nn-1} f_{n-1} + \eta_n .
\end{aligned}
$$

Zależność (3.1), w zapisie sumacyjnym, przedstawia się następująco

$$f_q = \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_{qi} \cdot f_i + \eta_q \; ; \qquad q = 2,3,4, \ldots n, \qquad (3.2)$$

dla $q = 1$, $f_1 = \eta_1$

Mnożąc stronami wyrażenie (3.2) przez f_i i całkując w przedziale $[a,b]$, z warunku ortogonalności otrzymamy wyrażenie na liczby λ_{qi}

$$\lambda_{qi} = -\frac{\int_a^b \eta_q \cdot f_i \, dx}{\int_a^b f_i \cdot f_i \, dx} \qquad (3.3)$$

Funkcje f_q można wyrazić poprzez funkcję za pomocą wzorów rekurencyjnych

$$f_q = \sum_{i=1}^{i=q} K_{qi} \cdot \eta_i \; ; \qquad q = 1,2, \ldots n, \qquad (3.4)$$

gdzie:

$$K_{qi} = \sum_{w=i}^{w=q-1} \lambda_{qw} \cdot K_{wi} , \qquad \text{dla } q > i \qquad (3.5)$$

Dla $q = i$, $k_{ii} = 1$

funkcja f_q będzie unormowana, jeżeli pomnożymy ją przez stały czynnik normalizujący

$$\lambda_q = \frac{1}{\pm\sqrt{\int_a^b f_q \cdot f_q \, dx}} . \tag{3.6}$$

Jeżeli przez $\bar{\eta}_n(x)$ oznaczymy zortogonalizowaną i unormowaną funkcję własną, to na podstawie wzorów (3.4), (3.5), (3.6) funkcję $\bar{\eta}_n(x)$ można wyrazić w postaci [35]:

$$\bar{\eta}_n(x) = \frac{\begin{vmatrix} \int_a^b \eta_1^2 dx & \int_a^b \eta_1\eta_2 dx & \dots & \int_a^b \eta_1\eta_{n-1} dx & \eta_1(x) \\ \int_a^b \eta_2\eta_1 dx & \int_a^b \eta_2^2 dx & \dots & \int_a^b \eta_2\eta_{n-1} dx & \eta_2(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_a^b \eta_n\eta_1 dx & \int_a^b \eta_n\eta_2 dx & \dots & \int_a^b \eta_n\eta_{n-1} dx & \eta_n(x) \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} , \tag{3.7}$$

gdzie:

Δ_n oznacza tak zwany wyznacznik Grama funkcji

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \int_a^b \eta_1^2 dx & \int_a^b \eta_1\eta_2 dx & \dots & \int_a^b \eta_1\eta_n \\ \int_a^b \eta_2\eta_1 dx & \int_a^b \eta_2^2 dx & \dots & \int_a^b \eta_2\eta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_a^b \eta_n\eta_1 dx & \int_a^b \eta_n\eta_2 dx & \dots & \int_a^b \eta_n^2 dx \end{vmatrix} , \tag{3.8}$$

$\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}$ - stały czynnik normalizujący.

Ortogonalizację należy przeprowadzić dla każdego odcinka pręta.

W celu określenia elementów wyznacznika (3.8) dla i-tego odcinka pręta funkcje własne - przemieszczenie $\eta_n(x)$ - określone poprzez (2.39) przedstawimy w postaci

$$\eta_n(x) = S_1^n \cdot \eta_{i-1}^{p} + S_2^n \cdot \eta_{i-1}^{p'} + S_3^n \cdot \eta_{i-1}^{p''} + S_4^n \cdot \eta_{i-1}^{p'''} + S_5^n \cdot \xi_{i-1}^{p} + S_6^n \cdot \xi_{i-1}^{p'} + S_7^n \cdot \xi_{i-1}^{p''} + S_8^n \cdot \xi_{i-1}^{p'''} +$$
$$+ S_9^n \cdot \varphi_{i-1}^{p} + S_{10}^n \cdot \varphi_{i-1}^{p'} + S_{11}^n \cdot \varphi_{i-1}^{p''} + S_{12}^n \cdot \varphi_{i-1}^{p'''} . \tag{3.9}$$

Wektor stanu z prawej strony przekroju i-1 określony jest zależnością (2.40). Jeżeli do zależności (3.9) podstawimy funkcje $S_1^n, \dots, S_{12}^n$ z wyrażenia (2.12), wówczas otrzymamy

$$\eta_n(x) = \sum_{j=0}^{j=r} \Big[\big(A_{2j}^1 \cdot \eta_{i-1}^{p} + A_{2j}^2 \cdot \eta_{i-1}^{p''} + A_{2j}^3 \cdot \xi_{i-1}^{p} + A_{2j}^4 \cdot \xi_{i-1}^{p''} + A_{2j}^5 \cdot \varphi_{i-1}^{p} + A_{2j}^6 \cdot \varphi_{i-1}^{p''} \big) \cdot x^{2j} +$$
$$+ \big(A_{2j+1}^1 \cdot \eta_{i-1}^{p'} + A_{2j+1}^2 \cdot \eta_{i-1}^{p'''} + A_{2j+1}^3 \cdot \xi_{i-1}^{p'} + A_{2j+1}^4 \cdot \xi_{i-1}^{p'''} + A_{2j+1}^5 \cdot \varphi_{i-1}^{p'} + A_{2j+1}^6 \cdot \varphi_{i-1}^{p'''} \big) \cdot x^{2j+1} \Big] . \tag{3.10}$$

Wyrażenia w nawiasach są jednoznacznie określone dla danej postaci drgań. Wprowadzimy oznaczenia

$$
\begin{aligned}
&A^1_{2j}\cdot\eta^{p}_{i-1} + A^2_{2j}\cdot\eta^{p''}_{i-1} + A^3_{2j}\cdot\xi^{p}_{i-1} + A^4_{2j}\cdot\xi^{p''}_{i-1} + A^5_{2j}\cdot\varphi^{p}_{i-1} + A^6_{2j}\cdot\varphi^{p''}_{i-1} = a^n_{2j}\ ,\\
&A^1_{2j+1}\cdot\eta^{p'}_{i-1} + A^2_{2j+1}\cdot\eta^{p'''}_{i-1} + A^3_{2j+1}\cdot\xi^{p'}_{i-1} + A^4_{2j+1}\cdot\xi^{p'''}_{i-1} + A^5_{2j+1}\cdot\varphi^{p'}_{i-1} + A^6_{2j+1}\cdot\varphi^{p'''}_{i-1} = a^n_{2j+1}\ .
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Wówczas, podstawiając (3.11) do(3.10), otrzymamy

$$\eta_n(x) = \sum_{j=0}^{j=r} a^n_{2j}\cdot x^{2j} + \sum_{j=0}^{j=r} a^n_{2j+1}\cdot x^{2j+1} \tag{3.12}$$

lub

$$\eta_n(x) = \sum_{j=0}^{j=r} a^n_j\cdot x^j\ , \tag{3.13}$$

gdzie:

a^n_j – ciąg utworzony ze współczynników a^n_{2j} i a^n_{2j+1} .

Wykorzystując (3.13), określimy wzory na elementy wyznacznika Grama dla funkcji $\bar{\eta}_n(x)$.

Wyrażenie na całkę $\int_a^b \eta_q\cdot\eta_q dx$ przedstawia się następująco

$$\int_a^b \eta_q\cdot\eta_q dx = \int_a^b \Big(\sum_{j=0}^{j=2r+1} a^q_j\cdot x^j\Big)\Big(\sum_{j=0}^{j=2r+1} a^q_j\cdot x^j\Big)dx\ , \tag{3.14}$$

$$\int_a^b \eta_q\cdot\eta_q\, dx = \sum_{j=0}^{j=2r+1} d^q_j\cdot \frac{x^{j+1}}{j+1}\Big|_a^b\ ,$$

gdzie:

$$d^q_j = \sum_{w=0}^{w=j} a^q_w\cdot a^q_{j-w}\ . \tag{3.15}$$

W podobny sposób wyznaczymy całkę $\int_a^b \eta_q\cdot\eta_p dx$

$$\int_a^b \eta_q\cdot\eta_p\, dx = \sum_{j=0}^{j=2r+1} d^{qp}_j\cdot \frac{x^{j+1}}{j+1}\Big|_a^b\ , \tag{3.16}$$

gdzie:

$$d^{qp}_j = \sum_{w=0}^{w=j} a^q_w\cdot a^p_{j-w} \tag{3.17}$$

Przyjmując początek układu współrzędnych na lewym końcu przedziału, czyli a = 0, wyrażenia (3.14) i (3.16) mają postać:

$$\int_a^b \eta_q\cdot\eta_q\, dx = \sum_{j=0}^{j=4r+2} d^q_j\cdot \frac{b^{j+1}}{j+1} \tag{3.18}$$

$$\int_a^b \eta_q\cdot\eta_p\, dx = \sum_{j=0}^{j=4r+2} d^{qp}_j\cdot \frac{b^{j+1}}{j+1} \tag{3.19}$$

Na podstawie (3.7) napiszemy wyrażenia na ortonormalne funkcje

$$\bar{\eta}_n(x) = k^\eta_1\cdot\eta_1(x) + k^\eta_2\cdot\eta_2(x) + k^\eta_3\cdot\eta_3(x) + \ldots + k^\eta_n\cdot\eta_n(x), \tag{3.20}$$

gdzie:

k_n^η - są odpowiednimi podwyznacznikami wyznacznika Grama podzielonymi przez stały czynnik normalizujący.

Wstawiając (3.13) do (3.20), otrzymamy

$$\bar{\eta}_n(x) = \sum_{j=0}^{j=2r+1} (k_1^\eta \cdot a_j^1 + k_2^\eta \cdot a_j^2 + k_3^\eta \cdot a_j^3 + \ldots + k_n^\eta \cdot a_j^n) \cdot x^j \tag{3.21}$$

lub

$$\bar{\eta}_n(x) = \sum_{j=0}^{j=2r+1} k_{jn}^\eta \cdot x^j , \tag{3.22}$$

gdzie:

$$k_{jn}^\eta = \sum_{i=1}^{i=n} k_i^\eta \cdot a_j^i \tag{3.23}$$

Z uwagi na to, że algorytm ortogonalizacji funkcji $\xi_n(x)$ i $\varphi_n(x)$ jest taki sam jak funkcji $\eta_n(x)$, dlatego dla tych funkcji podamy tylko ostateczne wzory na ortonormalne funkcje $\bar{\xi}_n(x)$ i $\bar{\varphi}_n(x)$. Dla funkcji $\bar{\xi}_n(x)$ mamy

$$\bar{\xi}_n(x) = \frac{\begin{vmatrix} \int_a^b \xi_1^2 dx & \int_a^b \xi_1\xi_2 dx & \ldots & \int_a^b \xi_1\xi_n dx & \xi_1(x) \\ \int_a^b \xi_2\xi_1 dx & \int_a^b \xi_2^2 dx & \ldots & \int_a^b \xi_2\xi_{n-1} dx & \xi_2(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_a^b \xi_n\xi_1 dx & \int_a^b \xi_n\xi_2 dx & \ldots & \int_a^b \xi_n\xi_{n-1} dx & \xi_n(x) \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} , \tag{3.24}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \int_a^b \xi_1^2 dx & \int_a^b \xi_1\xi_2 dx & \ldots & \int_a^b \xi_1\xi_n dx \\ \int_a^b \xi_2\xi_1 dx & \int_a^b \xi_2^2 dx & \ldots & \int_a^b \xi_2\xi_n dx \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_a^b \xi_n\xi_1 dx & \int_a^b \xi_n\xi_2 dx & \ldots & \int_a^b \xi_n^2 dx \end{vmatrix} \tag{3.25}$$

lub

$$\bar{\xi}_n(x) = \sum_{j=0}^{j=2r+1} k_{jn} \cdot x^j , \tag{3.26}$$

gdzie:

$$k_{jn}^\xi = \sum_{i=1}^{i=n} k_i^\xi \cdot b_j^i , \tag{3.27}$$

k_i^ξ - podwyznaczniki wyznacznika (3.24) lub wyznacznika Grama (3.25) podzielone przez stały czynnik normalizujący $\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}$

b_j^n - ciąg współczynników szeregu potęgowego funkcji własnej $\xi_n(x)$ obliczony wg wzorów:

$$
\begin{aligned}
b_{2j}^{n} &= B_{2j}^{1}\cdot\eta_{i-1}^{p} + B_{2j}^{2}\cdot\eta_{i-1}^{p''} + B_{2j}^{3}\cdot\xi_{i-1}^{p} + B_{2j}^{4}\cdot\xi_{i-1}^{p''} + B_{2j}^{5}\cdot\varphi_{i-1}^{p} + B_{2j}^{6}\cdot\varphi_{i-1}^{p''}\,,\\
b_{2j+1}^{n} &= B_{2j+1}^{1}\cdot\eta_{i-1}^{p'} + B_{2j+1}^{2}\cdot\eta_{i-1}^{p'''} + B_{2j+1}^{3}\cdot\xi_{i-1}^{p'} + B_{2j+1}^{4}\cdot\xi_{i-1}^{p'''} + B_{2j+1}^{5}\cdot\varphi_{i-1}^{p'} + B_{2j+1}^{6}\cdot\varphi_{i-1}^{p'''}\,.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Elementy wyznacznika Grama i wyznacznika funkcji ortogonalizowanej określa się ze wzoru (przy założeniu $a=0$)

$$
\begin{aligned}
\int_0^b \xi_q\,\xi_q\,dx &= \sum_{j=0}^{j=4r+2} e_j^{q}\cdot\frac{b^{j+1}}{j+1}\,,\\
\int_0^b \xi_q\,\xi_p\,dx &= \sum_{j=0}^{j=4r+2} e_j^{qp}\cdot\frac{b^{j+1}}{j+1}\,,
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
e_j^{q} &= \sum_{w=0}^{w=j} b_w^{q}\cdot b_{j-w}^{q}\,,\\
e_j^{qp} &= \sum_{w=0}^{w=j} b_w^{q}\cdot b_{j-w}^{p}\,,
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Dla funkcji $\bar{\varphi}_n(x)$ wzory przedstawiają się następująco

$$
\bar{\varphi}_n(x) = \frac{\begin{vmatrix}
\int_a^b \varphi_1^2\,dx & \int_a^b \varphi_1\varphi_2\,dx & \dots & \int_a^b \varphi_1\varphi_{n-1}\,dx & \varphi_1(x)\\
\int_a^b \varphi_2\varphi_1\,dx & \int_a^b \varphi_2^2\,dx & \dots & \int_a^b \varphi_2\varphi_{n-1}\,dx & \varphi_2(x)\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\int_a^b \varphi_n\varphi_1\,dx & \int_a^b \varphi_n\varphi_2\,dx & \dots & \int_a^b \varphi_n\varphi_{n-1}\,dx & \varphi_n(x)
\end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_{n-1}\,\Delta_n}}\,,
\tag{3.31}
$$

$$
\Delta_n = \begin{vmatrix}
\int_a^b \varphi_1^2\,dx & \int_a^b \varphi_1\varphi_2\,dx & \dots & \int_a^b \varphi_1\varphi_n\,dx\\
\int_a^b \varphi_2\varphi_1\,dx & \int_a^b \varphi_2^2\,dx & \dots & \int_a^b \varphi_2\varphi_n\,dx\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
\int_a^b \varphi_n\varphi_1\,dx & \int_a^b \varphi_n\varphi_2\,dx & \dots & \int_a^b \varphi_n^2\,dx
\end{vmatrix}
\tag{3.32}
$$

Po rozwinięciu wyznacznika (3.31) otrzymamy

$$
\bar{\varphi}_n(x) = \sum_{j=0}^{j=2r+1} k_{jn}^{\varphi}\cdot x^j\,,
\tag{3.33}
$$

gdzie:

$$
k_{jn}^{\varphi} = \sum_{i=0}^{i=n} K_i\cdot C_j^i\,,
\tag{3.34}
$$

K_i^{φ} – podwyznaczniki wyznacznika (3.31), podzielone przez stały czynnik normalizujący,

C_j^n - ciąg współczynników szeregu potęgowego funkcji $\varphi_n(x)$, obliczony wg wzoru

$$
\begin{aligned}
C_{2j}^n &= C_{2j}^1 \cdot \eta_{i-1}^{p} + C_{2j}^2 \cdot \eta_{i-1}^{p''} + C_{2j}^3 \cdot \xi_{i-1}^{p} + C_{2j}^4 \cdot \xi_{i-1}^{p''} + C_{2j}^5 \cdot \varphi_{i-1}^{p} + C_{2j}^6 \cdot \varphi_{i-1}^{p''} , \\
C_{2j+1}^n &= C_{2j+1}^1 \cdot \eta_{i-1}^{p'} + C_{2j+1}^2 \cdot \eta_{i-1}^{p'''} + C_{2j+1}^3 \cdot \xi_{i-1}^{p'} + C_{2j+1}^4 \cdot \xi_{i-1}^{p'''} + C_{2j+1}^5 \cdot \varphi_{i-1}^{p'} + C_{2j+1}^6 \cdot \varphi_{i-1}^{p'''} .
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Elementy wyznacznika Grama i wyznacznika funkcji ortogonalizowanej (x) określa się ze wzorów, dla a = 0, jako

$$
\begin{aligned}
\int_0^b \varphi_q \varphi_q \, dx &= \sum_{j=0}^{j=4r+2} q_j^q \cdot \frac{b^{j+1}}{j+1} , \\
\int_0^b \varphi_q \varphi_p \, dx &= \sum_{j=0}^{j=4r+2} q_j^{qp} \cdot \frac{b^{j+1}}{j+1} ,
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
q_j^q &= \sum_{w=0}^{w=j} C_w^q \cdot C_{j-w}^q , \\
q_j^{qp} &= \sum_{w=0}^{w=j} C_w^q \cdot C_{j-w}^p .
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

3.2. Ortogonalizacja wektorów stanu

Jeżeli przez $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $Y_3(x)$, ..., $Y_n(x)$, gdzie $Y_n(x) =$ colon $[\eta_n(x), \xi_n(x), \varphi_n(x)]$, oznaczymy wektory własne stanu, to wyrażenia na zortogonolizowane (w sensie skalarnym) wektory stanu $\bar{Z}_1(x)$, $\bar{Z}_2(x)$, $\bar{Z}_3(x)$, ..., $\bar{Z}_n(x)$ przyjmą postać:

$$
\bar{Z}_q(x) = \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_{qi} \bar{Z}_i(x) + Y_q(x) , \tag{3.38}
$$

$$
q = 1, 2, 3, \ldots, n,
$$

dla

$$
q = 1, \qquad \bar{Z}_1(x) = Y_1(x).
$$

Liczby λ_{qi} - wyznacza się z warunku ortogonalności

$$
\lambda_{qi} = - \frac{\int_a^b Y_q(x) \odot \bar{Z}_i(x) \, dx}{\int_a^b \bar{Z}_i(x) \odot \bar{Z}_i(x) \, dx} , \tag{3.39}
$$

gdzie:

$\odot$ - oznacza iloczyn skalarny wektorów.

Wektor $\bar{Z}_q(x)$ będzie unormowany, jeżeli pomnożymy go przez stały czynnik normalizujący

$$
\lambda_q = \frac{1}{\pm\sqrt{\int_a^b \bar{Z}_q(x) \odot \bar{Z}_q(x) \, dx}} . \tag{3.40}
$$

Wyrażenia na zortogonalizowane i unormowane wektory stanu $Z_n(x)$, podobnie jak w punkcie 3.1, można zapisać w następującej postaci wyznacznikowej

$$Z_n(x) = \frac{\begin{vmatrix} \int_a^b Y_1^2 dx & \int_a^b Y_1 \odot Y_2 dx & \dots & \int_a^b Y_1 \odot Y_{n-1} dx \\ \int_a^b Y_2 \odot Y_1 dx & \int_a^b Y_2^2 dx & \dots & \int_a^b Y_2 \odot Y_{n-1} dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_a^b Y_n \odot Y_1 dx & \int_a^b Y_n \odot Y_2 dx & \dots & \int_a^b Y_n \odot Y_{n-1} dx \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_{n-1} \cdot \Delta_n}} \tag{3.41}$$

gdzie:

Δ_n - oznacza tak zwany wyznacznik Grama wektorów $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \int_a^b Y_1^2 dx & \int_a^b Y_1 \odot Y_2 dx & \dots & \int_a^b Y_1 \odot Y_n dx \\ \int_a^b Y_2 \odot Y_1 dx & \int_a^b Y_2^2 dx & \dots & \int_a^b Y_2 \odot Y_n dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_a^b Y_n \odot Y_1 dx & \int_a^b Y_n \odot Y_2 dx & \dots & \int_a^b Y_n^2 dx \end{vmatrix} , \tag{3.42}$$

$\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}$ - stały czynnik normalizujący.

Elementami wyznaczników (3.41) i (3.42) są całki z iloczynów skalarnych własnych wektorów stanu $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ o postaci

$$\int_a^b Y_q \odot Y_p \, dx = \int_a^b (\eta_q \eta_p + \xi_q \xi_p + \varphi_q \varphi_p) \, dx . \tag{3.43}$$

Uwzględniając oznaczenia (3.11), (3.28),(3.35) i przyjmując założenia wyszczególnione w punkcie 3.1, wyrażenie (3.43) można zapisać w następującej postaci

$$\int_a^b Y_q \odot Y_p \, dx = \sum_{j=0}^{j=4r+2} d_j^{qp} \cdot \frac{b^{j+1}}{j+1} + \sum_{j=0}^{j=4r+3} e^{qp} \cdot \frac{b^{j+1}}{j+1} + \sum_{j=0}^{j=4r+2} q_j^{qp} \cdot \frac{b^{j+1}}{j+1} \tag{3.44}$$

gdzie:

d_j^{qp}, e^{qp} i q_j^{qp} - współczynniki określone za pomocą wzorów (3.17), (3.30) i (3.37).

Na podstawie (3.41) napiszemy wyrażenia na ortonormalne wektory stanu w postaci rozwiniętej

$$Z_n(x) = \bar{k}_1 \cdot Y_1(x) + \bar{k}_2 \cdot Y_2(x) + \bar{k}_3 \cdot Y_3(x) + \dots + \bar{k}_n \cdot Y_n(x) \tag{3.45}$$

gdzie:

$\bar{k}_n$ - odpowiednie podwyznaczniki wyznacznika Grama (3.42) podzielone przez stały czynnik normalizujący.

Składowe ortonormalnego wektora stanu $Z_n(x) = \mathrm{colon}\left[\bar{\bar{\eta}}_n(x), \bar{\bar{\xi}}_n(x), \bar{\bar{\varphi}}_n(x)\right]$ przyjmują ostatecznie postać

$$\bar{\bar{\eta}}_n(x) = \sum_{j=0}^{j=2n+1} \bar{k}_{jn}^{\eta} \cdot x^j \quad ,$$
$$\bar{\bar{\xi}}_n(x) = \sum_{j=0}^{j=2n+1} \bar{k}_{jn}^{\xi} \cdot x^j \quad , \qquad (3.46)$$
$$\bar{\bar{\varphi}}_n(x) = \sum_{j=0}^{j=2n+1} \bar{k}_{jn}^{\varphi} \cdot x^j \quad ,$$

gdzie:

$$\bar{k}_{jn}^{\eta} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{k}_i \cdot a_j^i \quad ,$$
$$\bar{k}_{jn}^{\xi} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{k}_i \cdot b_j^i \quad ,$$
$$\bar{k}_{jn}^{\varphi} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{k}_i \cdot c_j^i \quad .$$

4. DRGANIA WYMUSZONE

4.1. Przypadek ogólny

4.1.1. Podstawowy układ równań różniczkowych

Rozważmy przypadek zagadnienia drgań pręta cienkościennego poddanego działaniu zmiennym siłom wymuszającym

$$q_y(x,t), \quad q_z(x,t), \quad m(x,t),$$

gdzie:

$q_y(x,t)$ – składowa natężenia obciążenia wymuszającego w kierunku osi y,

$q_z(x,t)$ – składowa natężenia obciążenia wymuszającego w kierunku osi z,

$m(x,t)$ – natężenie momentu skręcającego od obciążenia zewnętrznego obliczonego względem środka zginania.

Pod wpływem ww. obciążeń zewnętrznych pręt wykonuje drgania, które opisują równania [118] :

$$\begin{gathered}
EJ_z \cdot \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - \frac{\gamma J_z}{g} \cdot \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma A}{g} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + P \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\gamma A z_\alpha}{g} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + P z_\alpha \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = q_y(x,t), \\
EJ_y \cdot \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} - \frac{\gamma J_y}{g} \cdot \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma A}{g} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + P \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\gamma A y_\alpha}{g} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - P y_\alpha \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = q_z(x,t), \\
\frac{\gamma A z_\alpha}{g} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + P z_\alpha \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\gamma A y_\alpha}{g} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - P y_\alpha \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + EJ_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \frac{\gamma J_\omega}{g} \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} + \\
+ \frac{\gamma A r}{g} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - GJ_x \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + P r^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = m(x,t).
\end{gathered} \tag{4.1$_1$}$$

Równania $(4.1)_1$ można otrzymać na podstawie równań (2.1) (drgań swobodnych) w wyniku przyrównania lewych stron tych równań do odpowiednich składowych stanu obciążenia

$$q_y(x,t), \quad q_z(x,t), \quad m(x,t).$$

Aby rozwiązanie układu równań różniczkowych $(4.1)_1$ było jednoznaczne, konieczne jest określenie położenia osi pręta w chwili początkowej. Położenie osi pręta jest w danej chwili w pełni określone, jeżeli znamy składowe przemieszczenia i prędkości każdego punktu jego osi. Stąd położenie osi pręta w chwili początkowej (warunki początkowe) będzie jednoznacznie określone przez podanie rozkładu przemieszczeń i prędkości w funkcji x dla chwili t = 0. W związku z tym warunki początkowe dla rozpatrywanych zagadnień przyjmują postać:

$$\eta(x,t)\Big|_{t=0} = \eta^{o}(x), \qquad \frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \eta^{V_o}(x),$$
$$\xi(x,t)\Big|_{t=0} = \xi^{o}(x), \qquad \frac{\partial\xi(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \xi^{V_o}(x), \tag{4.1$_2$}$$
$$\varphi(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi^{o}(x), \qquad \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi^{V_o}(x).$$

Dla pełnego określenia rozwiązania układu równań różniczkowych (4.1), poza warunkami początkowymi, konieczne jest również określenie zjawisk zachodzących na brzegu. Liczba warunków brzegowych dla danej funkcji jest równa rzędowi równania różniczkowego względem zmiennej x.

Postać warunków brzegowych zależy od warunków podparcia pręta. Zestawienie niektórych warunków brzegowych przedstawia tablica 2.

Zależności $(4.1)_1$ opisują drgania giętno-skrętne.

Oprócz drgań giętno-skrętnych pręt wykonuje drgania podłużne, które przebiegają niezależnie od drgań giętno-skrętnych. Podobnie jak w przypadku analizy zagadnienia drgań swobodnych (p.2) drgania podłużne są opisane równaniem różniczkowym (nie sprzężonym z układem $(4.1)_1$), którego rozwiązanie jest powszechnie znane.

Rozpatrywać będziemy pręt o zmiennym przekroju obciążony na końcach stałą siłą P, działającą centralnie. Pręt o dowolnej zmianie przekroju modelować będziemy prętem o odcinkowo stałym przekroju.

4.1.2. Pręt o zmiennym przekroju

W przypadku zagadnienia dynamiki technicznych układów ciągłych stosuje się dosyć często dyskretyzacje tych układów [17]. Jest to wynikiem tendencji do uproszczeń teorii matematycznych modelu. Zatem w wielu przypadkach, chcąc uniknąć trudności związanych z rozwiązywaniem równań różniczkowych cząstkowych czy równań całkowych, przechodzi się do odpowiadających im, w pewnej mierze, równań różniczkowych zwyczajnych.

Dyskretyzacja technicznych układów ciągłych prowadzi więc do przekształcenia układu równań różniczkowych cząstkowych w nieskończony układ różniczkowych zwyczajnych. W praktyce ograniczamy się zwykle do ich skończonej liczby.

W celu zbudowania układu równań różniczkowych zwyczajnych, równoważnych w pwenym stopniu układowi równań $(4.1)_1$, zastosujemy rozwinięcie funkcji przemieszczeń punktów osi środków zginania $\eta(x,t)$, $\xi(x,t)$ i kąta obrotu przekroju $\varphi(x,t)$ w uogólniony szereg Fouriera [44,90] wg ortonormalnych funkcji własnych $\bar{\eta}_n(x)$, $\bar{\xi}_n(x)$, $\bar{\varphi}_n(x)$, określonych w punkcie 3.

Rozwinięcie ww. funkcji w uogólniony szereg Fouriera napiszemy w postaci:

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^1(t)\cdot\bar{\eta}_n(x),$$
$$\xi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^2(t)\cdot\bar{\xi}_n(x), \tag{4.2}$$
$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^3(t)\cdot\bar{\varphi}_n(x),$$

gdzie:

$T^1_n(t)$, $T^2_n(t)$, $T^3_n(t)$ - współczynniki rozkładu funkcji

$\eta(x,t)$, $\xi(x,t)$, $\varphi(x,t)$ - w uogólniony szereg Fouriera.

Podstawiając zależności (4.2) do układu równań różniczkowych $(4.1)_1$, przekształcimy układ równań różniczkowych cząstkowych w układ równań różniczkowych zwyczajnych o zmiennych współczynnikach, w których niewiadomymi są współczynniki rozkładu funkcji $\eta(x,t)$, $\xi(x,t)$, $\varphi(x,t)$ w uogólniony szereg Fouriera T^1_n, T^2_n, T^3_n. Układ ten przedstawia się następująco

$$
\begin{gathered}
EJ_z\sum_{n=1}^{\infty}T^1_n(t)\cdot\bar{\eta}^{IV}_n(x)-\frac{\gamma J_z}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^1_n(t)\cdot\bar{\eta}''_n(x)+\frac{\gamma A}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^1_n(t)\cdot\bar{\eta}_n(x)+P\sum_{n=1}^{\infty}T^1_n(t)\cdot\bar{\eta}''_n(x)+\\
+\frac{\gamma A z_\alpha}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^3_n(t)\cdot\bar{\varphi}_n(x)+Pz_\alpha\sum_{n=1}^{\infty}T^3_n(t)\cdot\bar{\varphi}''_n(x)=q_y(x,t)\;,\\
EJ_y\sum_{n=1}^{\infty}T^2_n(t)\cdot\bar{\xi}^{IV}_n(x)-\frac{\gamma J_y}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^2_n(t)\cdot\bar{\xi}''_n(x)+\frac{\gamma A}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^2_n(t)\cdot\bar{\xi}_n(x)+P\sum_{n=1}^{\infty}T^2_n(t)\cdot\bar{\xi}''_n(x)+\\
-\frac{\gamma A y_\alpha}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^3_n(t)\cdot\bar{\varphi}_n(x)-Py_\alpha\sum_{n=1}^{\infty}T^3_n(t)\cdot\bar{\varphi}''_n(x)=q_z(x,t)\;,\\
\frac{\gamma A z_\alpha}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^1_n(t)\cdot\bar{\eta}_n(x)+Pz_\alpha\sum_{n=1}^{\infty}T^1_n(t)\cdot\bar{\eta}''_n(x)-\frac{\gamma A y_\alpha}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^2_n(t)\cdot\bar{\xi}_n(x)-Py_\alpha\sum_{n=1}^{\infty}T^2_n(t)\cdot\bar{\xi}''_n(x)+\\
+EJ_\omega\sum_{n=1}^{\infty}T^3_n(t)\cdot\bar{\varphi}^{IV}_n(x)-\frac{\gamma J_\omega}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^3_n(t)\cdot\bar{\varphi}''_n(x)+\frac{\gamma A r^2}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^3_n(t)\cdot\bar{\varphi}_n(x)+\\
-GJ_x\sum_{n=1}^{\infty}T^3_n(t)\cdot\bar{\varphi}''_n(x)+Pr^2\sum_{n=1}^{\infty}T^3_n(t)\cdot\bar{\varphi}''_n(x)=m(x,t)\,.
\end{gathered}
\tag{4.3$_1$}
$$

Wykorzystując ortonormalność funkcji $\bar{\eta}_n(x)$, $\bar{\xi}_n(x)$, $\bar{\varphi}_n(x)$, warunki początkowe $(4.1)_2$ w przypadku rozwinięcia funkcji $\eta(x,t)$, $\xi(x,t)$, $\varphi(x,t)$ w uogólniony szereg Fouriera (4.2), przyjmą postać:

$$
\begin{aligned}
T^1_n(0)&=\int_a^b\eta^0(x)\cdot\eta_n(x)\,dx\;, & \dot{T}^1_n(0)&=\int_a^b\eta^{v_0}(x)\cdot\eta_n(x)\,dx\;,\\
T^2_n(0)&=\int_a^b\xi^0(x)\cdot\xi_n(x)\,dx\;, & \dot{T}^2_n(0)&=\int_a^b\xi^{v_0}(x)\cdot\xi_n(x)\,dx\;,\\
T^3_n(0)&=\int_a^b\varphi^0(x)\cdot\varphi_n(x)\,dx\;, & \dot{T}^3_n(0)&=\int_a^b\varphi^{v_0}(x)\cdot\varphi_n(x)\,dx\;.
\end{aligned}
\tag{4.3$_2$}
$$

Po uporządkowaniu ze względu na funkcje $T^1_n(t)$, $T^2_n(t)$, $T^3_n(t)$ oraz ich drugie pochodne otrzymamy

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^1_n(t)\cdot\Big[\frac{\gamma A}{g}\cdot\bar{\eta}_n(x)-\frac{\gamma J_z}{g}\cdot\bar{\eta}''_n(x)\Big]+\sum_{n=1}^{\infty}T^1_n(t)\cdot\big[EJ_z\cdot\bar{\eta}^{IV}_n(x)+P\cdot\bar{\eta}''_n(x)\big]+\\
+\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^3_n(t)\cdot\frac{\gamma A z_\alpha}{g}\cdot\bar{\varphi}_n(x)+\sum_{n=1}^{\infty}T^3_n(t)\cdot Pz_\alpha\cdot\bar{\varphi}''_n(x)=q_y(x,t)\;.
\end{gathered}
\tag{4.4$_1$}
$$

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^2_n(t)\cdot\Big[\frac{\gamma A}{g}\cdot\bar{\xi}_n(x)-\frac{\gamma J_y}{g}\cdot\bar{\xi}''_n(x)\Big]+\sum_{n=1}^{\infty}T^2_n(t)\cdot\big[EJ_y\cdot\bar{\xi}^{IV}_n(x)+P\cdot\bar{\xi}''_n(x)\big]+\\
-\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^3_n(t)\cdot\frac{\gamma A y_\alpha}{g}\cdot\bar{\varphi}_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}T^3_n(t)\cdot Py_\alpha\cdot\bar{\varphi}''_n(x)=q_z(x,t)\;,
\end{gathered}
\tag{4.4$_2$}
$$

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^1_n(t)\cdot\frac{\gamma A z_\alpha}{g}\cdot\bar{\eta}_n(x)+\sum_{n=1}^{\infty}T^1_n(t)\cdot Pz_\alpha\cdot\bar{\eta}''_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^2_n(t)\cdot\frac{\gamma A y_\alpha}{g}\cdot\bar{\xi}_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}T^2_n(t)\cdot Py_\alpha\cdot\bar{\xi}''_n(x)+\\
+\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}^3_n(t)\cdot\Big[\frac{\gamma A r^2}{g}\cdot\bar{\varphi}_n(x)-\frac{\gamma J_\omega}{g}\cdot\bar{\varphi}''_n(x)\Big]+\sum_{n=1}^{\infty}T^3_n(t)\cdot\big\{EJ_\omega\cdot\bar{\varphi}^{IV}_n(x)+[Pr^2-GJ_x]\cdot\bar{\varphi}''_n(x)\big\}=m(x,t)
\end{gathered}
\tag{4.4$_3$}
$$

Do rozwiązania układu równań różniczkowych (4.4) zastosujemy zasadę prac przygotowanych, która w tym przypadku jest metodą Bubnowa-Galerkina [23,40,41,75].

Jako przemieszczenie przygotowane przyjmuje się postacie funkcji własnych $\bar{\eta}_n(x)$, $\bar{\xi}_n(x)$, $\bar{\varphi}_n(x)$. W wyniku otrzymuje się równania różniczkowe zwyczajne ze względu na funkcje $T_n^1(t)$, $T_n^2(t)$, $T_n^3(t)$, które nazywamy równaniami Galerkina. Stosując zasadę prac przygotowanych do równania $(4.4)_1$, otrzymamy

$$\sum_i \int_{l_i} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n^1(t) \left[\frac{\gamma A}{g} \cdot \bar{\eta}_n(x) - \frac{\gamma J_z}{g} \cdot \bar{\eta}_n''(x) \right] \cdot \bar{\eta}_k(x)\, dx + \sum_i \int_{l_i} \sum_{n=1}^{\infty} T_n^1(t) \left[EJ_z \cdot \bar{\eta}_n^{IV}(x) - P\, \bar{\eta}_n''(x) \right] \bar{\eta}_k(x)\, dx +$$
$$+ \sum_i \int_{l_i} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n^3(t) \cdot \frac{\gamma A z_\alpha}{g} \cdot \bar{\varphi}_n(x) \cdot \bar{\eta}_k(x)\, dx + \sum_i \int_{l_i} \sum_{n=1}^{\infty} T_n^3(t) \cdot P z_\alpha \cdot \bar{\varphi}_n''(x) \cdot \bar{\eta}_k(x)\, dx = \sum_i \int_{l_i} q_y(x,t) \cdot \bar{\eta}_k(x)\, dx$$

gdzie:

$\sum_i$ – oznacza sumowanie całek obliczonych dla poszczególnych odcinków, na które podzielono pręt.

Równanie powyższe, po uwzględnieniu ortonormalności funkcji $\bar{\eta}_n(x)$, przyjmie postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n^1(t) \sum_i \left[\frac{\gamma A}{g} \delta_{nk} - \frac{\gamma J_z}{g} \int_{l_i} \bar{\eta}_n''(x) \cdot \bar{\eta}_k(x)\, dx \right] + \sum_{n=1}^{\infty} T_n^1(t) \sum_i \left[EJ_z \int_{l_i} \bar{\eta}_n^{IV}(x) \cdot \bar{\eta}_k(x)\, dx - P \int_{l_i} \bar{\eta}_n''(x) \cdot \bar{\eta}_k(x)\, dx \right] +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n^3(t) \sum_i \frac{\gamma A z_\alpha}{g} \int_{l_i} \bar{\varphi}_n(x) \cdot \bar{\eta}_k(x)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} T_n^3(t) \sum_i P z_\alpha \int_{l_i} \bar{\varphi}_n''(x) \cdot \bar{\eta}_k(x)\, dx = \sum_i \int_{l_i} q_y(x,t) \cdot \bar{\eta}_k(x)\, dx \;; \tag{4.5}$$
$$k = 1, 2, 3, \ldots, \infty .$$

Wprowadzimy w (4.5) następujące oznaczania

$$J_n^{1k} = \sum_i \left[\frac{\gamma A}{g} \delta_{nk} - \frac{\gamma J_z}{g} \int_{l_i} \bar{\eta}_n''(x) \cdot \bar{\eta}_k(x)\, dx \right] , \quad J_n^{2k} = \sum_i \left[EJ_z \int_{l_i} \bar{\eta}_n^{IV}(x) \cdot \bar{\eta}_k(x)\, dx - P \int_{l_i} \bar{\eta}_n''(x) \cdot \bar{\eta}_k(x)\, dx \right] ,$$
$$J_n^{3k} = \sum_i \frac{\gamma A z_\alpha}{g} \int_{l_i} \bar{\varphi}_n(x) \cdot \bar{\eta}_k(x)\, dx , \quad J_n^{4k} = \sum_i P z_\alpha \int_{l_i} \bar{\varphi}_n''(x) \cdot \bar{\eta}_k(x)\, dx \tag{4.6}$$

Wówczas równanie (4.5) przyjmie postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n^1(t) \cdot J_n^{1k} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n^1(t) \cdot J_n^{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n^3(t) \cdot J_n^{3k} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n^3(t) \cdot J_n^{4k} = T_k^4(t) \;;$$
$$k = 1, 2, 3, \ldots, \infty , \tag{4.7}$$

gdzie:

$$T_k^4(t) = \sum_i \int_{l_i} q_y(x,t) \cdot \bar{\eta}_k(x)\, dx .$$

Równanie $(4.4)_2$, po zastosowaniu zasady prac przygotowanych, przyjmie postać

$$\sum_i \int_{l_i} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n^2(t) \left[\frac{\gamma A}{g} \cdot \bar{\xi}_n(x) - \frac{\gamma J_z}{g} \cdot \bar{\xi}_n''(x) \right] \cdot \bar{\xi}_k(x)\, dx + \sum_i \int_{l_i} \sum_{n=1}^{\infty} T_n^2(t) \left[EJ_y \cdot \bar{\xi}_n^{IV}(x) + P\, \bar{\xi}_n''(x) \right] \cdot \bar{\xi}_k(x)\, dx +$$
$$+ \sum_i \int_{l_i} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n^3(t) \cdot \frac{\gamma A y_\alpha}{g} \cdot \bar{\varphi}_n(x)\, \bar{\xi}_k(x)\, dx - \sum_i \int_{l_i} \sum_{n=1}^{\infty} T_n^3(t) \cdot P y_\alpha \cdot \bar{\varphi}_n''(x) \cdot \bar{\xi}_k(x)\, dx = \sum_i \int_{l_i} q_z(x,t) \cdot \bar{\xi}_k(x)\, dx$$

lub po uwzględnieniu ortonormalności funkcji $\bar{\xi}_n(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n^2(t) \sum_i \left[\frac{\gamma A}{g} \delta_{nk} - \frac{\gamma J_y}{g} \int_{l_i} \bar{\xi}_n''(x) \cdot \bar{\xi}_k(x)\, dx \right] + \sum_{n=1}^{\infty} T_n^2(t) \sum_i \left[EJ_y \int_{l_i} \bar{\xi}_n^{IV}(x) \cdot \bar{\xi}_k(x)\, dx + P \int_{l_i} \bar{\xi}_n''(x) \cdot \bar{\xi}_k(x)\, dx \right] +$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n^3(t) \sum_i \frac{\gamma A y_\alpha}{g} \int_{l_i} \bar{\varphi}_n(x) \cdot \bar{\xi}_k(x)\, dx - \sum_{n=1}^{\infty} T_n^3(t) \sum_i P y_\alpha \int_{l_i} \bar{\varphi}_n''(x) \cdot \bar{\xi}_k(x)\, dx = \sum_i \int_{l_i} q_z(x,t) \cdot \bar{\xi}_k(x)\, dx \;, \tag{4.8}$$
$$k = 1, 2, 3, \ldots, \infty .$$

wprowadzimy do równań (4.8) oznaczenia

$$J_n^{3k}=\sum_i\left[\frac{\delta A_i}{g}\delta_{nk}-\frac{\delta J_y}{g}\int_{l_i}\bar{\xi}_n''(x)\cdot\bar{\xi}_k(x)dx\right]\quad,\quad J_n^{4k}=\sum_i\left[EJ_y\int_{l_i}\bar{\xi}_n''''(x)\cdot\bar{\xi}_k(x)dx+P\int_{l_i}\bar{\xi}_n''(x)\,\bar{\xi}_k(x)dx\right],$$

$$J_n^{5k}=-\sum_i\frac{\delta A y_\alpha}{g}\int_{l_i}\bar{\varphi}_n(x)\cdot\bar{\xi}_k(x)\,dx\quad,\qquad J_n^{6k}=-\sum_i P y_\alpha\int_{l_i}\bar{\varphi}_n''(x)\cdot\bar{\xi}_k(x)dx\,,\tag{4.9}$$

$$T_k^{5}(t)=\sum_i\int_{l_i}q_z(x,t)\cdot\bar{\xi}_k(x)dx.$$

Wówczas równanie (4.8) przyjmie postać

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^2(t)\cdot J_n^{3k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^2(t)\cdot J_n^{4k}+\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^3(t)\cdot J_n^{5k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^3(t)\cdot J_n^{6k}=T_k^5(t)\;;\tag{4.10}$$

$$k=1,2,3,\ldots,\infty$$

Zastosowanie zasady prac przygotowanych do równania $(4.4)_3$ prowadzi do zależności

$$\sum_i\int_{l_i}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^1(t)\cdot\frac{\delta A z_\alpha}{g}\cdot\bar{\eta}_n(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx+\sum_i\int_{l_i}\sum_{n=1}^{\infty}T_n^1(t)\cdot P z_\alpha\cdot\bar{\eta}_n''(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx-\sum_i\int_{l_i}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^2(t)\cdot\frac{\delta A y_\alpha}{g}\cdot\bar{\xi}_n(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx+$$

$$-\sum_i\int_{l_i}\sum_{n=1}^{\infty}T_n^2(t)\cdot P y_\alpha\,\bar{\xi}_n''(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx+\sum_i\int_{l_i}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^3(t)\left[\frac{\delta A r^2}{g}\cdot\bar{\varphi}_n(x)-\frac{\delta J_\omega}{g}\cdot\bar{\varphi}_n''(x)\right]\cdot\bar{\varphi}_k(x)\,dx+$$

$$+\sum_i\int_{l_i}\sum_{n=1}^{\infty}T_n^3(t)\left\{EJ_\omega\cdot\bar{\varphi}_n''''(x)+[Pr^2-GJ_x]\cdot\bar{\varphi}_n''(x)\right\}\bar{\varphi}_k(x)\,dx=\sum_i\int_{l_i}m(x,t)\cdot\bar{\varphi}_k(x)\,dx\;.$$

lub po uwzględnieniu ortonormalności funkcji

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^1(t)\sum_i\frac{\delta A z_\alpha}{g}\int_{l_i}\bar{\eta}_n(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^1(t)\sum_i P z_\alpha\int_{l_i}\bar{\eta}_n''(x)\bar{\varphi}_k(x)dx-\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^2(t)\sum_i\frac{\delta A y_\alpha}{g}\int_{l_i}\bar{\xi}_n(x)\bar{\varphi}_k(x)dx+$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}T_n^2(t)\sum_i P y_\alpha\int_{l_i}\bar{\xi}_n''(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^3(t)\sum_i\left[\frac{\delta A r^2}{g}\delta_{nk}-\frac{\delta J_\omega}{g}\int_{l_i}\bar{\varphi}_n''(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx\right]+\tag{4.11}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^3(t)\sum_i\left\{EJ_\omega\int_{l_i}\bar{\varphi}_n''''(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx+[Pr^2-GJ_x]\int_{l_i}\bar{\varphi}_n''(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx\right\}=\sum_i\int_{l_i}m(x,t)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx\,;$$

Jeżeli do równań (4.11) wprowadzimy następujące oznaczenia

$$J_n^{7k}=\sum_i\frac{\delta A z_\alpha}{g}\int_{l_i}\bar{\eta}_n(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx\quad,\qquad J_n^{8k}=\sum_i P z_\alpha\int_{l_i}\bar{\eta}_n''(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx\,,$$

$$J_n^{9k}=\sum_i\frac{\delta A y_\alpha}{g}\int_{l_i}\bar{\xi}_n(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx\quad,\qquad J_n^{10k}=\sum_i P y_\alpha\int_{l_i}\bar{\xi}_n''(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx\,,$$

$$J_n^{11k}=\sum_i\left[\frac{\delta A r^2}{g}\delta_{nk}-\frac{\delta J_\omega}{g}\int_{l_i}\bar{\varphi}_n''(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx\right],\tag{4.12}$$

$$J_n^{12k}=\sum_i\left\{EJ_\omega\int_{l_i}\bar{\varphi}_n''''(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx+[Pr^2-GJ_x]\int_{l_i}\bar{\varphi}_n''(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx\right\},$$

$$T_k^6(t)=\sum_i\int_{l_i}m(x,t)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx\;,$$

wówczas otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^1(t)\cdot J_n^{7k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^1(t)\cdot J_n^{8k}+\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^2(t)\cdot J_n^{9k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^2(t)\cdot J_n^{10k}+\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^3(t)\cdot J_n^{11k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^3(t)\cdot J_n^{12k}=T_k^6(t)\;,\tag{4.13}$$

gdzie:

$$k=1,2,\ldots,\infty\;,$$

Ostatecznie otrzymamy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu ze względu na $T_n^1(t)=T_n^1$, $T_n^2(t)=T_n^2$, $T_n^3(t)=T_n^3$. Równania te mają postać:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^1\cdot J_n^{1k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^1\cdot J_n^{2k} &&+\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^3\cdot J_n^{3k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^3\cdot J_n^{4k}=T_k^4,\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^2\cdot J_n^{5k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^2\cdot J_n^{6k} &&+\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^3\cdot J_n^{7k}+\sum T_n^3\cdot J_n^{8k}=T_k^5,\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^1\cdot J_n^{9k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^1\cdot J_n^{10k}+\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^2\cdot J_n^{11k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^2\cdot J_n^{12k} &&+\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n^3\cdot J_n^{13k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^3\cdot J_n^{14k}=T_k^6,\\
& &&k=1,2,3,\dots,\infty.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Równania (4.14), zapisane w postaci macierzowej, przedstawiają się następująco:

$$
J_1\cdot\ddot{T}+J_2\cdot T=T_w \tag{4.15}
$$

gdzie:

$$
J_1=\begin{vmatrix}
J_1^{11} & J_2^{11} & \dots & J_n^{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & J_1^{31} & J_2^{31} & \dots & J_n^{31}\\
J_1^{12} & J_2^{12} & \dots & J_n^{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & J_1^{32} & J_2^{32} & \dots & J_n^{32}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
J_1^{1n} & J_2^{1n} & \dots & J_n^{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 & J_1^{3n} & J_2^{3n} & \dots & J_n^{3n}\\
0 & 0 & \dots & 0 & J_1^{51} & J_2^{51} & \dots & J_n & J_1^{71} & J_2^{71} & \dots & J_n^{71}\\
0 & 0 & \dots & 0 & J_1^{52} & J_2^{52} & \dots & J_n & J_1^{72} & J_2^{72} & \dots & J_n^{72}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & \dots & 0 & J_1^{5n} & J_2^{5n} & \dots & J_n^{5n} & J_1^{7n} & J_2^{7n} & \dots & J_n^{7n}\\
J_1^{91} & J_2^{91} & \dots & J_n^{91} & J_1^{111} & J_2^{111} & \dots & J_n^{111} & J_1^{131} & J_2^{131} & \dots & J_n^{131}\\
J_1^{92} & J_2^{92} & \dots & J_n^{92} & J_1^{112} & J_2^{112} & \dots & J_n^{112} & J_1^{132} & J_2^{132} & \dots & J_n^{132}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
J_1^{9n} & J_2^{9n} & \dots & J_n^{9n} & J_1^{11n} & J_2^{11n} & \dots & J_n^{11n} & J_1^{13n} & J_2^{13n} & \dots & J_n^{13n}
\end{vmatrix}
$$

$$
J_2=\begin{vmatrix}
J_1^{21} & J_2^{21} & \dots & J_n^{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & J_1^{41} & J_2^{41} & \dots & J_n^{41}\\
J_1^{22} & J_2^{22} & \dots & J_n^{22} & 0 & 0 & \dots & 0 & J_1^{42} & J_2^{42} & \dots & J_n^{42}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
J_1^{2n} & J_2^{2n} & \dots & J_n^{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 & J_1^{4n} & J_2^{4n} & \dots & J_n^{4n}\\
0 & 0 & \dots & 0 & J_1^{61} & J_2^{61} & \dots & J_n^{61} & J_1^{81} & J_2^{81} & \dots & J_n^{81}\\
0 & 0 & \dots & 0 & J_1^{62} & J_2^{62} & \dots & J_n^{62} & J_1^{82} & J_2^{82} & \dots & J_n^{82}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & \dots & 0 & J_1^{6n} & J_2^{6n} & \dots & J_n^{6n} & J_1^{8n} & J_2^{8n} & \dots & J_n^{8n}\\
J_1^{101} & J_2^{101} & \dots & J_n^{101} & J_1^{121} & J_2^{121} & \dots & J_n^{121} & J_1^{141} & J_2^{141} & \dots & J_n^{141}\\
J_1^{102} & J_2^{102} & \dots & J_n^{102} & J_1^{122} & J_2^{122} & \dots & J_n^{122} & J_1^{142} & J_2^{142} & \dots & J_n^{142}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
J_1^{10n} & J_2^{10n} & \dots & J_n^{10n} & J_1^{12n} & J_2^{12n} & \dots & J_n^{12n} & J_1^{14n} & J_2^{14n} & \dots & J_n^{14n}
\end{vmatrix}
$$

$$T = colon[T_1^1, T_2^1, \ldots T_n^1, T_1^2, T_2^2, \ldots T_n^2, T_1^3, T_2^3, \ldots T_n^3],$$

$$\ddot{T} = colon[\ddot{T}_1^1, \ddot{T}_2^1, \ldots \ddot{T}_n^1, \ddot{T}_1^2, \ddot{T}_2^2, \ldots \ddot{T}_n^2, \ddot{T}_1^3, \ddot{T}_2^3, \ldots \ddot{T}_n^3],$$

$$T_w = colon[T_1^4, T_2^4, \ldots T_n^4, T_1^5, T_2^5, \ldots T_n^5, T_1^6, T_2^6, \ldots T_n^6].$$

Występujące w wyrażeniach (4.6), (4.9) i (4.12) całki w przedziale [a,b] określa się ze wzorów

$$\int_a^b \bar{\eta}_n''(x)\cdot\bar{\eta}_n(x)\,dx = \sum_{j=0}^{4r+2} \frac{k_{jn}^{\eta''}}{j-1}\cdot x^{j-1}\Big|_a^b ,$$

$$\text{gdzie:}\quad k_{jn}^{\eta''} = \sum_{i=0}^{j} i(i-1)\cdot k_{in}^{\eta}\cdot k_{j-n,k}^{\eta} .$$

$$\int_a^b \bar{\eta}_n''''(x)\cdot\bar{\eta}_n(x)\,dx = \sum_{j=0}^{4r+2} \frac{k_{jn}^{\eta''''}}{j-3}\cdot x^{j-3}\Big|_a^b ,$$

$$\text{gdzie:}\quad k_{jn}^{\eta''''} = \sum_{i=0}^{j} i(i-1)(i-2)(i-3)\cdot k_{in}^{\eta}\cdot k_{j-i,k}^{\eta} .$$

$$\int_a^b \bar{\xi}_n''(x)\cdot\bar{\xi}_n(x)\,dx = \sum_{j=0}^{4r+2} \frac{k_{jn}^{\xi''}}{j-1}\cdot x^{j-1}\Big|_a^b ,$$

$$\text{gdzie:}\quad k_{jn}^{\xi''} = \sum_{i=0}^{j} i(i-1)\,k_{in}^{\xi}\cdot k_{j-i,k}^{\xi} .$$

$$\int_a^b \bar{\xi}_n''''(x)\cdot\bar{\xi}_n(x)\,dx = \sum_{j=0}^{4r+2} \frac{k_{jn}^{\xi''''}}{j-3}\cdot x^{j-3}\Big|_a^b ,$$

$$\text{gdzie:}\quad k_{jn}^{\xi''''} = \sum_{i=0}^{j} i(i-1)(i-2)(i-3)\,k_{in}^{\xi}\cdot k_{j-i,k}^{\xi} .$$

$$\int_a^b \bar{\varphi}_n''(x)\cdot\bar{\varphi}_n(x)\,dx = \sum_{j=0}^{4r+2} \frac{k_{jn}^{\varphi''}}{j-1}\cdot x^{j-1}\Big|_a^b ,$$

$$\text{gdzie:}\quad k_{jn}^{\varphi''} = \sum_{i=0}^{j} i(i-1)\cdot k_{in}^{\varphi}\cdot k_{j-i,k}^{\varphi} .$$

$$\int_a^b \bar{\varphi}_n''''(x)\cdot\bar{\varphi}_n(x)\,dx = \sum_{j=0}^{4r+2} \frac{k_{jn}^{\varphi''''}}{j-3}\cdot x^{j-3}\Big|_a^b ,$$

$$\text{gdzie:}\quad k_{jn}^{\varphi''''} = \sum_{i=0}^{j} i(i-1)(i-2)(i-3)\,k_{in}^{\varphi}\cdot k_{j-i,k}^{\varphi} .$$

$$\int_a^b \varphi_n(x)\cdot\eta_k(x)\,dx = \sum_{j=0}^{4r+2} \frac{k_{jn}^{\varphi\eta}}{j+1}\cdot x^{j+1}\Big|_a^b ,$$

$$\text{gdzie:}\quad k_{jn}^{\varphi\eta} = \sum_{i=0}^{j} k_{ik}^{\eta}\cdot k_{j-i,k}^{\varphi} .$$

$$\int_a^b \bar{\varphi}_n''(x)\cdot\bar{\eta}_k(x)\,dx = \sum_{j=0}^{4r+2} \frac{k_{jn}^{\varphi''\eta}}{j-1}\cdot x^{j-1}\Big|_a^b ,$$

$$\text{gdzie:}\quad k_{jn}^{\varphi''\eta} = \sum_{i=0}^{j} i(i-1)\cdot k_{in}^{\varphi}\cdot k_{j-i,k}^{\eta} .$$

$$\int_a^b \bar{\varphi}_n(x)\cdot\bar{\xi}_k(x)dx = \sum_{j=0}^{4r+1} \frac{k_{jn}^{\varphi\xi}}{j+1}\cdot x^{j+1}\Big|_a^b ,$$

$$\text{gdzie:} \qquad k_{jn}^{\varphi\xi} = \sum_{i=0}^{j} k_{in}^{\varphi}\cdot k_{j-i,k}^{\xi} .$$

$$\int_a^b \bar{\varphi}_n''(x)\cdot\bar{\xi}_k(x)dx = \sum_{j=0}^{4r+1} \frac{k_{jn}^{\varphi''\xi}}{j-1}\cdot x^{j-1}\Big|_a^b ,$$

$$\text{gdzie:} \qquad k_{jn}^{\varphi\xi} = \sum_{i=0}^{j} i(i-1)\cdot k_{in}^{\varphi}\cdot k_{j-i,k}^{\xi} .$$

W przypadku gdy P = 0, mamy

$$J_n^{\eta k} = \sum_i EJ_z \int_{l_i} \bar{\eta}_n^{IV}(x)\cdot\bar{\eta}_k(x)\,dx , \qquad J_n^{\eta k} = 0 ,$$

$$J_n^{\xi k} = \sum_i EJ_y \int_{l_i} \bar{\xi}_n^{IV}(x)\cdot\bar{\xi}_k(x)\,dx , \qquad J_n^{\xi k} = 0 ,$$

$$J_n^{\varphi k} = 0 , \qquad J_n^{\varphi k} = 0 ,$$

$$J_n^{\varphi\varphi k} = \sum_i \left[EJ_\omega \int_{l_i} \bar{\varphi}_n^{IV}(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)dx - GJ_x \int_{l_i} \bar{\varphi}_n''(x)\cdot\bar{\varphi}_k(x)\,dx \right] .$$

Równania Galerkina przyjmą nieco inną postać, jeżeli funkcje przemieszczeń (wektor stanu przemieszczenia) rozwiniemy w uogólniony szereg Fouriera wg ortonormalnych wektorów stanu $Z_n(x)$[1].

W tym celu układ równań różniczkowych (4.1) zapiszemy w następującej postaci macierzowej

$$A\cdot\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^4} + B\cdot\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^2\partial t^2} + C\cdot\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + D\cdot\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t), \qquad (4.15)_1$$

gdzie:

U(x,t) - wektor stanu przemieszczenia,

q(x,t) - wektor stanu obciążenia,

$U(x,t)$ = colon $[\eta(x,t), \xi(x,t), \varphi(x,t)]$,

$$A = \begin{bmatrix} EJ_z & 0 & 0 \\ 0 & EJ_y & 0 \\ 0 & 0 & EJ_\omega \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -\frac{\delta J_z}{g} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\delta J_y}{g} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\delta J_\omega}{g} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} P & 0 & Pz_\alpha \\ 0 & P & -Py_\alpha \\ Pz_\alpha & -Py_\alpha & -GJ_x+Pr^2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{\delta A}{g} & 0 & \frac{\delta A z_\alpha}{g} \\ 0 & \frac{\delta A}{g} & -\frac{\delta A y_\alpha}{g} \\ \frac{\delta A z_\alpha}{g} & -\frac{\delta A y_\alpha}{g} & \frac{\delta A r^2}{g} \end{bmatrix},$$

$q(x,t)$ = colon $[q_y(x,t), q_z(x,t), m(x,t)]$.

---

[1] **Rozwiązanie powyższe oparto na koncepcji zaproponowanej przez Prof. J.Więckowskiego.**

Rozwinięcie wektora stanu przemieszczenia i wektora stanu obciążenia w uogólniony szereg Fouriera zapiszemy w postaci:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T(t)\, Z_n(x) \quad , \qquad (4.15)_2$$
$$q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T(t)\, Z_n(x) \quad ,$$

gdzie:

$T_n(t)$ - współczynniki rozkładu wektora stanu przemieszczenia w uogólniony szereg Fouriera,

$\bar{T}_n(t)$ - współczynniki rozkładu wektora stanu obciążenia w uogólniony szereg Fouriera określone zależnością

$$\bar{T}_n(t) = \int_a^b q(x,t) \odot Z_n(x)\, dx \quad , \qquad (4.15)_3$$

czyli

$$\bar{T}_n(t) = \int_a^b [q_y(x,t)\cdot \bar{\bar{\eta}}_n(x) + q_z(x,t)\cdot \bar{\bar{\xi}}_n(x) + m(x,t)\cdot \bar{\bar{\varphi}}_n(x)]\, dx \quad ,$$

Podstawiając zależności $(4.15)_2$ do równania $(4.15)_1$, otrzymamy

$$A\cdot\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cdot Z_n'''(x) + B\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n(t)\cdot Z_n''(x) + C\cdot\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cdot Z_n''(x) +$$
$$+ D\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n(t)\cdot Z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n(t)\cdot Z_n(x). \qquad (4.15)_4$$

Wykorzystując ortonormalność wektora stanu $Z_n(x)$ warunki początkowe $(4.1)_1$, w tym przypadku przyjmą postać

$$T_n(0) = \int_a^b U^0(x) \odot Z_n(x)\, dx \quad , \qquad (4.15)_5$$
$$\dot{T}_n(0) = \int_a^b U^{*}(x) \odot Z_n(x)\, dx \quad ,$$

gdzie:

$$U^0(x) = \text{colon}\,[\eta^0(x),\ \xi^0(x),\ \varphi^0(x)] \quad ,$$
$$U^{*}(x) = \text{colon}\,[\eta^{*}(x),\ \xi^{*}(x),\ \varphi^{*}(x)] \quad .$$

Po uporządkowaniu ze względu na funkcje $T_n(t)$ równanie $(4.15)_4$ przedstawia się następująco

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n(t)\ [B\cdot Z_n''(x) + D\cdot Z_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)[A\cdot Z_n'''(x) + C\cdot Z_n''(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n(t)\cdot Z_n(x) \qquad (4.15)_6$$

Ortogonalizując równanie $(4.15)_6$ względem ortonormalnego wektora stanu $Z_k(x)$, otrzymamy równanie Galerkina

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n(t)\int_a^b [B\cdot Z_n''(x) + D\cdot Z_n(x)] \odot Z_k(x)\, dx \ +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\int_a^b T_n(t)[A\cdot Z_n'''(x) + C\cdot Z_n''(x)] \odot Z_k(x)\, dx = \bar{T}_k(t) \qquad (4.15)_7$$

W przypadku pręta o zmiennym przekroju należy przeprowadzić sumowanie całek dla poszczególnych odcinków.

Występujące w równaniu $(4.15)_7$ wyrażenia całkowe określa się za pomocą wzorów podobnych do wyrażeń podanych na s. 35 i 36.

Ze względu na ograniczoną objętość pracy wzory te pominięto. Do rozwiązania układu równań (4.15) lub$(4.15)_7$ wykorzystano istniejące programy na maszynę cyfrową serii ODRA 1300 wg metody RUNGEGO-KUTTY.

Znając wartości funkcji T_n^1, T_n^2, T_n^3 lub T_n, na podstawie zależności (4.2) lub $(4.15)_2$ wyznacza się wartości funkcji przemieszczeń $\eta(x,t)$, $\xi(x,t)$, $\varphi(x,t)$.

4.2. Drgania wymuszone obciążeniem harmonicznie zmiennym w czasie

4.2.1. Pręt o stałym przekroju

Rozważmy przypadek drgań pręta o stałym przekroju, wymuszonych działaniem sił zewnętrznych, zmieniających się w czasie w sposób harmoniczny o postaci

$$\begin{aligned} q_y(x,t) &= q_y(x)\cdot e^{i\omega t}, \\ q_z(x,t) &= q_z(x)\cdot e^{i\omega t}, \\ m(x,t) &= m(x)\cdot e^{i\omega t}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Wówczas równania różniczkowe drgań wymuszonych $(4.1)_1$ przedstawiają się następująco

$$\begin{aligned} &EJ_z\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} - \frac{\gamma J_z}{g}\cdot\frac{\partial^4\eta}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{\gamma A}{g}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + P\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\gamma A z_\alpha}{g}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + Pz_\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = q_y(x)\cdot e^{i\omega t}, \\ &EJ_y\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} - \frac{\gamma J_y}{g}\cdot\frac{\partial^4\xi}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{\gamma A}{g}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + P\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - \frac{\gamma A y_\alpha}{g}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - Py_\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = q_z(x)\cdot e^{i\omega t}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\frac{\gamma A z_\alpha}{g}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+Pz_\alpha\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}-\frac{\gamma A y_\alpha}{g}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-Py_\alpha\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+EJ_\omega\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}-\frac{\gamma J_\omega}{g}\cdot\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial t^2}+$$

$$+\frac{\gamma A r^2}{g}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-GJ_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+Pr^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=m(x)\cdot e^{i\omega t}$$

Przyjmując, że drgania o częstości drgań swobodnych ulegają w czasie wytłumieniu, wyrażenia na funkcje przemieszczeń możemy zapisać w postaci [17,75]:

$$\begin{aligned}\eta(x,t)&=\eta(x)\cdot e^{i\omega t},\\ \xi(x,t)&=\xi(x)\cdot e^{i\omega t},\\ \varphi(x,t)&=\varphi(x)\cdot e^{i\omega t}.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Podstawiając wyrażenia (4.18), na funkcje przemieszczeń do równań różniczkowych (4.17) otrzymamy

$$\begin{aligned}&EJ_z\cdot\eta^{IV}(x)+\frac{\gamma J_z\omega^2}{g}\cdot\eta''(x)-\frac{\gamma A\omega^2}{g}\cdot\eta(x)+P\cdot\eta''(x)-\frac{\gamma A z_\alpha\omega^2}{g}\cdot\varphi(x)+Pz_\alpha\cdot\varphi''(x)=q_y(x),\\ &EJ_y\cdot\xi^{IV}(x)+\frac{\gamma J_y\omega^2}{g}\cdot\xi''(x)-\frac{\gamma A\omega^2}{g}\cdot\xi(x)+P\cdot\xi''(x)+\frac{\gamma A y_\alpha\omega^2}{g}\cdot\varphi(x)-Py_\alpha\cdot\varphi''(x)=q_z(x),\\ &-\frac{\gamma A z_\alpha\omega^2}{g}\eta(x)+Pz_\alpha\cdot\eta''(x)+\frac{\gamma A y_\alpha\omega^2}{g}\xi(x)-Py_\alpha\cdot\xi''(x)+EJ_\omega\cdot\varphi^{IV}(x)+\frac{\gamma J_\omega\omega^2}{g}\cdot\varphi''(x)+\\ &-\frac{\gamma A r^2\omega^2}{g}\cdot\varphi(x)-GJ_x\cdot\varphi''(x)+Pr^2\cdot\varphi''(x)=m(x),\end{aligned}\tag{4.19}$$

lub po uporządkowaniu

$$\begin{aligned}&EJ_z\cdot\eta^{IV}(x)+\left(\frac{\gamma J_z}{g}\cdot\omega^2+P\right)\cdot\eta''(x)-\frac{\gamma A\omega^2}{g}\cdot\eta(x)-\frac{\gamma A z_\alpha\omega^2}{g}\cdot\varphi(x)+Pz_\alpha\cdot\varphi''(x)=q_y(x),\\ &EJ_y\cdot\xi^{IV}(x)+\left(\frac{\gamma J_y}{g}\cdot\omega^2+P\right)\cdot\xi''(x)-\frac{\gamma A\omega^2}{g}\cdot\xi(x)+\frac{\gamma A y_\alpha\omega^2}{g}\cdot\varphi(x)-Py_\alpha\cdot\varphi''(x)=q_z(x),\\ &EJ_\omega\varphi^{IV}(x)+\left(Pr^2+\frac{\gamma J_\omega}{g}\cdot\omega^2-GJ_x\right)\cdot\varphi''(x)-\frac{\gamma A r^2}{g}\cdot\omega\cdot\varphi(x)-\frac{\gamma A z_\alpha}{g}\omega^2\eta(x)+\\ &+Pz_\alpha\cdot\eta''(x)+\frac{\gamma A y_\alpha}{g}\omega^2\xi(x)-Py_\alpha\cdot\xi''(x)=m(x).\end{aligned}\tag{4.10}$$

Jak wiadomo [20] , rozwiązanie ogólne równań (4.20) jest sumą całki ogólnej równań jednorodnych i całki szczególnej równań niejednorodnych. Układ równań jednorodnych (4.20) ($q_y(x)=0$, $q_z(x)=0$, $m(x)=0$) jest identyczny z układem równań (2.3) przy podstawieniu $\omega_n=\omega$, którego rozwiązanie przedstawiono w punkcie 2.2.

Tak więc całka ogólna układu równań jednorodnych (4.20) określona jest przez związki (2.14) przy założeniu $\omega_n=\omega$.

Zajmiemy się więc całką szczególną układu równań niejednorodnych (4.20).

Wprowadzimy do równań (4.20) następujące oznaczenia

$$\begin{aligned}&a_1=EJ_z,\quad a_2=\frac{\gamma J_z}{g}\omega^2+P,\quad a_3=-\frac{\gamma A\omega^2}{g},\quad a_4=-\frac{\gamma A z_\alpha\omega^2}{g},\quad a_5=Pz_\alpha,\\ &b_1=EJ_y,\quad b_2=\frac{\gamma J_y}{g}\omega^2+P,\quad b_3=-\frac{\gamma A}{g}\omega^2,\quad b_4=\frac{\gamma A y_\alpha}{g}\omega^2,\quad b_5=-Py_\alpha,\\ &c_1=EJ_\omega,\quad c_2=Pr^2+\frac{\gamma J_\omega}{g}\omega^2-GJ_x,\quad c_3=-\frac{\gamma A r^2}{g}\omega^2,\quad c_4=-\frac{\gamma A z_\alpha}{g}\omega^2,\\ &c_5=Pz_\alpha,\quad c_6=\frac{\gamma A y_\alpha}{g}\omega^2,\quad c_7=-Py_\alpha.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Wówczas równania (4.20) przyjmą postać

$$
\begin{aligned}
&a_1\cdot \eta^{IV}(x) + a_2\cdot \eta''(x) + a_3\cdot \eta(x) + a_4\cdot \varphi(x) + a_5\cdot \varphi''(x) = q_y(x),\\
&b_1\cdot \xi^{IV}(x) + b_2\cdot \xi''(x) + b_3\cdot \xi(x) + b_4\cdot \varphi(x) + b_5\cdot \varphi''(x) = q_z(x),\\
&c_1\cdot \varphi^{IV}(x) + c_2\cdot \varphi''(x) + c_3\cdot \varphi(x) + c_4\cdot \eta(x) + c_5\cdot \eta''(x) + c_6\cdot \xi(x) + c_7\cdot \xi''(x) = m(x).
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Do rozwiązania układu równań (4.22) zastosujemy, tak jak poprzednio, rozwinięcie funkcji $\eta(x)$, $\xi(x)$, $\varphi(x)$ w szeregi potęgowe. W tym celu funkcje obciążenia $q_y(x)$, $q_z(x)$, $m(x)$ będziemy aproksymować wielomianami o postaci

$$
\begin{aligned}
q_y(x) &= \sum_{j=0}^{k} q_{jy}\cdot x^j,\\
q_z(x) &= \sum_{j=0}^{k} q_{jz}\cdot x^j,\\
m(x) &= \sum_{j=0}^{k} m_j\cdot x^j.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Aproksymowanie funkcji (4.23) można przeprowadzić za pomocą metody najmniejszych kwadratów [47], wielomianem interpolacyjnym Newtona lub Lagrange'a [25,71] albo np. za pomocą aproksymacji jednorodnie optymalnej [124].

Natomiast całek szczególnych układu równań niejednorodnych (4.22) poszukiwać będziemy w postaci

$$
\begin{aligned}
\eta(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j\cdot x^j,\\
\xi(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j\cdot x^j,\\
\varphi(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j\cdot x^j,
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Podstawiając (4.24) do (4.22), otrzymamy

$$
\begin{aligned}
&a_1\sum_j j(j-1)(j-2)(j-3)\cdot\eta_j\cdot x^{j-4} + a_2\sum_j j(j-1)\cdot\eta_j\cdot x^{j-2} + a_3\sum_j \eta_j\cdot x^j +\\
&\quad + a_4\sum_j \varphi_j\cdot x^j + a_5\sum_j j(j-1)\cdot\varphi_j\cdot x^{j-2} = \sum_{j=0}^{k} q_{jy}\cdot x^j,\\
&b_1\sum_j j(j-1)(j-2)(j-3)\cdot\xi_j\cdot x^{j-4} + b_2\sum_j j(j-1)\cdot\xi_j\cdot x^{j-2} + b_3\sum_j \xi_j\cdot x^j +\\
&\quad + b_4\sum_j \varphi_j\cdot x^j + b_5\sum_j j(j-1)\cdot\varphi_j\cdot x^{j-2} = \sum_{j=0}^{k} q_{jz}\cdot x^j,\\
&c_1\sum_j j(j-1)(j-2)(j-3)\cdot\varphi_j\cdot x^{j-4} + c_2\sum_j j(j-1)\cdot\varphi_j\cdot x^{j-2} + c_3\sum_j \varphi_j\cdot x^j + c_4\sum_j \eta_j\cdot x^j +\\
&\quad + c_5\sum_j j(j-1)\cdot\eta_j\cdot x^{j-2} + c_6\sum_j \xi_j\cdot x^j + c_7\sum_j j(j-1)\cdot\xi_j\cdot x^{j-2} = \sum_{j=0}^{k} m_j\cdot x^j.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Przekształcając równanie (4.25) i przyrównując stałe przy jednakowych potęgach zmiennej x do zera, otrzymamy związki

$$
\begin{aligned}
&a_1\frac{j!}{(j-4)!}\cdot\eta_j + a_2\frac{j!}{(j-2)!}\eta_{j-2} + a_3\cdot\eta_{j-4} + a_4\cdot\varphi_{j-4} + a_5\frac{j!}{(j-2)!}\cdot\varphi_{j-2} = q_{j-4,y},\\
&b_1\frac{j!}{(j-4)!}\cdot\xi_j + b_2\frac{j!}{(j-2)!}\xi_{j-2} + b_3\cdot\xi_{j-4} + b_4\cdot\varphi_{j-4} + b_5\frac{j!}{(j-2)!}\cdot\varphi_{j-2} = q_{j-4,z},
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

$$c_1 \frac{j!}{(j-4)!} \cdot \varphi_j + c_2 \frac{j!}{(j-2)!} \cdot \varphi_{j-2} + c_3 \cdot \varphi_{j-4} + c_4 \cdot \eta_{j-4} + c_5 \frac{j!}{(j-2)!} \cdot \eta_{j-2} +$$

$$+ c_6 \cdot \xi_{j-4} + c_7 \frac{j!}{(j-2)!} \xi_{j-2} = m_{j-4} .$$

Na podstawie równań (4.26) możemy napisać wzory rekurencyjne na współczynniki szeregów potęgowych:

dla $j \geqslant 4$

$$\eta_j = -\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{(j-4)!}{(j-2)!} \cdot \eta_{j-2} - \frac{a_3}{a_1} \cdot \frac{(j-4)!}{j!} \cdot \eta_j - \frac{a_4}{a_1} \cdot \frac{(j-4)!}{j!} \cdot \varphi_{j-4} +$$

$$- \frac{a_5}{a_1} \cdot \frac{(j-4)!}{(j-2)!} \cdot \varphi_{j-2} + \frac{(j-4)!}{a_1 j!} \cdot q_{j-4y} \; ,$$

$$\xi_j = -\frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{(j-4)!}{(j-2)!} \cdot \xi_{j-2} - \frac{b_3}{b_1} \cdot \frac{(j-4)!}{j!} \cdot \xi_j - \frac{b_4}{b_1} \cdot \frac{(j-4)!}{j!} \cdot \varphi_{j-4} +$$

$$- \frac{b_5}{b_1} \cdot \frac{(j-4)!}{(j-2)!} \cdot \varphi_{j-2} + \frac{(j-4)!}{a_1 j!} \cdot q_{j-4z} \; , \tag{4.27}$$

$$\varphi_j = -\frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{(j-4)!}{(j-2)!} \cdot \varphi_{j-2} - \frac{c_3}{c_1} \cdot \frac{(j-4)!}{j!} \cdot \varphi_{j-4} - \frac{c_4}{c_1} \cdot \frac{(j-4)!}{j!} \cdot \eta_j - \frac{c_5}{c_1} \cdot \frac{(j-4)!}{(j-2)!} \cdot \eta_{j-2} +$$

$$- \frac{c_6}{c_1} \cdot \frac{(j-4)!}{j!} \cdot \xi_{j-4} - \frac{c_7}{c_1} \cdot \frac{(j-4)!}{(j-2)!} \cdot \xi_{j-2} + \frac{(j-4)!}{c_1 j!} \cdot m_{j-4} \; ;$$

$$j = 4, 5, 6, \ldots$$

Wprowadzimy w (4.27) następujące oznaczenia

$$a_2(j) = -\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{(j-4)!}{(j-2)!} \; , \quad a_3(j) = -\frac{a_3}{a_1} \cdot \frac{(j-4)!}{j!} \; , \quad a_4(j) = -\frac{a_4}{a_1} \cdot \frac{(j-4)!}{j!} \; ,$$

$$a_5(j) = -\frac{a_5}{a_1} \cdot \frac{(j-4)!}{(j-2)!} \; , \quad a_6(j) = \frac{(j-4)!}{a_1 j!} \; ,$$

$$b_2(j) = -\frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{(j-4)!}{(j-2)!} \; , \quad b_3(j) = -\frac{b_3}{b_1} \cdot \frac{(j-4)!}{j!} \; , \quad b_4(j) = -\frac{b_4}{b_1} \cdot \frac{(j-4)!}{j!} \tag{4.28}$$

$$b_5(j) = -\frac{b_5}{b_1} \cdot \frac{(j-4)!}{(j-2)!} \; , \quad b_6(j) = \frac{(j-4)!}{b_1 j!} \; ,$$

$$c_2(j) = -\frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{(j-4)!}{(j-2)!} \; , \quad c_3(j) = -\frac{c_3}{c_1} \cdot \frac{(j-4)!}{j!} \; , \quad c_4(j) = -\frac{c_4}{c_1} \cdot \frac{(j-4)!}{j!} \; ,$$

$$c_5(j) = -\frac{c_5}{c_1} \cdot \frac{(j-4)!}{(j-2)!} \; , \quad c_6(j) = -\frac{c_6}{c_1} \cdot \frac{(j-4)!}{j!} \; ,$$

$$c_7(j) = -\frac{c_7}{c_1} \cdot \frac{(j-4)!}{(j-2)!} \; , \quad c_8(j) = \frac{(j-4)!}{c_1 j!} \; .$$

Wówczas zależności (4.27) przyjmą postać

$$\eta_j = a_2(j) \cdot \eta_{j-2} + a_3(j) \cdot \eta_{j-4} + a_4(j) \cdot \varphi_{j-4} + a_5(j) \cdot \varphi_{j-2} + a_6(j) \cdot q_{j-4y} \; , \tag{4.29}$$

$$\xi_j = b_1(j)\cdot\xi_{j-1} + b_3(j)\cdot\xi_{j-4} + b_4(j)\cdot\varphi_{j-4} + b_5(j)\cdot\varphi_{j-2} + b_6(j)\cdot q_{j-4z}\,,$$

$$\varphi_j = c_2(j)\cdot\varphi_{j-2} + c_3(j)\cdot\varphi_{j-4} + c_4(j)\cdot\eta_{j-4} + c_5(j)\cdot\eta_{j-2} + c_6(j)\cdot\xi_{j-4} +$$
$$+ c_7(j)\cdot\xi_{j-2} + c_8(j)\cdot m_{j-4}\,.$$

Na podstawie wzorów rekurencyjnych (4.29) wyrazimy współczynniki szeregów potęgowych (4.24) poprzez wartości brzegowe funkcji $\eta(x)$, $\xi(x)$, $\varphi(x)$ dla $x = 0$ i poprzez wyrażenia (4.28). Określone w ten sposób funkcje przemieszczeń przyjmą postać

$$\begin{aligned}
\eta(x) &= \eta_0\cdot S_1 + \eta_1\cdot S_2 + \eta_2\cdot S_3 + \eta_3\cdot S_4 + \xi_0\cdot S_5 + \xi_1\cdot S_6 + \xi_2\cdot S_7 + \xi_3\cdot S_8 + \\
&+ \varphi_0\cdot S_9 + \varphi_1\cdot S_{10} + \varphi_2\cdot S_{11} + \varphi_3\cdot S_{12}\,, \\
\xi(x) &= \eta_0\cdot S_{13} + \eta_1\cdot S_{14} + \eta_2\cdot S_{15} + \eta_3\cdot S_{16} + \xi_0\cdot S_{17} + \xi_1\cdot S_{18} + \xi_2\cdot S_{19} + \xi_3\cdot S_{20} + \\
&+ \varphi_0\cdot S_{21} + \varphi_1\cdot S_{22} + \varphi_2\cdot S_{23} + \varphi_3\cdot S_{24}\,, \\
\varphi(x) &= \eta_0\cdot S_{25} + \eta_1\cdot S_{26} + \eta_2\cdot S_{27} + \eta_3\cdot S_{28} + \xi_0\cdot S_{29} + \xi_1\cdot S_{30} + \xi_2\cdot S_{31} + \xi_3\cdot S_{32} + \\
&+ \varphi_0\cdot S_{33} + \varphi_1\cdot S_{34} + \varphi_2\cdot S_{35} + \varphi_3\cdot S_{36}\,,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

gdzie:

funkcje $S_1 - S_{36}$ określa się na podstawie zależności (2.12) i (2.13) przy przyjęciu $n = 1$ i $\omega_1 = \omega$.

$$\begin{aligned}
&\eta_0 = \eta(0)\,, && \xi_0 = \xi(0)\,, && \varphi_0 = \varphi(0)\,, \\
&\eta_1 = \eta'(0)\,, && \xi_1 = \xi'(0)\,, && \varphi_1 = \varphi'(0)\,, \\
&\eta_2 = \tfrac{1}{2}\eta''(0)\,, && \xi_2 = \tfrac{1}{2}\xi''(0)\,, && \varphi_2 = \tfrac{1}{2}\varphi''(0)\,, \\
&\eta_3 = \tfrac{1}{6}\eta'''(0)\,, && \xi_3 = \tfrac{1}{6}\xi'''(0)\,, && \varphi_3 = \tfrac{1}{6}\varphi'''(0)\,.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Natomiast funkcje S_{37}, S_{38}, i S_{39}, określone na podstawie zależności (4.29), przyjmą postać:

$$\begin{aligned}
S_{37} &= \sum_j A_j^7 \cdot x^j\,, \\
S_{38} &= \sum_j B_j^7 \cdot x^j\,, \\
S_{39} &= \sum_j C_j^7 \cdot x^j\,.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Współczynniki A_j^7, B_j^7, C_j^7 (dla $j = 0, 1, 2, 3$) są równe zero. Natomiast dla $j > 3$ współczynniki te wyznacza się z następujących wzorów rekurencyjnych

$$\begin{aligned}
A_j^7 &= a_1(j)\cdot A_{j-1}^7 + a_3(j)\cdot A_{j-4}^7 + a_4(j)\cdot C_{j-4}^7 + a_5(j)\cdot C_{j-2}^7 + a_6(j)\cdot q_{j-4y}\,, \\
B_j^7 &= b_1(j)\cdot B_{j-2}^7 + b_3(j)\cdot B_{j-4}^7 + b_4(j)\cdot C_{j-4}^7 + b_5(j)\cdot C_{j-2}^7 + b_6(j)\cdot q_{j-4z}\,, \\
C_j^7 &= c_2(j)\cdot C_{j-2}^7 + c_3(j)\cdot C_{j-4}^7 + c_4(j)\cdot A_{j-4}^7 + c_5(j)\cdot A_{j-2}^7 + \\
&+ c_6(j)\cdot B_{j-4}^7 + c_7(j)\cdot B_{j-2}^7 + c_8(j)\cdot m_{j-4}\,.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Funkcje przemieszczeń $\eta(x)$, $\xi(x)$, $\varphi(x)$ oraz ich pochodne, zapisane w formie macierzowej, przedstawiają się następująco:

$$
\begin{bmatrix} \eta(x) \\ \eta'(x) \\ \eta''(x) \\ \eta'''(x) \\ \xi(x) \\ \xi'(x) \\ \xi''(x) \\ \xi'''(x) \\ \varphi(x) \\ \varphi'(x) \\ \varphi''(x) \\ \varphi'''(x) \\ 1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 & S_{10} & S_{11} & S_{12} & S_{37} \\
S_1' & S_2' & S_3' & S_4' & S_5' & S_6' & S_7' & S_8' & S_9' & S_{10}' & S_{11}' & S_{12}' & S_{37}' \\
S_1'' & S_2'' & S_3'' & S_4'' & S_5'' & S_6'' & S_7'' & S_8'' & S_9'' & S_{10}'' & S_{11}'' & S_{12}'' & S_{37}'' \\
S_1''' & S_2''' & S_3''' & S_4''' & S_5''' & S_6''' & S_7''' & S_8''' & S_9''' & S_{10}''' & S_{11}''' & S_{12}''' & S_{37}''' \\
S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} & S_{17} & S_{18} & S_{19} & S_{20} & S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{38} \\
S_{13}' & S_{14}' & S_{15}' & S_{16}' & S_{17}' & S_{18}' & S_{19}' & S_{20}' & S_{21}' & S_{22}' & S_{23}' & S_{24}' & S_{38}' \\
S_{13}'' & S_{14}'' & S_{15}'' & S_{16}'' & S_{17}'' & S_{18}'' & S_{19}'' & S_{20}'' & S_{21}'' & S_{22}'' & S_{23}'' & S_{24}'' & S_{38}'' \\
S_{13}''' & S_{14}''' & S_{15}''' & S_{16}''' & S_{17}''' & S_{18}''' & S_{19}''' & S_{20}''' & S_{21}''' & S_{22}''' & S_{23}''' & S_{24}''' & S_{38}''' \\
S_{25} & S_{26} & S_{27} & S_{28} & S_{29} & S_{30} & S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} & S_{39} \\
S_{25}' & S_{26}' & S_{27}' & S_{28}' & S_{29}' & S_{30}' & S_{31}' & S_{32}' & S_{33}' & S_{34}' & S_{35}' & S_{36}' & S_{39}' \\
S_{25}'' & S_{26}'' & S_{27}'' & S_{28}'' & S_{29}'' & S_{30}'' & S_{31}'' & S_{32}'' & S_{33}'' & S_{34}'' & S_{35}'' & S_{36}'' & S_{39}'' \\
S_{25}''' & S_{26}''' & S_{27}''' & S_{28}''' & S_{29}''' & S_{30}''' & S_{31}''' & S_{32}''' & S_{33}''' & S_{34}''' & S_{35}''' & S_{36}''' & S_{39}''' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ 1 \end{bmatrix}
\tag{4.34}
$$

Jeżeli przez Y(x) oznaczymy wektor stanu w przekroju, określony przez współrzędną x, a Y_0 - poszerzony wektor stanu dla x = 0, to związek między Y(x) i Y_0, określony zależnościami (4.34) i (4.31), zapiszemy w postaci:

$$Y(x) = H(x) \cdot Y_0 \tag{4.35}$$

Macierz H(x), zwana rozszerzoną macierzą przęsła, określona na podstawie (4.34) i (4.31), przedstawia się w postaci:

$$
H(x) =
\begin{bmatrix}
S_1 & S_2 & \frac{1}{2}S_3 & \frac{1}{6}S_4 & S_5 & S_6 & \frac{1}{2}S_7 & \frac{1}{6}S_8 & S_9 & S_{10} & \frac{1}{2}S_{11} & \frac{1}{6}S_{12} & S_{37} \\
S_1' & S_2' & \frac{1}{2}S_3' & \frac{1}{6}S_4' & S_5' & S_6' & \frac{1}{2}S_7' & \frac{1}{6}S_8' & S_9' & S_{10}' & \frac{1}{2}S_{11}' & \frac{1}{6}S_{12}' & S_{37}' \\
S_1'' & S_2'' & \frac{1}{2}S_3'' & \frac{1}{6}S_4'' & S_5'' & S_6'' & \frac{1}{2}S_7'' & \frac{1}{6}S_8'' & S_9'' & S_{10}'' & \frac{1}{2}S_{11}'' & \frac{1}{6}S_{12}'' & S_{37}'' \\
S_1''' & S_2''' & \frac{1}{2}S_3''' & \frac{1}{6}S_4''' & S_5''' & S_6''' & \frac{1}{2}S_7''' & \frac{1}{6}S_8''' & S_9''' & S_{10}''' & \frac{1}{2}S_{11}''' & \frac{1}{6}S_{12}''' & S_{37}''' \\
S_{13} & S_{14} & \frac{1}{2}S_{15} & \frac{1}{6}S_{16} & S_{17} & S_{18} & \frac{1}{2}S_{19} & \frac{1}{6}S_{20} & S_{21} & S_{22} & \frac{1}{2}S_{23} & \frac{1}{6}S_{24} & S_{38} \\
S_{13}' & S_{14}' & \frac{1}{2}S_{15}' & \frac{1}{6}S_{16}' & S_{17}' & S_{18}' & \frac{1}{2}S_{19}' & \frac{1}{6}S_{20}' & S_{21}' & S_{22}' & \frac{1}{2}S_{23}' & \frac{1}{6}S_{24}' & S_{38}' \\
S_{13}'' & S_{14}'' & \frac{1}{2}S_{15}'' & \frac{1}{6}S_{16}'' & S_{17}'' & S_{18}'' & \frac{1}{2}S_{19}'' & \frac{1}{6}S_{20}'' & S_{21}'' & S_{22}'' & \frac{1}{2}S_{23}'' & \frac{1}{6}S_{24}'' & S_{38}'' \\
S_{13}''' & S_{14}''' & \frac{1}{2}S_{15}''' & \frac{1}{6}S_{16}''' & S_{17}''' & S_{18}''' & \frac{1}{2}S_{19}''' & \frac{1}{6}S_{20}''' & S_{21}''' & S_{22}''' & \frac{1}{2}S_{23}''' & \frac{1}{6}S_{24}''' & S_{38}''' \\
S_{25} & S_{26} & \frac{1}{2}S_{27} & \frac{1}{6}S_{28} & S_{29} & S_{30} & \frac{1}{2}S_{31} & \frac{1}{6}S_{32} & S_{33} & S_{34} & \frac{1}{2}S_{35} & \frac{1}{6}S_{36} & S_{39} \\
S_{25}' & S_{26}' & \frac{1}{2}S_{27}' & \frac{1}{6}S_{28}' & S_{29}' & S_{30}' & \frac{1}{2}S_{31}' & \frac{1}{6}S_{32}' & S_{33}' & S_{34}' & \frac{1}{2}S_{35}' & \frac{1}{6}S_{36}' & S_{39}' \\
S_{25}'' & S_{26}'' & \frac{1}{2}S_{27}'' & \frac{1}{6}S_{28}'' & S_{29}'' & S_{30}'' & \frac{1}{2}S_{31}'' & \frac{1}{6}S_{32}'' & S_{33}'' & S_{34}'' & \frac{1}{2}S_{35}'' & \frac{1}{6}S_{36}'' & S_{39}'' \\
S_{25}''' & S_{26}''' & \frac{1}{2}S_{27}''' & \frac{1}{6}S_{28}''' & S_{29}''' & S_{30}''' & \frac{1}{2}S_{31}''' & \frac{1}{6}S_{32}''' & S_{33}''' & S_{34}''' & \frac{1}{2}S_{35}''' & \frac{1}{6}S_{36}''' & S_{39}''' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\tag{4.36}
$$

Spośród dwunastu wartości brzegowych wektora stanu Y_e sześć określonych jest na podstawie warunków brzegowych dla $x = 0$, pozostałe sześć określa się z równania (4.34) dla $x = 1$.

4.2.2. Pręt o zmiennym przekroju

W przypadku prętów o zmiennym przekroju do rozwiązania powyższego problemu, podobnie jak w punkcie 2, zastosujemy metodę macierzy przeniesienia. Przyjmując wcześniej wprowadzone oznaczenia, wektor stanu $\mathbf{Y}(x)$ w dowolnym przekroju pręta, określonym współrzędną x, przedstawia się w postaci:

$$Y_i(x) = H_i(x) \cdot \left[\prod_{j=1}^{i-1} F_j H_j \right] \cdot Y_e \,, \tag{4.37}$$

gdzie:

i - i-ty odcinek, na które podzielono pręt,

H_j - macierz przęsła, określona zależności (4.36),

F_j - macierz przekroju j-tego.

W celu rozszerzenia zakresu zastosowań otrzymanego rozwiązania rozważać będziemy drgania pręta, wymuszone działaniem harmonicznych sił, rozłożonych w sposób ciągły, określonych zależnością (4.16) i w postaci następujących sił skupionych, przyłożonych w dowolnym przekroju pręta. Mamy zatem

$$\begin{aligned} P_y(t) &= P_y \cdot e^{i\omega t} \,, \\ P_z(t) &= P_z \cdot e^{i\omega t} \,, \\ M(t) &= M \cdot e^{i\omega t} \,, \end{aligned} \tag{4.38}$$

gdzie:

$P_y(t)$ - składowa obciążenia w kierunku osi y,

$P_z(t)$ - składowa obciążenia w kierunku osi z,

$M(t)$- moment skręcający, obliczony względem środka zginania.

a) Pręt bez warunków pośrednich

Macierz przekroju określimy dla przekroju, w którym występuje skokowa zmiana cech geometrycznych a jednocześnie działają obciążenia skupione określone zależnościami (4.38). Na podstawie warunków nierozdzielności przemieszczeń i warunków kinetostatycznych, przedstawionych w pkt. 2.3, możemy napisać następujące związki pomiędzy funkcjami przemieszczeń η, ξ, φ oraz ich pochodnymi po obu stronach rozpatrywanego przekroju, oznaczonymi indeksami "l" i "p" (pominięto tu indeks "i")

$$\begin{aligned} \eta_p &= \eta_l - (z_{sp} - z_{sl}) \cdot \varphi_l \,, \\ \xi_p &= \xi_l + (y_{sp} - y_{sl}) \cdot \varphi_l \,, \\ \eta'_p &= \eta'_l - (z_{sp} - z_{sl}) \cdot \varphi'_l \,, \\ \xi'_p &= \xi'_l + (y_{sp} - y_{sl}) \cdot \varphi'_l \,, \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\varphi_p = \varphi_l \ ,$$

$$u_p = u_l \ ,$$

$$M_{s_p} = M_{s_l} + Q_{y_l}(z_{\alpha_p} - z_{\alpha_l}) - Q_{z_l}(y_{\alpha_p} - y_{\alpha_l}) - M \ ,$$

$$M_{y_p} = M_{y_l} \ ,$$

$$M_{z_p} = M_{z_l} \ ,$$

$$B_p = B_l \ ,$$

$$Q_{y_p} = Q_{y_l} - P_y \ ,$$

$$Q_{z_p} = Q_{z_l} - P_z \ .$$

Zauważmy, że po wykorzystaniu (2.22) i (2.23), zależności (2.27) przyjmą postać

$$\eta_p = \eta_l - (z_{\alpha_p} - z_{\alpha_l}) \cdot \varphi_l \ ,$$

$$\xi_p = \xi_l + (y_{\alpha_p} - y_{\alpha_l}) \cdot \varphi_l \ ,$$

$$\eta_p' = \eta_l - (z_{\alpha_p} - z_{\alpha_l}) \cdot \varphi_l \ ,$$

$$\xi_p' = \xi_l + (y_{\alpha_p} - y_{\alpha_l}) \cdot \varphi_l \ ,$$

$$\varphi_p = \varphi_l \ ,$$

$$\varphi_p' = w_1 \cdot \varphi_l' \ , \tag{4.40}$$

$$\varphi_p''' = \frac{J_{z_l}}{J_{\omega_p}}(z_{\alpha_p} - z_{\alpha_l}) \cdot \eta_l''' - \frac{J_{y_l}}{J_{\omega_p}}(y_{\alpha_p} - y_{\alpha_l}) \cdot \xi_l''' + \frac{GJ_{s_p} \cdot w_1 - GJ_{s_l}}{EJ_{\omega_p}} \cdot \varphi' + \frac{J_{\omega_l}}{J_{\omega_p}} \cdot \varphi_l'' + \frac{M}{EJ_{\omega_p}} \ ,$$

$$\xi_p'' = \frac{J_{y_l}}{J_{y_p}} \cdot \xi_l'' \ ,$$

$$\eta_p'' = \frac{J_{z_l}}{J_{z_p}} \cdot \eta_l'' \ ,$$

$$\varphi_p'' = \frac{J_{\omega_l}}{J_{\omega_p}} \cdot \varphi_l'' \ ,$$

$$\eta_p''' = \frac{J_{z_l}}{J_{z_p}} \cdot \eta_l''' + \frac{P}{EJ_{z_p}} \ ,$$

$$\xi_p''' = \frac{J_{y_l}}{J_{y_p}} \cdot \xi_l''' + \frac{P}{EJ_{y_p}} \ .$$

Zależności (4.40), zapisane w postaci macierzowej, są następujące

$$
\begin{bmatrix} \eta_p \\ \eta_p' \\ \eta_p'' \\ \eta_p''' \\ \xi_p \\ \xi_p' \\ \xi_p'' \\ \xi_p''' \\ \varphi_p \\ \varphi_p' \\ \varphi_p'' \\ \varphi_p''' \\ 1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (z_{sl}-z_{sp}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (z_{sl}-z_{sp}) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{J_{zl}}{J_{zp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{J_{zl}}{J_{zp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{P_y}{EJ_{zp}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (y_{sp}-y_{sl}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (y_{sp}-y_{sl}) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_{yl}}{J_{yp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_{yl}}{J_{yp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{P_z}{EJ_{yp}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_{\omega l}}{J_{\omega p}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & W_8 & 0 & 0 & 0 & W_9 & 0 & W_2 & 0 & \frac{J_{\omega l}}{J_{\omega p}} & \frac{M}{EJ_{\omega p}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \eta_l \\ \eta_l' \\ \eta_l'' \\ \eta_l''' \\ \xi_l \\ \xi_l' \\ \xi_l'' \\ \xi_l''' \\ \varphi_l \\ \varphi_l' \\ \varphi_l'' \\ \varphi_l''' \\ 1 \end{bmatrix}
\tag{4.41}
$$

gdzie:

W_1, W_2, W_8, W_9 - jak w przypadku drgań swobodnych.

Jeżeli macierz prostokątną (macierz przekroju) oznaczymy przez F, wówczas wektor stanu Y(x), w dowolnym przęśle "i", wyrazi się w postaci

$$Y_i(x) = H_i(x) \cdot Y^P_{i-1} \tag{4.42}$$

Po wprowadzeniu (2.41) zależność (4.42) przyjmie postać

$$Y_i(x) = H_i \left[\prod_{j=1}^{i-1} F_j H_j \right] \cdot Y_o , \tag{4.43}$$

gdzie:

i = 1,2,3 ... m (m - liczba odcinków, na które podzielono pręt).

Dla i = m

$$Y_i = H_m \cdot \prod_{j=1}^{i-1} F_j H_j \cdot Y_o , \tag{4.44}$$

Na podstawie zależności (4.44) określa się nieznane wartości wektora stanu Y_i .

Macierz przeniesienia ma w tym przypadku postać

$$H = H_m \prod_{j=1}^{i-1} F_j H_j . \tag{4.45}$$

b) P r ę t z w a r u n k a m i p o ś r e d n i m i

Podobnie jak w pkt. 2.3 rozważać będziemy przekrój, w którym - oprócz zmiany cech geometrycznych - wystąpi obciążenie skupione, podparcie sprężyste i masa skupiona.

Przyjmując oznaczenia jak dla pręta bez warunków pośrednich, zależność pomiędzy siłami wewnętrznymi, dla obu stron przekroju, przedstawia się następująco

$$
\begin{aligned}
Q_{yp} &= Q_{y1} + C_y \cdot \eta_o - B_y - P_y \,, \\
Q_{zp} &= Q_{z1} + C_z \cdot \xi_o - B_z - P_z \,, \\
M_{sp} &= M_{s1} + Q_{y1}(z_{sp} - z_{s1}) - Q_{z1}(y_{sp} - y_{s1}) + C_\varphi \cdot \varphi - M_B - M \,.
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
B_y &= m\omega^2 \cdot \eta_1 + m\omega^2 z_{s1} \cdot \varphi_1 \,, \\
B_z &= m\omega^2 \cdot \xi_1 - m\omega^2 y_{s1} \cdot \varphi_1 \,, \\
M_B &= J_o \omega^2 \cdot \varphi_1
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

Wstawiając (4,47) do (4.46) i wykorzystując wyrażenia (2.22) i (2.34), otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\eta_p''' &= \frac{m\omega^2 - C_y}{EJ_{zp}} \cdot \eta_1 + \frac{J_{z1}}{J_{zp}} \cdot \eta_1''' + \frac{m\omega^2 z_{s1} - C_y z_{s1}}{EJ_{zp}} \cdot \varphi_1 + \frac{P_y}{EJ_{zp}} \,, \\
\xi_p''' &= \frac{m\omega^2 - C_z}{EJ_{yp}} \cdot \xi_1 + \frac{J_{y1}}{J_{yp}} \cdot \xi_1''' + \frac{C_z y_{s1} - m\omega^2 y_{s1}}{EJ_{yp}} \cdot \varphi_1 + \frac{P_z}{EJ_{yp}} \,, \\
\varphi_p''' &= \frac{J_{z1}}{J_{\omega p}}(z_{sp} - z_{s1}) \cdot \eta_1''' - \frac{J_{y1}}{J_{\omega p}}(y_{sp} - y_{s1}) \cdot \xi_1''' + \frac{J_\xi \omega^2 - C_\varphi}{EJ_{\omega p}} + \frac{GJ_{xp} W_1 - GJ_{x1}}{EJ_{\omega p}} \cdot \varphi_1' + \\
&\quad + \frac{J_{\omega 1}}{J_{\omega p}} \varphi_1''' + \frac{M}{EJ_{\omega p}} \,.
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

Pozostałe związki mają postać taką samą jak dla pręta bez warunków pośrednich. Macierz przekroju przedstawia się więc następująco

$$
F = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (z_{s1} - z_{sp}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (z_{s1} - z_{sp}) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{J_{z1}}{J_{zp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_3 & 0 & 0 & \frac{J_{z1}}{J_{zp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & W_4 & 0 & 0 & 0 & \frac{P_y}{EJ_{zp}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (y_{sp} - y_{s1}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (y_{sp} - y_{s1}) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_{y1}}{J_{yp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_5 & 0 & 0 & \frac{J_{y1}}{J_{yp}} & W_6 & 0 & 0 & 0 & \frac{P_z}{EJ_{yp}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_{\omega 1}}{J_{\omega p}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & W_8 & 0 & 0 & 0 & W_9 & W_7 & W_2 & 0 & \frac{J_{\omega 1}}{J_{\omega p}} & \frac{M}{EJ_{\omega p}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\tag{4.49}
$$

gdzie: W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7, W_8, W_9 - jak w przypadku drgań swobodnych.

5. STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH

5.1. Podstawowy układ równań różniczkowych

Rozważać będziemy pręt poddany działaniu zmiennej sile P(t), działającej centralnie.

Jeżeli w równaniach (2.1) siłę normalną P traktować będziemy jako funkcję czasu t, to równania te stanowić będą podstawowy układ równań różniczkowych stateczności dynamicznej rozpatrywanego pręta cienkościennego [8] . Równania te mają postać

$$
\begin{aligned}
&EJ_z\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}-\frac{\gamma J_z}{g}\cdot\frac{\partial^4\eta}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\gamma A}{g}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+P(t)\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\gamma A z_\alpha}{g}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+P(t)z_\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0\,,\\
&EJ_y\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4}-\frac{\gamma J_y}{g}\cdot\frac{\partial^4\xi}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\gamma A}{g}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+P(t)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}-\frac{\gamma A y_\alpha}{g}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-P(t)y_\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0\,,\\
&\frac{\gamma A z_\alpha}{g}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+P(t)z_\alpha\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}-\frac{\gamma A y_\alpha}{g}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-P(t)y_\alpha\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+EJ_\omega\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+\\
&\quad-\frac{\gamma J_\omega}{g}\cdot\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\gamma A r^2}{g}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-GJ_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+P(t)r^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0\,,
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Rozwiązanie omawianego problemu uzyskamy przy zastosowaniu dyskretyzacji, której algorytm przedstawiono w punkcie 4.1. W wyniku zastosowanej dyskretyzacji przekształcimy układ różniczkowy cząstkowy (5.1) w następujący układ jednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu (ze względu na t) o zmiennych współczynnikach.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\ddot T_n^1\cdot J_n^{1k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^1\cdot J_n^{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\ddot T_n^3\cdot J_n^{3k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^3\cdot J_n^{4k}=0\,,\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\ddot T_n^2\cdot J_n^{5k}+\sum_{n=1}^{\infty}\cdot T_n^2\cdot J_n^{6k}+\sum_{n=1}^{\infty}\ddot T_n^3\cdot J_n^{7k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^3\cdot J_n^{8k}=0\,,\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\ddot T_n^1\cdot J_n^{9k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^1\cdot J_n^{10k}+\sum_{n=1}^{\infty}\ddot T_n^2\cdot J_n^{11k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^2\cdot J_n^{12k}+\sum_{n=1}^{\infty}\ddot T_n^3\cdot J_n^{13k}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^3\cdot J_n^{14k}=0\,;
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

$$k = 1,2,\ \dots\ \infty\,.$$

Zmiennymi współczynnikami są:

$$
\begin{aligned}
J_n^{2k}&=\sum_i\Big[EJ_z\int_{l_i}\bar\eta_n^{IV}(x)\cdot\bar\eta_k(x)\,dx-P(t)\int_{l_i}\bar\eta_n''(x)\cdot\bar\eta_k(x)\,dx\Big]\,,\\
J_n^{4k}&=\sum_i P(t)z_\alpha\int_{l_i}\bar\varphi_n''(x)\cdot\bar\eta_k(x)\,dx\,,\\
J_n^{6k}&=\sum_i\Big[EJ_y\int_{l_i}\bar\xi_n^{IV}(x)\cdot\bar\xi_k(x)\,dx+P(t)\int_{l_i}\bar\xi_n''(x)\cdot\bar\xi_k(x)\,dx\Big]\,,\\
J_n^{8k}&=-\sum_i P(t)y_\alpha\int_{l_i}\bar\varphi_n''(x)\cdot\bar\xi_k(x)\,dx\,,\\
J_n^{10k}&=\sum_i P(t)z_\alpha\int_{l_i}\bar\eta_n''(x)\cdot\bar\varphi_k(x)\,dx\,,\\
J_n^{12k}&=-\sum_i P(t)y_\alpha\int_{l_i}\bar\xi_n''(x)\cdot\bar\varphi_k(x)\,dx\,,\\
J_n^{14k}&=\sum_i\Big\{EJ_\omega\int_{l_i}\bar\varphi_n^{IV}(x)\cdot\bar\varphi_k(x)\,dx+\big[P(t)r^2-GJ_x\big]\int_{l_i}\bar\varphi_n''(x)\cdot\bar\varphi_k(x)\,dx\Big\}\,.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Równania (5.2), zapisane w formie macierzowej, przyjmują postać

$$J_1 \ddot{T} + J_2 T = 0 , \tag{5.4}$$

gdzie:

J_1, J_2, T - macierze, określone w punkcie 4.1.2, z tym jednak zastrzeżeniem, że elementy macierzy J_2 w wyrażeniu (5.4) są funkcjami czasu t (funkcja obciążenia P(t)). Elementy macierzy J_2 określają wyrażenia (5.3).

Układ równań (5.4) wygodniej jest ze względów numerycznych sprowadzić do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu. W wyniku następującego podstawienia otrzymamy

$$\varkappa^1 = T , \ \varkappa^2 = \dot{T} ,$$

$$J_1 \dot{\varkappa}^2 + J_2 \varkappa^1 = 0 , \tag{5.5}$$

$$\dot{\varkappa}^1 = \varkappa^2$$

W postaci macierzowej układ równań (5.5) przedstawia się następująco

$$\dot{\varkappa} = J(t) \cdot \varkappa , \tag{5.6}$$

gdzie:

$$\varkappa = \mathrm{colon}[\varkappa^1 \ \varkappa^2] ,$$

$$J(t) = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -J_1^{1} J_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

E - macierz jednostkowa odpowiedniego rzędu,

I_1, I_2 - bloki macierzy I(t),

$\varkappa^1$ $\varkappa^2$ - bloki macierzy $\varkappa$

5.2. Algorytm wyznaczania obszarów dynamicznej stateczności

Analiza zagadnień dotyczących stabilności układów mechanicznych, zapoczątkowana w 1644 r. przez Torricellego [66], na obecnym etapie zajmuje się badaniem związków zachodzących pomiędzy ograniczeniami warunków początkowych, zaburzeń i odpowiadających im rozwiązań w pewnym, skończonym lub nie, przedziale czasu. Związki te mogą mieć różnorodny charakter w zależności od wymagań, jakie stawia się układowi. Z tego też powodu powstało wiele definicji stabilności ruchu, ściśle związanych z matematycznymi pojęciami zbieżności i ograniczoności.

Wśród wielu tych definicji należy przede wszystkim wymienić stabilność w sensie Lagrange'a [74], stabilność w sensie Laplace'a [93], stabilność w sensie Poincare'go [16], stabilność w sensie Lapunowa [50,91] i stabilność techniczną [8].

Szczególne zasługi dla rozwoju teorii stabilności mają prace Lapunowa, które stanowią podstawę współczesnej teorii stabilności. Metoda Lapunowa, wraz z jej innowacjami technicznymi [14,31,72,119], znalazła szerokie zastosowanie praktyczne ze względu na swą efektywność. Stabilność wg Lapunowa nakłada na procesy dynamiczne bardzo "ciasne" ograniczenia. Postuluje się mianowicie, by bliskie rozwiązania, w sensie normy w chwili t = 0, pozostawały bliskie w chwilach późniejszych.

Szczegółowe definicje stabilności są omówione w wyżej wymienionych pracach. W punkcie tym ograniczymy się do podania algorytmu wyznaczania obszarów stabilności pewnego zbioru funkcji obciążenia P(t). Algorytm ten, szerzej omówiony w pracach [9,66], opiera się na teorii Floqueta [39].

Rozważania ograniczymy do przypadków, dla których funkcja obciążenia P(t) będzie funkcją okresową o okresie τ, spełniającą warunki Dirichleta

$$P(t+\tau) = P(t) \tag{5.8}$$

a tym samym macierz I(t) wyrażenia (5.7) spełnia warunki

$$I(t+\tau) = I(t) \tag{5.9}$$

Jeżeli przez

$$\bar{\varkappa}(t) = \begin{bmatrix} \varkappa_{11} & \varkappa_{12} & \dots & \varkappa_{1n} \\ \varkappa_{21} & \varkappa_{22} & \dots & \varkappa_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varkappa_{n1} & \varkappa_{n2} & \dots & \varkappa_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

oznaczymy macierz fundamentalną rozwiązania równania (5.6), to - jak ogólnie wiadomo - rozwiązanie równania (5.6) jest kombinacją poszczególnych rozwiązań jako

$$\varkappa(t) = \bar{\varkappa}(t)\cdot C, \tag{5.11}$$

gdzie:

$$C = \mathrm{colon}\,[C_1, C_2, \dots C_n], \tag{5.12}$$

$C_i - C_n$ - stałe dowolne.

Na podstawie teorii Floqueta dowodzi się, że

$$\bar{\varkappa}(t+\tau) = \bar{\varkappa}(t)\cdot A, \tag{5.13}$$

i

$$\varkappa(t+\tau) = \varrho\cdot\varkappa(t), \tag{5.14}$$

gdzie:

A jest macierzą stałą, którą przy warunkach początkowych

$$\varkappa_{kj}(0) = \delta_{kj}, \tag{5.15}$$

określa się z zależności

$$A = \bar{\varkappa}(\tau), \tag{5.16}$$

czyli

$$A = \begin{bmatrix} \varkappa_{11}(\tau) & \dots & \varkappa_{1n}(\tau) \\ \vdots & & \vdots \\ \varkappa_{n1}(\tau) & \dots & \varkappa_{nn}(\tau) \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

ϱ - stała liczba.

Ponadto

$$\varkappa(t) = \bar{\varkappa}(t) \cdot \beta \qquad (5.18)$$

gdzie:

β = colon$[\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n]$,

$\beta_1 - \beta_n$ - stałe liczby.

Na podstawie (5.18) możemy napisać

$$\varkappa(t + \tau) = \bar{\varkappa}(t + \tau) \cdot \beta , \qquad (5.19)$$

i dalej, podstawiając (5.19) i (5.18) do (5.14), otrzymamy

$$\bar{\varkappa}(t + \tau) \cdot \beta = \varrho \cdot \bar{\varkappa}(t) \cdot \beta . \qquad (5.20)$$

Wykorzystując zależności (5.13), równość (5.20) możemy napisać w postaci

$$\bar{\varkappa}(t) \, A \cdot \beta = \varrho \cdot \bar{\varkappa}(t) \cdot \beta . \qquad (5.21)$$

Biorąc pod uwagę, że równanie (5.21) musi zachodzić dla każdego t, powinien być spełniony warunek

$$(A - \varrho E) \cdot \beta = 0 , \qquad (5.22)$$

gdzie:

E - macierz jednostkowa odpowiedniego rzędu.

Eliminując rozwiązanie trywialne, otrzymamy warunek

$$\det(A - \varrho E) = \begin{vmatrix} \varkappa_{11}(\tau) - \varrho & \varkappa_{12}(\tau) & \dots & \varkappa_{1n}(\tau) \\ \varkappa_{21}(\tau) & \varkappa_{22}(\tau) - \varrho & \dots & \varkappa_{2n}(\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varkappa_{n1}(\tau) & \varkappa_{n2}(\tau) & \dots & \varkappa_{nn}(\tau) \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.23)$$

Znając wartości $\varkappa_{11}(\tau)$, ... , $\varkappa_{nn}(\tau)$ z równania (5.23), obliczymy liczby $\varrho_1, \dots , \varrho_n$, a następnie

$$\varkappa_1(t + \tau) = \varrho_1 \varkappa_1(t), \ \dots , \ \varkappa_n(t + \tau) = \varrho_n \varkappa_n(t) , \qquad (5.24)$$

gdzie:

$\varkappa_1(t)$ = colon$[\varkappa_{11}(t), \dots , \varkappa_{n1}(t)]$,

....

$\varkappa_n(t)$ = colon$[\varkappa_{n1}(t), \dots , \varkappa_{nn}(t)]$.

Elementy macierzy (5.17), określające wartości funkcji w równaniu (5.6) dla $t = \tau$, możemy wyznaczyć na drodze numerycznej, np. za pomocą metody Rungego-Kutty [79].

Liczby $\varrho_1 - \varrho_n$ (pierwiastki równania (5.23)) stanowią podstawę do określenia stabilności układu. Jeżeli moduły wszystkich pierwiastków równania charakterystycznego (5.23) są mniejsze od jedności, to rozpatrywany ruch układu jest asymptotycznie stabilny. Jeśli natomiast wśród pierwiastków równania charakterystycznego znajduje się chociaż jeden, którego moduł jest większy od jedności, to układ jest niestabilny. W przypadku gdy wśród pierwiastków również istnieją pierwiastki, których moduły są równe jedności, lecz moduły pozostałych są mniejsze od jedności, to układ jest stabilny, ale nie asymptotycznie.

6. SZCZEGÓLNE PRZYPADKI ROZWAŻANYCH PROBLEMÓW

a) Określenie siły krytycznej na podstawie rozwiązania drgań swobodnych

Zagadnienie stateczności statycznej, podobnie jak problem drgań swobodnych, jest zagadnieniem jednorodnym, a więc w obu przypadkach zadanie sprowadza się do określenia postaci wyznacznika charakterystycznego, a następnie wyznaczania jego wartości własnych.

W niniejszej pracy, przy rozwiązywaniu zagadnienia drgań swobodnych, przyjęto schemat pręta obciążonego siłą P, działającą centralnie. W przypadku gdy wartości siły P dążyć będą do wartości siły krytycznej, to częstości drgań swobodnych dążyć będą do zera. Wynika to z analizy równań różniczkowych (2.3). Jeżeli w równaniach tych $\omega_n \to 0$, to równania te przyjmą postać równań różniczkowych zagadnienia stateczności statycznej.

Można więc na podstawie zagadnienia drgań swobodnych prętów cienkościennych określić obciążenie krytyczne. Jeśli założymy, że w rozwiązywaniu tym $\omega_n = 0$, wówczas wartościami własnymi wyznacznika charakterystycznego będą siły krytyczne P_{kr}.

b) Statyka prętów cienkościennych

Przedstawione w punkcie (4.2) rozwiązanie zagadnienia drgań wymuszonych w przypadku szczególnym, gdy $\omega = 0$, stanowi rozwiązanie ogólnych zagadnień statyki prętów cienkościennych.

Należy tu podkreślić, że pręty w tym zagadnieniu mogą być obciążone w sposób ciągły lub za pomocą sił skupionych.

c) Szczególne przypadki cech geometrycznych przekroju poprzecznego pręta

Jeżeli środek zginania pręta pokrywa się ze środkiem ciężkości, co ma miejsce w przypadku, kiedy przekrój posiada dwie osie symetrii, to układ sprzężonych równań różniczkowych (2.1), (4,1) i (5.1) rozprzęga się na trzy niezależne równania różniczkowe. Równania te są równaniami identycznymi jak dla prętów pryzmatycznych z uwzględnieniem bezwładności obrotów przekroju.

Jeżeli natomiast przekrój pręta posiada jedną oś symetrii, wówczas środek zginania leży na jednej z głównych centralnych osi bezwładności przekroju ($y_\alpha = 0$ lub $z_\alpha = 0$). W takim przypadku jedno z równań różniczkowych (2.1), (4.1), (5.1) jest niezależne od dwóch pozostałych.

d) D r g a n i a   w y m u s z o n e   o b c i ą ż e n i e m   o k r e s o w y m   n i e h a r m o n i c z n i e   z m i e n n y m   w   c z a s i e

Zagadnienie drgań wymuszonych obciążeniem okresowym można sprowadzić do superpozycji rozwiązań dla odpowiedniego obciążenia, harmonicznie zmiennego w czasie (pkt. 4.2). W tym celu należy daną funkcję obciążenia, okresowo zmienną w czasie, rozłożyć w szereg Fouriera [90].

Z uwagi na to, że równania różniczkowe opisujące drgania są liniowe, zatem - zgodnie z zasadą superpozycji - rozwiązanie w tym przypadku jest sumą rozwiązań dla poszczególnych harmonik.

7. UWAGI O ZBIEŻNOŚCIACH PRZEDSTAWIONYCH ROZWIĄZAŃ

a) Zbieżność szeregów potęgowych

W teorii równań różniczkowych dowodzi się [94,97], że jeżeli współczynniki równania różniczkowego zwyczajnego są szeregami potęgowymi, zbieżnymi dla $|x| < R$, to dla tych wartości rozwiązań różniczkowych - za pomocą szeregów potęgowych - są rozwiązaniami zbieżnymi.

W szczególności, gdy współczynniki równania różniczkowego są wielkościami stałymi (jak to ma miejsce w niniejszej pracy), to rozwinięcia w szeregi potęgowe (2.5)i(4.24) stanowią rozwiązania tego równania i są szeregami zbieżnymi dla dowolnej wartości x.

b) Zbieżność rozwinięcia w szereg wg funkcji własnych

Dowód i warunki dostateczne zapewniające zbieżność rozwiązania, przy zastosowaniu rozwinięcia szukanej funkcji w uogólniony szereg Fouriera wg funkcji własnych, zawarte są w pracach [17,94,97]. Twierdzenie o zbieżności ww. szeregu Fouriera można w skrócie sformułować następująco:

<u>Twierdzenie 7.1.</u> Jeżeli funkcje $\eta(x,t)$, $\xi(x,t)$, $\varphi(x,t)$, ciągłe w obszarze ($a \leqslant x \leqslant b$, $t > 0$) są rozwiązaniem równań (4.1), spełniającym warunki początkowo-brzegowe (4.1a), to rozwinięcia tych funkcji w następujące szeregi

$$\begin{aligned} \eta(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n^1(t)\, \bar{\eta}_n(x), \\ \xi(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n^2(t)\, \bar{\xi}_n(x), \qquad (7.1) \\ \varphi(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n^3(t)\, \bar{\varphi}_n(x), \end{aligned}$$

gdzie:

$\bar{\eta}_n(x)$, $\bar{\xi}_n(x)$, $\bar{\varphi}_n(x)$ są funkcjami własnymi zagadnienia brzegowego (p.2), a funkcje $T_n^k(t)$ określa się z równań (4.15) przy warunkach początkowych (4.1a),

są zawsze zbieżne w sensie zwykłym lub przeciętnie z kwadratem odpowiednio do funkcji $\eta(x,t)$, $\xi(x,t)$, $\varphi(x,t)$. O funkcjach $\bar{\eta}_n(x)$, $\bar{\xi}_n(x)$, $\bar{\varphi}_n(x)$ zakłada się, że spełniają warunki Dirichleta.

c) Zbieżność metody Bubnowa-Galerkina

Warunki zbieżności metody Bubnowa-Galerkina zawarte są w pracach Michlina [67].

[68]. Pomijając dowód, podamy tylko ogólne twierdzenie o zbieżności metody.

Twierdzenie 7.2. Jeżeli dane równanie jest jednoznacznie rozwiązalne, to rozwiązanie, przybliżone za pomocą metody Bubnowa-Galerkina, istnieje dla dostatecznie dużych n, a ciąg tych rozwiązań jest zbieżny w danej przestrzeni do rozwiązania dokładnego.

d) Stabilność numeryczna metody macierzy przeniesienia

W zagadnieniach stereomechanicznych dla prętów wiotkich (głównie na podłożu sprężystym), dla których wpływ składowych wektora stanu dla $x = 0$ na składowe wektora stanu dla $x = 1$ jest niewielki, elementy macierzy przeniesienia są stosunkowo małymi liczbami. W takim przypadku może wystąpić tzw. numeryczna niestabilność tych rozwiązań [121]. Wynika to z faktu, że maszyna cyfrowa posiada z góry określoną liczbę cyfr znaczących (stała długość słowa). Może się więc okazać, że wtedy decydujące znaczenie na rozwiązanie mają cyfry nie uwzględniane przez maszynę, lub określone w sposób dowolny, przypadkowy, a więc niestabilny. Niestabilność ta może wystąpić przy korzystaniu z aktualnie dostępnych w kraju maszyn cyfrowych o tzw. stałej długości słowa [88]. Biorąc jednak pod uwagę to, że stosowanie teorii prętów cienkościennych jest uzasadnione dla prętów stosunkowo sztywnych (obliczenia steromechaniczne dla prętów wiotkich, prowadzone przy założeniach teorii prętów cienkościennych dają wyniki zbliżone do wyników otrzymanych wg teorii jak dla prętów pryzmatycznych), a ponadto że nie rozpatrywano w pracy prętów na podłożu sprężystym, możliwość występowania numerycznej niestabilności jest w tym przypadku mało prawdopodobna.

Zawarte w tym punkcie uwagi o zbieżności przedstawionych w pracy rozwiązań mają charakter informacyjny. Szczegółową analizę dotyczącą tego problemu znaleźć można w pozycjach literaturowych wyszczególnionych w pracy [17,67,68,90,94,97,121].

8. OBLICZENIA NUMERYCZNE I PRZYKŁADY LICZBOWE

8.1. Wprowadzenie

Przedstawione w pracy rozwiązania rozpatrywanych zagadnień umożliwiają przeprowadzenie obliczeń numerycznych według prostych algorytmów. Ze względu jednak na dużą liczbę operacji rachunkowych algorytmy te zaprogramowano na elektroniczną maszynę cyfrową ODRA 1305 w języku FORTRAN.

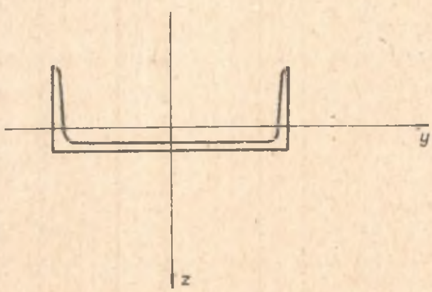
Uruchomiono dotychczas następujące programy:

- Program wyznaczania częstości kołowych drgań swobodnych pręta o zmiennym przekroju.
- Program wyznaczania funkcji własnych prętów cienkościennych, który jest rozszerzeniem programu poprzedniego.
- Program ortogonalizacji i normalizacji funkcji własnych.
- Program wyznaczania amplitud funkcji przemieszczeń w przypadku działania na pręt obciążenia harmonicznie zmiennego w czasie.
- Program wyznaczania funkcji przemieszczeń w przypadku działania na pręt obciążenia o dowolnej zdeterminowanej funkcji czasu t i współrzędnej x.

Pomijając szczegółowy opis wymienionych programów oraz rezultaty obliczeń testujących, ograniczymy się do przytoczenia wyników obliczeń otrzymanych dla kilku przykładów liczbowych.

8.2. Pręt o przekroju ceowym

Dla prześledzenia zbieżności rozwinięcia funkcji przemieszczeń w szeregi potęgowe przeprowadzono obliczenia numeryczne dla pręta o cechach geometrycznych podanych w przykładzie 3-69 zamieszczonym w pracy [95], s. 464-465. Rozpatrywany tam pręt jest belką swobodnie podpartą o przekroju ceowym nr 30a (rys.4).



Rys. 4

Cechy konstrukcyjne belki są następujące:

$$E = 2{,}1 \cdot 10^{11} \left[\frac{N}{m^2}\right], \quad G = 0{,}84 \cdot 10^{11} \left[\frac{N}{m^2}\right],$$

$$\frac{\delta}{g} = 7{,}8 \cdot 10^{3} \left[\frac{kg}{m^3}\right]; \quad A = 0{,}493 \cdot 10^{-2} \left[m^2\right],$$

$$I_y = 0{,}26 \cdot 10^{-5} \left[m^4\right], \quad I_z = 0{,}6048 \cdot 10^{-4} \left[m^4\right],$$

$$I_x = 0{,}3911 \cdot 10^{-6} \left[m^4\right], \quad I_\omega = 0{,}734 \cdot 10^{-7} \left[m^6\right],$$

$$y_\alpha = 0, \quad z_\alpha = 0{,}0513\ [m], \quad l = 4{,}0\ [m].$$

W oparciu o przedstawione w pracy algorytmy obliczeń zaprogramowane na elektroniczną maszynę cyfrową wyznaczono pierwsze dwie częstości drgań swobodnych i wielkości maksymalnych przemieszczeń (w środku rozpiętości belki) wywołanych obciążeniem harmonicznie zmiennym w czasie. Obliczenia przeprowadzono dla 5,8,10,20 i 40 wyrazów szeregów potęgowych stanowiących rozwinięcia funkcji przemieszczeń $\eta(x)$, $\xi(x)$ i $\varphi(x)$.
Wyniki obliczeń zestawiono w tablicach 3, 4, 5.

Tablica 3

ω \ Liczba wyrazów szeregu	10	20	40	60	wg [95]
ω_1	51,5625	52,1875	52,1875	52,1875	-
ω_2	180,3125	182,8125	182,8125	182,8125	182

Tablica 3 podaje obliczone wartości częstości drgań swobodnych w zależności od liczby warazów szeregów potęgowych.

Tablica 4

Częstość ω	Przemieszczenia	Liczba wyrazów szeregu				
		5	8	10	20	40
0	$\eta(\frac{l}{2})$; [m]	$0{,}5249 \cdot 10^{-3}$	$0{,}5249 \cdot 10^{-3}$	$0{,}5249 \cdot 10^{-3}$	$0{,}5249 \cdot 10^{-3}$	$0{,}5249 \cdot 10^{-3}$
	$\xi(\frac{l}{2})$; [m]	$0{,}1124 \cdot 10^{-1}$	$0{,}1220 \cdot 10^{-1}$	$0{,}1221 \cdot 10^{-1}$	$0{,}1221 \cdot 10^{-1}$	$0{,}1221 \cdot 10^{-1}$
	$\varphi(\frac{l}{2})$; [rd]	0	0	0	0	0
40	$\eta(\frac{l}{2})$; [m]	$0{,}5249 \cdot 10^{-3}$	$0{,}5262 \cdot 10^{-3}$	$0{,}5262 \cdot 10^{-3}$	$0{,}5262 \cdot 10^{-3}$	$0{,}5262 \cdot 10^{-3}$
	$\xi(\frac{l}{2})$; [m]	$0{,}1295 \cdot 10^{-1}$	$0{,}1295 \cdot 10^{-1}$	$0{,}1295 \cdot 10^{-1}$	$0{,}1295 \cdot 10^{-1}$	$0{,}1295 \cdot 10^{-1}$
	$\varphi(\frac{l}{2})$; [rd]	$0{,}5147 \cdot 10^{-1}$	$0{,}5215 \cdot 10^{-1}$	$0{,}5216 \cdot 10^{-1}$	$0{,}5216 \cdot 10^{-1}$	$0{,}5216 \cdot 10^{-1}$

W tablicy 4 przedstawiono zależność wielkości przemieszczeń maksymalnych $\eta(\frac{l}{2})$, $\xi(\frac{l}{2})$, $\varphi(\frac{l}{2})$ wymuszonych skupionym obciążeniem harmonicznym o amplitudach P_y = 5000[N], P_z = 5000 N i częstości ω = 40 $\left[\frac{1}{s}\right]$, przyłożonym w przekroju $x = \frac{l}{2}$, od liczby wyrazów szeregów potęgowych.

Wielkości maksymalnych przemieszczeń $\eta(\frac{l}{2})$, $\xi(\frac{l}{2})$ i $\varphi(\frac{l}{2})$ wymuszone obciążeniem równomiernie rozłożonym na długości belki o amplitudzie $q_y(x)$ = 1000[N/m] $q_z(x)$ = 1000[N/m] i częstości ω = 40$\left[\frac{1}{s}\right]$ dla różnej liczby wyrazów szeregów potęgowych zestawiono w tablicy 5.

Tablica 5

Częstość ω	Przemieszczenia	Liczba wyrazów szeregu				
		5	8	10	20	40
0	$\eta(\frac{l}{2})$; [m]	$0{,}5249\cdot10^{-4}$	$0{,}2100\cdot10^{-4}$	$0{,}2100\cdot10^{-4}$	$0{,}2100\cdot10^{-4}$	$0{,}2100\cdot10^{-4}$
	$\xi(\frac{l}{2})$; [m]	$0{,}1205\cdot10^{-2}$	$0{,}4881\cdot10^{-4}$	$0{,}4884\cdot10^{-3}$	$0{,}4884\cdot10^{-4}$	$0{,}4884\cdot10^{-4}$
	$\varphi(\frac{l}{2})$; [rd]	0	0	0	0	0
40	$\eta(\frac{l}{2})$; [m]	$0{,}52248\cdot10^{-4}$	$0{,}2103\cdot10^{-4}$	$0{,}2104\cdot10^{-4}$	$0{,}2104\cdot10^{-4}$	$0{,}2104\cdot10^{-4}$
	$\xi(\frac{l}{2})$; [m]	$0{,}1279\cdot10^{-2}$	$0{,}5141\cdot10^{-4}$	$0{,}5143\cdot10^{-3}$	$0{,}5143\cdot10^{-3}$	$0{,}5143\cdot10^{-3}$
	$\varphi(\frac{l}{2})$; [rd]	0	$0{,}1377\cdot10^{-8}$	$0{,}1907\cdot10^{-8}$	$0{,}1907\cdot10^{-8}$	$0{,}1907\cdot10^{-3}$

Dla porównania w tablicach tych przedstawiono wielkości przemieszczeń $\eta(\frac{l}{2})$, $\xi(\frac{l}{2})$ i $\varphi(\frac{l}{2})$ przy statycznym działaniu obciążeń o wielkościach wyżej wymienionych amplitud.

Przeprowadzono również obliczenia testujące dla programu wyznaczania funkcji przemieszczeń w przypadku działania na pręt obciążenia o dowolnej zdeterminowanej funkcji czasowej.

Ze względu na ograniczoną objętość pracy wyników testowania nie załączono.

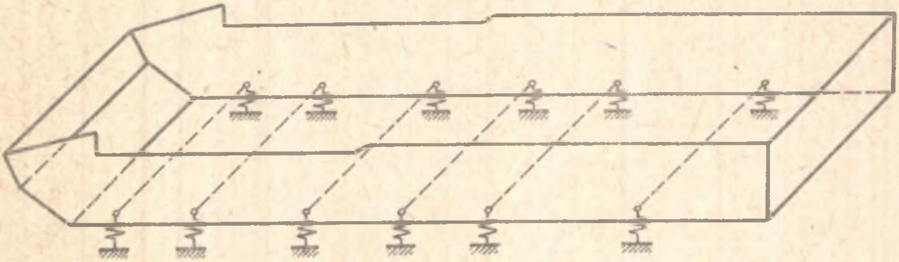
8.3. Obliczenia stereomechaniczne kadłuba pojazdu specjalnego

Przedstawiony w pracy algorytm obliczeń prowadzony był pod kątem możliwości wykorzystania go do obliczeń stereomechanicznych kadłubów pojazdów sepcjalnych.

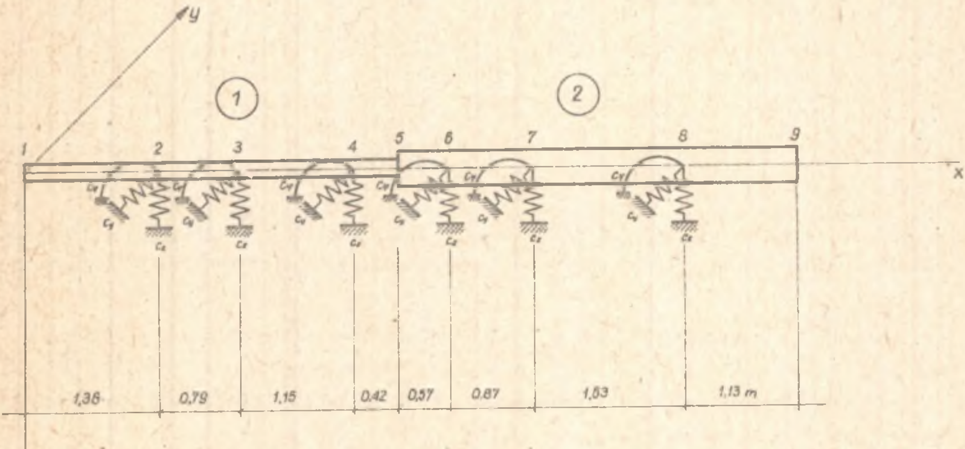
W wielu przypadkach postacie konstrukcyjne takich kadłubów posiadają cechy geometryczne, które stwarzają możliwość wprowadzenia dla nich modelu obliczeniowego w postaci pręta cienkościennego.

Jednym z nich jest aktualnie badany kadłub o schemacie przedstawionym na rys.5.

Do obliczeń przyjęto przedstawiony na rys. 6 model pręta cienkościennego podpartego sprężyście. Podparcie sprężyste charakteryzuje zawieszenie pojazdu.



Rys. 5



Rys. 6

Obliczenia przeprowadzono dla następujących cech konstrukcyjnych kadłuba:

a) Odcinek pręta zawarty pomiędzy przekrojami 1 i 5 (rys. 6)

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \left[\frac{N}{m^2}\right], \quad G = 0,84 \cdot 10^{11} \left[\frac{N}{m^2}\right],$$

$$\frac{\delta}{g} = 7,8 \cdot 10^3 \left[\frac{kg}{m^3}\right], \quad A = 0,46508 \cdot 10^{-1} \left[m^2\right],$$

$$I_y = 0,1761 \cdot 10^{-2} \left[m^4\right], \quad I_z = 0,2851 \cdot 10^{-1} \left[m^4\right],$$

$$I_x = 0{,}1021 \cdot 10^{-4} \; [m^4], \qquad I_\omega = 0{,}5180 \cdot 10^{-2} \; [m^6],$$

$$y_\alpha = 0 \;, \quad z_\alpha = 0{,}3424 \; |m| \quad l = \sum_{i=1}^{4} l = 3{,}72 \; [m],$$

$$y_c = 0{,}92 \cdot 10^6 \left[\frac{N}{m}\right], \quad c_z = 0{,}92 \cdot 10^6 \left[\frac{N}{m}\right], \quad c = 0{,}1933 \left[\frac{Nm}{m}\right].$$

b) O d c i n e k   p r ę t a   z a w a r t y   p o m i ę d z y   p r z e k r o j a m i   5   i   9   (r y s. 6)

$$E = 2{,}1 \cdot 10^{11} \left[\frac{N}{m^2}\right], \qquad G = 0{,}84 \cdot 10^{11} \left[\frac{N}{m^2}\right],$$

$$\frac{\gamma}{g} = 7{,}8 \cdot 10^3 \left[\frac{kg}{m^3}\right], \qquad A = 0{,}4748 \cdot 10^{-1} \; [m^2],$$

$$I_y = 0{,}2202 \cdot 10^{-2} \; [m^4], \qquad I_z = 0{,}3083 \cdot 10^{-1} \; [m^4],$$

$$I_x = 0{,}1070 \cdot 10^{-4} \; [m^4], \qquad I = 0{,}9252 \cdot 10^{-2} \; [m^4],$$

$$y_\alpha = 0, \quad z_\alpha = 0{,}4031 \; [m], \quad l = \sum_{i=5}^{8} l = 4{,}10 \; [m],$$

$$c_y = 0{,}92 \cdot 10^6 \left[\frac{N}{m}\right], \quad c_z = 0{,}92 \cdot 10^6 \left[\frac{N}{m}\right], \quad c_y = 0{,}1933 \cdot 10^7 \left[\frac{Nm}{m}\right].$$

Ponadto w poszczególnych przekrojach pręta rozmieszczono masy skupione o łącznej równej M_s = 20 000 kg. Masami skupionymi zmodelowano poszczególne elementy wyposażenia pojazdu.

Dla wyżej przedstawionych danych i przyjętego modelu obliczeniowego wyznaczono pierwsze dwie częstości kołowe drgań swobodnych, które wynoszą $\omega_1 = 27{,}25 \left[\frac{rd}{s}\right]$ i $\omega_2 = 54{,}25 \left[\frac{rd}{s}\right]$. Częstości te nie zmieniają swoich wartości dla liczby wyrazów potęgowych większej od dziesięciu.

Przeprowadzono również analizę dynamiczną ruchu pojazdu w terenie po podłożu, którego profil przekroju w kierunku ruchu pojazdu określony jest poprzez funkcję $y = 0{,}2 \sin \pi x$.

Przyjęto ponadto, że po obu stronach pojazdu (w tym samym przekroju) pofałdowania są względem siebie przesunięte o połowę "fali".

W takim przypadku wymuszenie kinematyczne stanowiące oddziaływanie podłoża na pojazd ma charakter funkcji harmonicznej. Wymuszenia kinematyczne poszczególnych punktów podparcia sprężystego kadłuba można zastąpić poprzez odpowiednie siły skupione $P_z(t) = P_z \cdot e^{i\omega t}$ i momenty skupione $M(t) = M \cdot e^{i\omega t}$.

Obliczone amplitudy sił i momentów skupionych dla przyjętych parametrów profilu drgań i stałych sprężystego podparcia odpowiednio wynoszą:

$$P_z = 0{,}184 \cdot 10^6 \; [N] \;, \quad M = 0{,}3866 \cdot 10^6 \; [Nm] \,.$$

Częstość kołowa wymuszenia, wyznaczona dla prędkości ruchu pojazdu $V = 10 \left[\frac{m}{s}\right]$ i długości fali drogi 2 [m], wynosi $\omega = 31{,}4 \left[\frac{rd}{s}\right]$.

Ponieważ poszczególne siły wymuszające są względem siebie przesunięte w fazie, zachodzi konieczność prowadzenia obliczeń oddzielnie dla poszczególnych par obciążeń wymuszających.

Ostateczne wartości otrzymuje się w wyniku superpozycji poszczególnych przypadków obciążeń.

Wielkość amplitud przemieszczeń η, ξ, φ w przekrojach 1 - 9 zaznaczonych na rys. 6 dla poszczególnych przypadków obciążenia zestawiono w tablicy 6, a odpowiadające im wielkości sił wewnętrznych w tablicy 7.

Tablica 6

Nr przekroju obciążonego	Nr przekroju	η [m]	ξ [m]	φ [rd]
1	2	3	4	5
	1	0,1433	0,0281	0,4179
	2.	0,1069	0,0211	0,3119
	3	0,0857	0,017	0,2503
	4	0,0549	0,0108	0,1605
2	5	0,0514	0,0085	0,1277
	6	0,334	0,0052	0,0831
	7	0,0060	0,0002	0,0149
	8	- 0,0422	- 0,0089	- 0,1050
	9	- 0,0779	- 0,0157	- 0,1936
	1	0,1095	0,0223	0,3198
	2	0,0846	0,0170	0,2472
	3	0,0702	0,0139	0,2050
	4	0,0492	0,0095	0,1437
3	5	0,0489	0,0079	0,1213
	6	0,0366	0,0058	0,0909
	7	0,0179	0,0024	0,0445
	8	- 0,0149	- 0,0035	- 0,0371
	9	- 0,0392	- 0,0079	- 0,0973
	1	0,0602	0,0129	0,1766
	2	0,0523	0,0108	0,1529
	3	0,0477	0,0095	0,1392
	4	0,0409	0,0078	0,1193
4	5	0,0453	0,0073	0,1121
	6	0,0413	0,0067	0,1024
	7	0,0353	0,0058	0,0876
	8	0,0248	0,0043	0,0617
	9	0,0170	0,0033	0,0426

c.d. tablicy 6

1	2	3	4	5
6	1	0,0179	0,0042	0,0528
	2	0,0245	0,0052	0,0717
	3	0,0283	0,0057	0,0826
	4	0,0338	0,0067	0,0986
	5	0,0422	0,0070	0,1045
	6	0,0454	0,0076	0,1125
	7	0,0504	0,0087	0,1249
	8	0,0591	0,0108	0,1467
	9	0,0655	0,0125	0,1628
7	1	- 0,0193	- 0,0039	- 0,0561
	2	0,0000	0,0001	0,0002
	3	0,0113	0,0024	0,0329
	4	0,0276	0,0058	0,0805
	5	0,0395	0,0070	0,0979
	6	0,0490	0,0087	0,1216
	7	0,0636	0,0114	0,1576
	8	0,0891	0,0164	0,2213
	9	0,1080	0,0201	0,2683
8	1	- 0,0847	- 0,0185	- 0,2480
	2	- 0,0429	- 0,0091	- 0,1256
	3	- 0,0187	- 0,0036	- 0,0546
	4	0,0166	0,0043	0,0488
	5	0,0348	0,0071	0,0865
	6	0,0554	0,0108	0,1376
	7	0,0868	0,0163	0,2155
	8	0,1422	0,0257	0,3524
	9	0,1830	0,0325	0,4535

Zestawione w tablicy 7 wyniki uzyskano przy założeniu 80 wyrazów szeregów potęgowych.

Tablica 7

Nr przekroju obciążonego	Nr przekroju	Q_y [N]	M_y [Nm]	Q_z [N]	M_z [Nm]	N_x [N]	M [Nm]	B [Nm²]
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	0	0	0	0	-66796,1[illegible]	0	0
	2	+303,90	-1598,32	+97407,95	+ 8,74	-66787,56	-199828,86	-15467,63
	3	-301,63	74923,50	+28394, 81	+249,54	-66830,40	-57153, 01	+108781,27
	4	- 44,36	106949,13	-18157,67	+594,39	-66984,62	+37539,98	+1[illegible],60
	5	-39, 15	80137,82	-1[illegible]906,37	+566,49	67044,60	[illegible]495,40	+101[illegible],42
	6	+180,99	72741,61	-[illegible]9825,18	+588,11	67087,44	+35679,84	+ 93613,42
	7	+277,50	46707,03	-30361,40	+429,57	-67138,84	+40748,99	+ 64299,85
	8	+ 10,35	614,35	- 962,99	+ 6,94	-67181,68	+5752 ,29	+ 3[illegible]7,43
	9	0	0	0	0	-67181,68	0	0
3	1	0	0	0	0	-45770,25	0	0
	2	+ 32,98	-1277,30	-69672,20	- 1,67	-45770,25	[illegible]040,80	- 1[illegible]31,66
	3	- 8,14	-56654,81	+57801,30	-27,72	-45718,84	-121[illegible],60	- 132167,70
	4	- 35,38	9245,32	+18749,37	-17,84	-45667,44	- 37191,88	+ [illegible]747,78
	5	- 27,78	1364,08	+14799,80	,84	-[illegible]667,44	- 28282,80	+ 99[illegible]1,[illegible]5
	6	- 11,43	22048,51	- 3938,48	+10,95	-45676,00	+ 340,37	+ [illegible]
	7	+ 13,05	18490,57	-11920,37	+20,77	-45693,14	+ 14881,10	+ 246[illegible]7 ,79
	8	+ 8,98	312,90	- 472,99	+ 0,66	-45710,29	+ 2807,61	+ 1890,59
	9	0	0	0	0	-45710,[illegible]	0	0
5	1	0	0	0	0	-14899,75	0	0
	2	+396,59	- 776,23	-44229,28	- 8,80	-14891,18	+ 91266,42	- 7039,15
	3	+307,67	-35945,53	-82911,40	-251,75	-14[illegible]5,48	+170567,04	-[illegible],66
	4	+ 26,34	-131589,34	+69006,55	-603,49	-14702,68	-1459[illegible],76	-[illegible]1305,08
	5	+ 22,39	[illegible]171,78	+55027,73	-567,81	-14617,00	- 83281,97	-1[illegible]465,30
	6	-192,06	[illegible]35,86	+33382,75	-579,85	-14574,16	- 51003,09	- 76463,[illegible]1
	7	-266,42	- 21988,90	+14522,44	-411,79	-14539,89	-22735,02	- 330[illegible],12
	8	- 9,75	- 177,45	+ 227,29	- 6,34	-14514,19	- 1472,88	- 735,89
	9	0	0	0	0	14514,19	0	0
6	1	0	0	0	0	11875,24	0	0
	2	+274,32	- 312,38	+21175,32	- 7,36	11875,24	+42456,83	- [illegible]7,11
	3	+311,80	-17162,88	+44488,14	-224,87	11883,81	[illegible]384,5[illegible]	- 37398,56
	4	+ 84,95	-68636,74	-71706,16	-582,00	11892,38	+147070,56	-143045,70
	5	+ 76,75	-79028,40	-57505,46	-570,81	[illegible]78,06	+85794, 79	-114871,68
	6	-172,12	-111867,52	-64864,67	-613,67	12029,47	-95323,91	[illegible]257,80
	7	-298,51	-55619,42	-36507,64	-462,62	12098,01	-55075,31	- 82672,80
	8	- 11,79	-471,14	-803,97	-7,78	12175,12	[illegible],65	[illegible]990,36
	9	0	0	0	0	12226,53	0	0

c.d. tablicy 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	1	0	0	0	0	+35480,09	0	0
	2	+112,25	+111,79	-245,96	- 2,69	+35480,09	-478,41	+1068,54
	3	+146,14	-112,79	-9914 ,61	-91, 78	+35480,09	+16035,72	+1179,17
	4	+ 72,26	-11715,58	-33397,54	-259 ,54	+35433,66	+64756,75	-21386,14
	5	+36,09	-20620,61	-26874,09	-267,92	+35497,22	+44164,63	-27412,56
	6	-56,69	-36015,80	-55027,73	-305,22	+35514,[illegible]	+82270,31	-55095,51
	7	-163,62	-34131,73	+55138,67	-255,05	+35582,90	-35466,89	-126134,80
	8	- 7,54	- 765,14	+ 1285,09	- 5,08	+35660,02	- 8373,88	+ 0,37
	9	0	0	0	0	+[illegible]0,02	0	0
8	1	0	0	0	0	+77077,73	0	0
	2	-334,61	+877,56	+37387,79	+ 9,16	+77077,73	-76069,35	+ 7753,33
	3	-363,98	+30550,00	+52032,27	+274,44	+77052,02	-107539,90	+69097,05
	4	- 93,57	+90381,56	+34710,37	+696,89	+76932,07	-79964,18	+192758,16
	5	-34,41	+63909,89	+27602,61	+680,13	+76663,53	-29044,26	+136511,14
	6	+200,56	+99552,35	-7355,52	+727,43	+76303,55	+13999,99	+142610,53
	7	+555,75	+92822,31	-60500,92	+551,47	+76709,30	+83162,31	+128469,13
	8	+ 14,12	- 1240,71	+ 2070,57	+ 9,28	+76640,76	-14032,62	+ 3436,98
	9	0	0	0	0	+76640,76	0	0

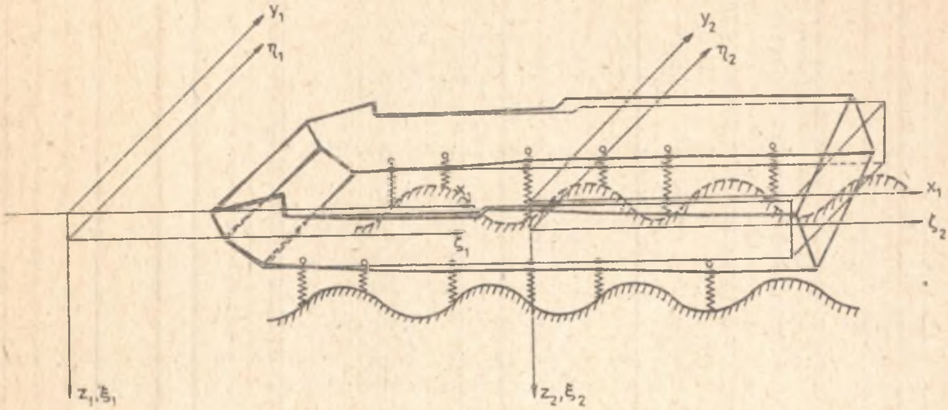
Na podstawie zasady superpozycji (układ liniowo-sprężysty) i rozważanych przypadków obciążenia określono rzeczywiste wielkości przemieszczeń (tablica 8) w poszczególnych przekrojach kadłuba pojazdu znajdującego się w ruchu po wyżej określonym terenie w chwili, gdy pojazd znajduje się w położeniu jak na rys. 7. Na rysunku tym przedstawiono graficznie postać odkształconą kadłuba.

Tablica 8

Numer przekroju	η [m]	ξ [m]	φ [rd]
1	- 0,0009	- 0,0013	- 0,0037
2	0,0223	0,0038	0,1040
3	0,0355	0,0073	0,2768
4	0,0552	0,012	0,1616
5	0,0734	0,0136	0,1824
6	0,0848	0,0155	0,2107
7	0,1022	0,0186	0,2537
8	0,1156	0,0234	0,3295
9	0,1535	0,0268	0,3853

W celu zbadania sztywności statycznej na skręcanie obciążono kadłub w przekroju 2 momentem $M = 0{,}3866 \cdot 10^6$ [Nm]. Wyniki obliczeń zestawiono w tablicy 9.

Na zakończenie należy podkreślić, że w rozpatrywanym przypadku osie pręta dla obu odcinków nie leżą na jednej prostej, lecz główne centralne osie bezwładności przekrojów są do siebie równoległe. Ponadto siła osiowa P = 0.



Rys. 7

W takim przypadku warunki $(2,23)_1$, $(2,23)_2$, $(2.23)_3$, $(2.23)_4$ i trzeci warunek wyrażenia (4.48) przyjmą postać

$$\eta_p = \eta_l - (z_{op} + z_{\alpha p} - z_{\alpha l})\,\varphi_l\,, \tag{8.1$_1$}$$

$$\xi_p = \xi_l + (y_{op} + y_{\alpha p} - y_{\alpha l})\,\varphi_l\,, \tag{8.1$_2$}$$

$$\eta'_p = \eta'_l - (z_{op} + z_{\alpha p} - z_{\alpha l})\,\varphi'_l\,, \tag{8.1$_3$}$$

$$\xi'_p = \xi'_l + (y_{op} + y_{\alpha p} - y_{\alpha l})\,\varphi'_l\,, \tag{8.1$_4$}$$

$$\varphi'''_p = \frac{J_{zl}}{J_{\omega p}}(z_{op} + z_{\alpha p} - z_{\alpha l})\,\eta'''_l - \frac{J_{yl}}{J_{\omega p}}(y_{op} + y_{\alpha p} - y_{\alpha l})\,\xi'''_l + \frac{J_\zeta\omega^2 - c_\varphi}{}\,\varphi_l + \frac{GJ_{xp}\cdot w_1 - GJ_{xl}}{EJ\omega p}\,\varphi'_l + \frac{M}{EJ\omega p}\,, \tag{8.1$_5$}$$

gdzie:

y_{op}, z_{op} - współrzędne środka ciężkości przekroju prawej części pręta w układzie x_1, y_1 określonym dla lewej części.

Pozostałe elementy macierzy przekroju są takie same jak dla pręta z warunkami pośrednimi.

Jeżeli główne centralne osie bezwładności przekroju nie są dla obu części pręta równoległe, wówczas należy wprowadzić wzory transformacyjne.

Tablica 9

Nr przekroju obciążonego		Numer przekroju								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	η	-0,0445	-0,0367	-0,0257	-0,0157	-0,0142	-0,0084	-0,0005	0,0161	0,0277
	η'	+0,0087	0,0087	+0,0087	0,0087	0,0102	0,0102	0,0102	0,0102	0,0102
	η''	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	η'''	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	φ	-0,1307	-0,0956	-0,0753	-0,0458	-0,0351	-0,9207	+0,0013	0,0399	0,0684
	φ'	0,0257	0,0257	0,0257	0,0255	0,0254	0,0253	0,0252	0,0252	0,0252
	φ''	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0002	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	φ'''	-0,0000	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

9. UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI

W pracy sformułowano zagadnienia dotyczące dynamiki prętów cienkościennych, ze szczególnym uwzględnieniem zastosowań do obliczeń stereomechanicznych kadłubów pojazdów specjalnych.

Opracowane algorytmy stanowią oryginalne rozwiązania zagadnień drgań swobodnych, drgań wymuszonych i stateczności dynamicznej prętów cienkościennych o profilu otwartym i zmiennym przekroju. Zagadnienia analizowane w ujęciu liniowo-sprężystym przy założeniach Własowa [118].

W rozwiązaniu tych zagadnień dla prętów o stałym przekroju zastosowano rozwinięcia funkcji przemieszczeń $\eta(x)$, $\xi(x)$, $\varphi(x)$ w szeregi potęgowe.

W przypadku prętów o zmiennym przekroju w rozwiązaniu zastosowano metodę macierzy przeniesienia, w której macierz przęsła została określona w oparciu o rozwiązanie jak dla pręta o stałym przekroju.

Ponieważ algorytmy rozwiązań budowane były pod kątem możliwości wykorzystania ich w obliczeniach numerycznych zagadnień stereomechaniki kadłubów pojazdów specjalnych o postaci przedstawionej na rys. 5, dlatego w równaniach uwzględniono główne przypadki, które są modelami kadłubów obecnie projektowanych. Algorytmy rozwiązań i stosowane metody obliczeń dobierano w aspekcie możliwości dogodnego programowania ich na elektroniczną maszynę cyfrową z uwzględnieniem pojemności pamięci i czasu pracy aktualnie dostępnych w kraju maszyn cyfrowych.

Z tych względów w rozwiązaniach zastosowano metodę macierzy przeniesienia, w której, jak wiadomo [85], nie występują układy równań algebraicznych o dużej liczbie niewiadomych. Umożliwia to wykonanie obliczeń numerycznych na maszynach cyfrowych o stosunkowo niedużej pamięci operacyjnej, nie ograniczając praktycznie liczby przęseł pręta.

Należy ponadto podkreślić, że aczkolwiek rozwiązania są pozornie skomplikowane, to jednak wiele algorytmów jest powtarzalnych. Ułatwia to znacznie proces programowania na EMC. Pewne udogodnienia w tym zakresie uzyskano również w wyniku zastosowania rozwinięcia funkcji przemieszczeń $\eta(x)$, $\xi(x)$, $\varphi(x)$ w szeregi potęgowe.

Biorąc pod uwagę, że szeregi te są na ogół (por.np. [62]) szybko zbieżne, skraca to również znacznie czas pracy maszyny cyfrowej.

Zbieżność szeregów potęgowych dla rozwiązanego przypadku pręta ilustrują tablice 3, 4 i 5. W tablicach tych podano wielkości dwóch pierwszych częstości drgań swobodnych i wielkości amplitud przemieszczeń w środku rozpiętości pręta, wywołanych obciążeniem harmonicznym dla 5, 8, 10, 20 i 40 wyrazów szeregów potęgowych.

Uzyskane w pracy wyniki wskazują, że częstości drgań swobodnych i amplitud przemieszczeń nie zmieniają praktycznie swoich wartości dla liczby wyrazów szeregu większej od 10. Zwiększenie liczby wyrazów szeregów tylko nieznacznie wydłuża czas pracy maszyny cyfrowej.

Przeprowadzone obliczenia numeryczne dla różnych długości prętów wykazują, że zbieżność maleje wraz ze wzrostem długości pręta. W takich przypadkach poprawę zbieżności można uzyskać w wyniku podziału pręta na większą liczbę odcinków.

Zamieszczone w pracy algorytmy rozwiązań wykorzystano w obliczeniach stereomechanicznych kadłubów pojazdów specjalnych, lecz ich zastosowanie może być znacznie poszerzone. Aktualnie przygotowuje się algorytmy rozwiązań dla pręta cienkościennego o osi krzywoliniowej. W takim przypadku należy w macierzy przekroju wprowadzić wzory transformacyjne.

Rozwiązania ww. zagadnień zostały zaprogramowane na maszynę cyfrową w ten sposób, aby istniała możliwość uruchomienia dlaszych programów, które można by uzyskać w wyniku kompilacji odpowiednich bloków programów istniejących.

Przedstawione opracowanie stanowi próbę uzupełnienia informacji w tym zakresie wiedzy i może być uważane jako podstawa teoretyczna do dalszych badań w zakresie zastosowań modelu pręta cienkościennego. Autor liczy się również z koniecznością rozszerzenia opracowania do zagadnień stochastycznych i nieliniowych oraz zagadnień złożonych układów o zmiennej strukturze [115].

LITERATURA

[1] BECKKER G.: Ein Betrag zur Statischen Berechnung beliegig gelagerter ebener gekrümmter Stäbe mit einfach symetrischen dunwandigen offenen Profilen von im Stabachse veräöderlichen Querschnit unter Berucksichtigung der Wolbkrafttorsion. Der Stahlabau 1965, nr 11-12.

[2] de BEER R.: Der Einfluss der Querschnittsverformung auf die Eigenschwingungen gerader dünnwandiger Stäbe. Z.angew. Math. und Mech 1970.

[3] de BEER R.: Optimierung von Stabschwingern mit dünnwandigem Querschnitt. Der Stahlbau 1972. 41 nr 8.

[4] BEJLIN E.A., KILIMOV V.I.: Issledovanie svobodnych izgibnokrutilnych kolebanij tonkostennych steržnej zagružennych poperčnoj parametričeskoj nagruzkoj. Sb.tr.Leningr.inž.-stroit. in-t, 1974, nr 105.

[5] BHATTACHARYA B.: Coupled vibrations of thin-walled open section curved beams. J. Struct.Eng. 1975, 3 nr 1.

[6] BISWAS S.K.: Note on the torsional vibration of a thin beam of varying cross-section. Pure and Appl. Geophys 1970.

[7] BLEICH F., BLEICH H.: Bending torsion and buckling of bars composed of thin walls. Prelim.Publ.2d Cang.Intern.Assoc. Bridge and Structural Eng. English. edition, Berlin 1936.

[8] BOGUSZ W.: Stateczność techniczna. PWN, Warszawa 1972.

[9] BOLOTIN V.V.: Dinamičeskaja ustojčivost'uprugich sistem. Gos.iz-vo tech-teor. it. Moskva 1956.

[10] BULGAKOV A.J.: O kolebacjonnom parametričeskom rezonanse nelinejno uprugich tonkostennych steržnej. Nauč.tr. Omsk. in-t inż. ž.-d. trans. 1072, 140.

[11] BULGAKOV A.J.: O dinamičeskoj ustojčivosti nelinejno uprugich tonkostennych steržnej pri značitel'nom roschoždenii parcialnych častot. Nauč. tr.Omsk. in-t.inž. ž.-d. transp. 1974, 165.

[12] COLLATZ L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akademische Verlagsgesellschaft Geest Portig K.-G. Leipzig 1963.

[13] CYWIŃSKI Z.: Statyka i dynamika skręcanego cienkościennego dwuteownika o zmiennym bisymetrycznym przekroju. Rozprawy Inżynierskie. T.2 - 1969.

[14] ČETAEV N.G.: Ustojčivost dviženija, Raboty po analitičeskoj mechanike. Iz-vo An SSSR, Moskva 1962.

[15] DEMIDOVIČ B.P., MARON J.A: Osnovy vyčislitel'noj matematiki. Gos.Izdat.Fiz.-Mat. Lit. Moskva 1960.

[16] DEMIDOWICZ B.P: Matematyczna teoria stabilności. PWN, Warszawa 1972.

[17] DŻYGADŁO Z., KALISKI S., SOLARZ L., WŁODARCZYK E.: Drgania i fale w ciałach stałych. PWN, Warszawa 1966.

[18] FALCO M., GASPARETTO M.: Flexural-torsional vibrations of thin-walled beams. Mechanica 1973, 8, nr 3.

[19] FALK S.: Biegen, Knicken und Schwingen des mehrfeldrigen geraden Balkens. Abhandl, d. Braunschweig. Wiss. Gesellsch nr 7, 1955.

[20] FICHTENHOLTZ G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1966.

[21] FUHRKE H.: Bestimmung von Balkenschwingungen mit hilfe des Matrizenkalkuls. Ing-Arch. 5,23, 1955.

[22] FUKASOWA Y.: Analysis of thin-walled curved beams with variable cross section taking into account discontinuity of shear center line. Proc. Sympos. Thin-Walled Struct and Space Struct 1967, Tokyo 1969.

[23] GALERKIN W.G.: Sobranie sočinenij. Moskva 1958.

[24] GHOBARAH A.A.: Dynamic stability of monosymmetrical thin-walled structures.Trans. Asme (1972) E 39, nr 4.

[25] GUTER R.S., KUDRIAWCEW L.D., LEWITAN W.M.: Elementy teorii funkcji. PWN, Warszawa 1967.

[26] GÜMBEL E.: Verdrehungsschwingungen eins Stabes mit ferster Drehachse und Beliebiger zur Drehachse symetrischer Massenverteilung unter dem Einflus Belibieger harmonischer Kräfte, Z.VDI 56, 1912.

[27] HAMAYOSHI F.: On torsion of I-beam with aweb of vabiable height. Mem.Fac.Eng.Hokkaido Univ. 2,11, 1961.

[28] HELLWIG Z.: Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. PWN, Warszawa 1970.

[29] HOLZER H.: Die Berechnung der Drehschwingungen. Berlin 1921.

[30] IVOVIC V.A.: Perechodnye matricy v dinamike uprugich sistem, Kiev 1969.

[31] KAČAROV K.A., PILJUTIK A.G.: Vvedenie v techničeskuju teoriju ustojčivosti dviženija. Gifml, Moskva 1962.

[32] KALININ V.S., LEJZEROVIČ G.S., SIVERS M.N., SIMKEVIČ A.P.: IX V ses.Konf.po teorii oboleček i plastin. Annotacii dokl.1973, 35.

[33] KAMESWARA R.C.: nonlinear torsinal vibrations of thin-walled beams of open section. Trans. ASME 1975, E 42, nr 1.

[34] KAMESWARA R.C.: Torsional vibrations and stability of thin-walled beams on continuous elastic foundation. AIAA Journal 1975, 13, nr 2.

[35] KANTOROWIČ L.V., KRYLOV V.J.: Približennye metody vysšego analiza. Gos.Izdat.Fiz. Mat. Lit. Moskva 1962.

[36] KAPPUS R.: Drillknicken zentrisch gedruckter Stäbe mit offenem Profil in elastischen Bereich. Luftfahrt - Forschung 1937.

[37] KARAMUK E.: Zur Berechnung dünnwandliger Stäbe mit variablem, offenem Querschnitt. Diss. Dokt.Techn.Wiss. Eidgenoss. Techn. Hochschulle, Zürich 1968.

[38] KLIMOV V.J.: Nekotorye zadači svobodnych kolebanij zagružennych tonkostennych steržnej s prjamolinejnoj i krivolinejnoj osju. Sb.tr.Leningr.inž.- stroit.in-ta 1975, vyp. 7.

[39] KODDINGTON E.A., LEVINSON N.: Teorija obyknovennych differencialnych uravnenij. IL 1958.

[40] KOLOUSEK V.: Dinamika streitelnych konstrukcji. Izdat. Lit. po streit. Moskva 1965.

[41] KOZŁOWSKI T., PIECHNIK S., STOJEK Z.: Zastosowania rachunku wariacyjnego do zagadnień mechaniki budowli. Arkady, Warszawa 1967.

[42] KRESTOWSKI S.S.: Približennyj sposob rasčota tonkostennoj balki peremennogo po dlinie sečenija na kručenie. Trudy Kazans. aviac. inst. - 1969.

[43] KRUSZEWSKI J., GAWROŃSKI W., WITTBRODT E., NAJBAR F., GRABOWSKI S.: Metoda sztywnych elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1975.

[44] KRZYŻAŃSKI M.: Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego. Cz.1.i 2, PWN, Warszawa 1962.

[45] LAKUTKIN J.V.: Dinamičeskaja ustojčivost'tonkostnnogo predvaritel'no-naprežennogo steržnja s nesimmetričnym otkrytym profilem. Tr. prepodavat i slušatelej Tul'sk. gor. in-ta nauc.-techn. znanij. 1973. wyp. 23.

[46] LEE L.H.N.: Non-uniform torsion of plate girders. Proc.Asce, 449, 80-1954-1-28.

[47] LEJA F.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1963.

[48] LI V.: K voprosu o predele primenimosti teorii kolebanij tonkostennych steržnej: Probl. pročnosti 1974 nr 6.

[49] LIBERZON A.S.: Kolebanija zakručennych tonkostennych steržnej iz kompozicjonnych materialov. V: Sb. Pročnost'konstrukcij letatel'n.apparatov. Vyp.3 Charkov 1976.

[50] LJAPUNOV A.M.: Obščaja zadača ob ustojčivosti dviženija. Gostechzdat. Moskva 1950.

[51] LUKIANOV F.P.: Deformacjonnyj rasčet i ustojčivost'ploskoj formy izgiba stupenčatych tonkostennych steržnej. Trudy Novočersk. Politechn.Instit. - 1969.

[52] LUNDQUIST E.E.: On the strength of columns that fail by twisting. Jour.Aeronaut Sci. t.4 - 1937.

[53] LUNDQUIST E.E., FLIGG C.M.: Theory for primary failure of streight centrally loaded columns, MACA Techn. Rept. 1937.

[54] MAKSIMENKO V.J.: Stesnennoje kručenie otkrytych tonkostennych steržnej peremennogo sečenija. Trudy Novočzersk. Politechn. Instit. 1969.

[55] MAMAEVA L.P.V.: Novaja forma uravnenij ustojčivosti tonkostennych steržnej otkrytoge profila. Materiały naučno-techn. Konferencji, vyp. 3. Zaporeže - 1968.

[56] MARGUERRE K.: Vibration and stability problems of beams by matrices. J.Math. Phys., 1, 25, 1965.

[57] MATEJA O.: Drgania swobodne masztów i wysmukłych budowli wieżowych. Arch.Inż.4, 14, (1968).

[58] MATEJA O.: Niesymetryczne drgania swobodne kolistej powłoki walcowej o zmiennej grubości. Arch.Inż. ląd. 2,16, 1970.

[59] MATEJA O.: Zastosowanie macierzy przeniesienia do analizy dynamicznej pręta ściskanego zanurzonego w ośrodku sprężystym. Inż. i Bud. 2, 1970.

[60] MATEJA O.: Z zagadnień wartości własnych płyt pierścieniowych. Rozpr. Inż. 4,18 1970.

[61] MATEJA O.: Numeryczna analiza drgań wysokich kominów obciążonych porywami wiatru. Arch. Inż. Ląd. 4,17, 1971.

[62] MATEJA O.: Problemy statyki i dynamiki płyt pierścieniowych oraz powłok obrotowych. ZN WSI, Opole nr 4, 1972.

[63] MATEJA O.: Zastosowanie maszyn cyfrowych do analizy statycznej powłok obrotowych. Arch. Inż.Ląd. 3,18,1972.

[64] MAZITOV C.S., DUŠANBE S.: Metody rasceta na pročnost' nesuščich konstrukcij iz tonkostennych steržnej pri statičeskich i dinamičeskich nagruzkach. Deniš 1970.

[65] MEI Ch.: Coupled vibrations of thin-walled beams of open section using the finite element method. Int. J.Mech.Sci 1970, 12 nr 10.

[66] MERKIN A.R.: Vvedenie v teoriju ustojčivosti dviženija. Nauka, Moskava 1976.

[67] MICHLIN S.G., SMOLICKIEJ Ch.L.: Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych, PWN, Warszawa 1972.

[68] MEDVEDEV V.A.: O schodimosti metoda Bubnova - Galerkina, PMM, 6, 1963.

[69] MESČERIAKOV V.B.: K teorii ustojčivosti tonkostennych steržnej otkrytogo profilu c učetom sdvigov. Trudy Moskovsk. Instit. Žel. Transporta 1968.

[70] MIHAITA G., TIGAE I.: Cercetarea printr-un procedeu matricial a stabilitătii dinamice a barelor cu peretl subtiri si sectiune deschisă solicitate axial prin forte periodice cu variatii in trepte "Lucr sti Inst. mine Petrosani" 1971.Ser. 4,8, part. 2.

[71] MOSTOWSKI A., STARK M.: Elementy algebry wyższej. PWN, Warszawa 1963.

[72] MOVCAN A.A.: O priamom metode Ljapunova v zadačach ustojčivosti uprugich sistem, PMM t.3, 1959, wyp. 3.

[73] MULIN S.M.: Issledovanie prostranstvennoj ustojčivosti tonkostennych steržnej pri vnecentrennom szati s dvuchosnym ekscentricetietom. Naučn. Trudy-Omskij

Inst.Inż. Transp. 1969.

[74] NEMYCKIJ V.V., STEPANOV V.V.: Kačestvennaja teorija differencialnych uravnenij. Gostechizdat, Moskwa 1949.

[75] NOWACKI W.: Dynamika budowli. Arkady, Warszawa 1961.

[76] OSTENFELD A.: Politechnisk Laereanstatts Laboratorium for Bygningsstatik. Meddellse, nr 5, Kopenhagen 1931.

[77] PEKOZ T., BEKIR :Torsional-flexural buckling of thin - walled open sections under eccentric axial loading. Doct.diss. Cornell Univ. 1967.

[78] PESTEL E.: Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung freier und erzwungener Schwingungen von Stubwerken. Abhandl. d. Braunschweig Wiss. Gesellsch. 6, 1954.

[79] POŁOŻY G.N., PACHARIEWA N.A., STIEPANIENKO I.Z., BONDARIENKO P.S., WIELIKOIWANIENKO I.M.: Metody przybliżonych obliczeń. WNT, Warszawa 1966.

[80] PODOLSKIJ G.S.: Primenenie variacionnogo metoda Budnova - Galerkina k deformacionnomu rasčotu v necentrenno sžatich tonkostennych steržnej. Sb. trudov Mosk. inž. stroit. instit. 1965.

[81] PONOMARIEW K.K.: Obliczenia belek ciągłych metodą macierzową. Inż. i Bud. 1,12, 1960.

[82] PONOMARIEW K.K.: Ogólne zasady mechanicznej interpretacji macierzowej metody obliczenia systemów prętowych. Rozpr.Inż. 1,12, 1964.

[83] POPESCU N.D.: Dynamische Stabilität dünnwandiger Stäbe mit offener Querschnittskontur unter der Wirkung dreieckförmiger Impulse. Schweis. und Schneid 1973, 25, nr 1.

[84] RAKOWSKI G.: Zastosowanie macierzy przeniesienia do analizy statycznej łuków. Arch.Inż.Ląd. 2,13, 1964.

[85] RAKOWSKI G.: Zastosowanie macierzy do analizy statycznej i dynamicznej prętów prostych. Biblioteka Inż. i Bud. 17, Arkady, Warszawa 1968.

[86] RAKOWSKI G.: Macierzowa analiza stateczności pręta prostego na podłożu odkształconym. Arch.Inż. Ląd. 4, 15, 1969.

[87] RAKOWSKI G.: Macierzowa analiza statyczna płaskich rusztów kołowych. Rozpr.Inż. 2, 18, 1970.

[88] RALSTON A.: Wstęp do analizy numerycznej. PWN, Warszawa 1971.

[89] RASBAND S.N.: Resonant vibrations of free cylinders and disks. J. Acoust. Soc. Amer. 1975, 57, nr 4.

[90] ROMANOWSKI P.I.: Szeregi Furiera, teoria pola, funkcje analityczne i specjalne, przekształcenie Laplace'a. PWN, Warszawa 1968.

[91] La SALLE J., LEFSCHETZ S.: Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośredniej. PWN, Warszawa 1966.

[92] SCHNELL W.: Berechnung der Stabilität mehrfeldriger Stäbe mit Hilfe von Matrizen ZAMM 6,7,35, 1955.

[93] SKALMIERSKI B., TYLIKOWSKI A.: Stabilność w mechanice. PTMTS, Gliwice 1972.

[94] SMIRNOW W.I.: Matematyka wyższa, Tom 2. PWN, Warszawa 1960.

[95] SOLECKI R., SZYMKIEWICZ J.: Układy prętowe i powierzchniowe obliczenia dynamiczne. Arkady, Warszawa 1964.

[96] SURYANARAYAN S., KRISHNA W.A.V.: Vibration of non-uniform thin-walled beams of arbitrary shape. Z.angew. Math. und Mech. 1975, 55, nr 3.

[97] STIEPANOW W.W.: Równania różniczkowe. PWN. Warszawa 1964.

[98] SZMELTER J.: The energy method of networks of arbitrary shape in problems of the theory of elasticity, Proceedings of an IUTAM Symposium Held in Warsaw 1958.

[99] SZMELTER J., DACKO M., DOBROCIŃSKI S., WIECZOREK M.: Programy metody elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1973.

[100] ŚWITOŃSKI E.: Stateczność prętów cienkościennych o profilu otwartym i stałym przekroju. ZN. Pol.Śl. Mechanika 40, 1970.

[101] ŚWITOŃSKI E.: Stateczność prętów cienkościennych. Rozprawa doktorska. Gliwice 1970.

[102] ŚWITOŃSKI E.: Stateczność prętów cienkościennych o profilu otwartym i zmiennym przekroju. Materiały II Sympozjonu nt. Stateczność konstrukcji. Łódź 1971.

[103] ŚWITOŃSKI E.: Zastosowanie metody macierzy przeniesienia do analizy dynamicznej prętów cienkościennych. Mech.Teoret. i Stos. 4,12, 1974.

[104] ŚWITOŃSKI E.: Problemy dynamiki ustrojów cienkościennych.w zastosowaniu do kadłuba pojazdu specjalnego. Biul.Inf.Instytutu Wojsk Panc. (praca w druku).

[105] TARGOFF W.F.: The associated matrices in structural analysis. J. Aero. Sci.10,14 1974.

[106] TER-MKRTIČJAN A.N., JURČENKO D.A.: Podemno-transp.mašiny. Vyp.1, Tula 1973.

[107] THOMSON W.T.: Matrix solution for the vibration of nonuniform beams. J.appl.Mech. 3, 17, 1950.

[108] TOLLE M.: Reglung der Kraftmaschinen. Berlin 1921.

[109] WAGNER H.: Verdrehung und Knickung Von offenen Profilen, 25 Anniversary Publikation Technische Hochschule Danzig 1904-1929.

[110] WAGNER H.: Die Stabilitätsberechnung abgesetzter Knickstäbe mit Hilfe der Laplace - Transformation und der Metrizerechnung. Z.VDI 1957.

[111] WAGNER H.: Die Stabilität der axial gedruckten Kreiszylinderschale mit veränderlicher Wandstärke. Österr. Ing-Arch.4, 1960.

[112] WEKEZER J.: Dynamika prętów cienkościennych o zmiennych przekrojach otwartych. Rozpr. Inż. 1976, 24, nr 1.

[113] WEKEZER J.: Statyka prętów cienkościennych o zmiennych przekrojach otwartych. Rozpr.Inż. 1976, 24, Nr 1.

[114] WIERZCHOWSKI K.: Rozwiązania równań n-tego rzędu występujących w mechanice. Rozpr. Inż. 4,20, 1972.

[115] WIĘCKOWSKI J.: Wstęp do teorii zginania belek o zmiennej strukturze. Prace IMP z. 65, 1974.

[116] VINOKUROV L.P., OVČARENKO V.A.: Rasčët tonkostennych sterżnej peremennogo sečenija otkrytego profila. Vyss. Učebn. Zaved. Stoit. i Archit. 1969.

[117] VIŚNIAKOV G.F.: Ustojčivost' centralno sżatych, nerazreznych tokostennych sterżnej otkrytego profila postojannogo paperecnogo secenija. Trudy Taskensk. Instit. Inz. Doroz. Transp. 1967 vyp. 38.

[118] VLASOV V.Z.: Tonkostennyje uprugie sterżni. Gos.Izdat. Fiz.Mat. Lit. Moskva 1959.

[119] WOJNAROWSKI J.: Ustojcivost 'vraščajuščichsja sterżnej peremennoj dliny. Zag. Drgań Nieliniowych IPPT PAN, Warszawa 1973, nr 14.

[120] VORONCOV T.V., CHOPERSKIJ J.V.: Sovmestnye kolebanija tonkostennych sterżnej soedinennych żestkimi diskami. Stroit. mech. i rasčet sooruż. 1975, nr 3.

[121] WÜNDERLICH W.: Der Kühlturm als biegesteife Schale, Naturzugkühltürme - Festigkeitsberechnung und Konstruktion, Wulkan Verlag, Essen 1968.

[122] ZDOBUK N.J., BALINSKIJ A., ZORIJ L.M.: Vlijanie konstrukcjonnych parametrov na castoty kolebanij tonkostennych sterznej. Fiz.-Chim.-Tech. Materialov 1974, 10, nr 6.

[123] ZIENKIEWICZ O.C.: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1972.

[124] ŻYCZKOWSKI M.: O tak zwanej aproksymacji jednokrotnie optymalnej i niektórych jej zastosowaniach w mechanice. Rozpr. Inż. 3, 11, 1963.

PROBLEMY DYNAMIKI PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH

S t r e s z c z e n i e

W pracy przedstawiono rozwiązanie zagadnienia drgań swobodnych, drgań wymuszonych i stateczności dynamicznej prętów cienkościennych o profilu otwartym.

Zagadnienia te dla prętów o stałym przekroju rozwiązane przy zastosowaniu rozwinięcia funkcji przemieszczeń w szeregi potęgowe. W przypadku prętów o zmiennym przekroju, wprowadza się model pręta o przekroju odcinkowo stałym (skokowo zmiennym) i stosuje się metodę macierzy przeniesienia. Zagadnienie drgań wymuszonych rozwiązano dla przypadku obciążenia harmonicznie zmiennego w czasie i dowolnej zdeterminowanej funkcji czasowej.

W przypadku dowolnej funkcji czasowej obciążenia działającego na pręt stosuje się w rozwiązaniu metodę Bubnowa-Galerkina.

W zakończeniu pracy omówiono szczególne przypadki rozwiązanych problemów oraz podano uwagi o zbieżnościach przedstawionych rozwiązań.

Na podstawie przedstawionych algorytmów uruchomiono kilka programów na elektroniczną maszynę cyfrową serii ODRA 1300 w języku FORTRAN, przy pomocy których przeprowadzono obliczenia numeryczne, dla kadłuba pojazdu specjalnego.

Zagadnienia rozpatrzono w ujęciu liniowo-sprężystym przy założeniach tzw. technicznej teorii prętów cienkościennych dla dowolnych warunków początkowo-brzegowych.

ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Р е з ю м е

В работе представлены решения вопросов свободных и вынужденных колебаний а также динамической устойчивости тонкостенных стержней открытого профилч.

Эти вопросы для стержней постоянного сечения были решены при использовании разложения функции перемещений в степенные ряды. В случае стержней переменного сечения, вводится модель стержня обладающую сечением постоянным на определенным отрезке скачкообразно переменное сечение и применяется метод матриц переноса. Вопрос вынужденных колебаний решен для случая гармонически переменной нагрузки и любой детерминированной функции времени.

В случае произвольной временной функции нагрузки действующей на стержень при решении применяют метод Бубнова-Галеркина.

В заключении работы описываются особые случаи решенных проблем и даются замечания о сходимости представленных решений.

На основании представленных алгоритмов было разработано несколько программ для ЭВМ серии ОДРА 1300 на языке ФОРТРАН при помощи которых были проведены цифровые расчёты для корпуса специального средства передвижения.

Вопрос рассмотрен в линейно-упругом понимании при положении так называемой технической теории тонкостенных стержней для произвольных начально-береговых условий.

DYNAMIC PROBLEMS OF THE THIN WALLED RODS

Summary

In the paper were solved problems of the fre and forced vibrations as well as dynamic stability of the open profile thin - walled rods.

These problems were solved for the rods of a constant cross-section with application of the displacement function expancioned into power series.

In the case of rods of the variable cross-section the models of rods with a segment constant cross-section were intreduced (stepped variable): and the method of transfered matrix was applied.

Problems of the forced vibration were solved for the case of the harmonic force variable in time and for an arbitrary determined time function.

In the case of an arbitrary time function loading the rods the method of Bubnov-Galerkin was used.

At the end of the paper specific cases of solved problems discussed and nofices on convergence of the discribed solutions were presented.

An the base of slgorithms presented some routins on EMC ODRA 1300 in FORTRAN were started.

With the aid of that routines numerical calculations of the special vehical body were carried.

Problems were examined in a linear - elastic formula with assumption of so-called theory of the thin-walled rods for arbitrary initial and boundary conditions.