ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: MECHANIKA z. 56 Nr kol. 437

Robert KRZYWIEC,
Uniwersytet Warszawski

Stanisława STAWIKOWSKA
Politechnika Gdańska

O FORMUŁOWANIU I FORMALIZOWANIU RÓWNAŃ RUCHU SYSTEMU DWUWSKAŹNIKOWEGO MAS

Streszczenie. W pracy wprowadzono pojęcie ciągu dwuwskaźnikowego mas, jako systemu wielkiego mas, sformułowano równanie ruchu takiego systemu mechanicznego, przytoczono odpowiednie reprezentacje systemu, tj. grafy oraz schematy blokowe wielowskaźnikowe.

1. Wstęp

W pracy sformułowano i sformalizowano uogólnienie pojęcia układu mechanicznego n_2-elementowego na system n_2 n_3-elementowy (w przestrzeni euklidesowej n_1-wymiarowej E_{n_1}) z organizacją dwuciągową $[1,2]$ elementów mas, przytoczono drugie prawo Newtona odpowiedniego systemu mas, jako przekształcenie liniowe systemu wektorów, wprowadzone równanie różniczkowe zwyczajne trójciągowe rzędu drugiego, opisujące ruch, którego rozwiązanie nazywa się ruchem systemu dwuwskaźnikowego mas, podano przykład szczególny rozważań w postaci systemu dwuciągowego oscylatorów o masach posiadających organizację dwuwskaźnikową, gdzie współczynniki bezwładności, oporu, sprężystości są sześciowskaźnikowe.

Omówiono także interpretację systemu za pomocą grafów i schematów blokowych, podając uwagi o terminologii systemowej wzorowanej na automatyce.

2. Równania ruchu systemu dwuwskaźnikowego mas

W mechanice newtonowskiej znane jest pojęcie układu (mechanicznego) n punktów materialnych o masach

$$\left[m_1,\dots,m_n\right] = \overline{m}, \tag{1}$$

spełniającego prawo dynamiki

$$m_j \; \overrightarrow{a_j} = \overrightarrow{P_j} \quad (j = 1,\dots,n), \tag{2}$$

które można zapisać w postaci

$$\bar{m}\ {}^{2}\vec{a} = {}^{2}\vec{P}, \tag{3}$$

gdzie:

$\vec{P}_j$ - suma sił działających na j-ty punkt,

$\vec{a}_j$ - przyspieszenie punktu j-tego względem układu inercjalnego współrzędnych

$$0\,x_1\,x_2\,x_3 = 0\,\bar{x}. \tag{4}$$

Każde z przekształceń (przy ustalonym j) jest przypadkiem szczególnym przekształcenia liniowego

$$\left.\begin{aligned} P_{1j} &= m_{11j}\ a_{1j} + m_{12j}\ a_{2j} + m_{13j}\ a_{3j}, \\ P_{2j} &= m_{21j}\ a_{1j} + m_{22j}\ a_{2j} + m_{23j}\ a_{3j}, \\ P_{3j} &= m_{31j}\ a_{1j} + m_{32j}\ a_{2j} + m_{33j}\ a_{3j}, \end{aligned}\right] \tag{5}$$

$$j = 1,\dots,n,$$

gdzie

$$\bar{P} = \left[P_1,\ P_2,\ P_3\right] = \left[P_{j_1}\right],\ j_1 = 1,2,3, \tag{6}$$

jest trójelementowym ciągiem jednowskaźnikowym współrzędnych wektora $\vec{P}$ w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej E_3, $\bar{a} = \left[a_{j_1}\right]$ jest analogicznym ciągiem współrzędnych wektora $\vec{a}$.

Układ $\bar{m}$ nazywa się swobodny, gdy siły

$$\left[\vec{P}_1,\dots,\vec{P}_n\right] = {}^{2}\vec{P} \tag{7}$$

zależą od czasu absolutnego t, położeń punktów wyrażonych współrzędnymi

$${}^{2}\bar{x} = \begin{bmatrix} x_{11}, & \dots, & x_{1n} \\ x_{21}, & \dots, & x_{2n} \\ x_{31}, & \dots, & x_{3n} \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_1, \dots, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_n \right] =$$

$$= \left[\bar{x}_1,\ \dots,\ \bar{x}_n\right] = {}^{2}\bar{x}(t), \tag{8}$$

prędkości punktów określonych wartościami

$$
{}^{2}\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{11}, \ldots, \dot{x}_{1n} \\ \dot{x}_{21}, \ldots, \dot{x}_{2n} \\ \dot{x}_{31}, \ldots, \dot{x}_{3n} \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} \dot{x}_{1} \\ \dot{x}_{2} \\ \dot{x}_{3} \end{bmatrix}_{1}, \ldots, \begin{bmatrix} \dot{x}_{1} \\ \dot{x}_{2} \\ \dot{x}_{3} \end{bmatrix}_{n} \right] =
$$

$$
= \left[\dot{\bar{x}}_{1}, \ldots, \dot{\bar{x}}_{n} \right] = {}^{2}\dot{\bar{x}}(t) \tag{9}
$$

współrzędnych ciągu wektorów prędkości $\dot{\vec{x}}$.

Jeżeli wartości współrzędnych ${}^{2}\bar{P}$ sił ${}^{2}\vec{P}$ dane są za pomocą ciągu dwuwskaźnikowego

$$
\left[P_{j_1 j_2} \right] = {}^{2}\bar{P} = \begin{bmatrix} P_{11}, \ldots, P_{1n} \\ P_{21}, \ldots, P_{2n} \\ P_{31}, \ldots, P_{3n} \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} P_{1} \\ P_{2} \\ P_{3} \end{bmatrix}_{1}, \ldots, \begin{bmatrix} P_{1} \\ P_{2} \\ P_{3} \end{bmatrix}_{n} \right] =
$$

$$
= \left[\bar{P}_{1}, \ldots, \bar{P}_{n} \right], \qquad j_1 = 1,2,3, \qquad j_2 = 1, \ldots, n, \tag{10}
$$

to zależność tę można przedstawić w postaci

$$
{}^{2}\bar{P} = {}^{2}\bar{P}(t, {}^{2}\bar{x}(t), {}^{2}\dot{\bar{x}}(t)) = {}^{2}\bar{P}({}^{3}\bar{x}^{1}), \tag{11}
$$

gdzie:

$$
{}^{3}\bar{x}^{1} = \left[t, {}^{2}\bar{x}, {}^{2}\dot{\bar{x}} \right]. \tag{12}
$$

Przyjmuje się funkcje ${}^{2}\bar{P}$ ciągłe i o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego, ciągłych względem każdej zmiennej, czyli

$$
{}^{2}\bar{P} \wedge \frac{\partial\, {}^{2}\bar{P}}{\partial\, {}^{3}\bar{x}^{1}} \in C_{{}^{3}\bar{X}^{1}}, \quad {}^{3}\bar{x}^{1} \in {}^{3}\bar{X}^{1}, \tag{13}
$$

${}^{3}\bar{X}^{1}$ - przestrzeń elementów ${}^{3}\bar{x}^{1}$.

Zgodnie z II prawem Newtona otrzymuje się w ten sposób układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego w postaci normalnej.

Rozwiązanie

$$ {}^{2}\bar{x}(t, {}^{2}\bar{c}_1, {}^{2}\bar{c}_2) = {}^{2}\bar{x}, \tag{14} $$

gdzie:

${}^{2}\bar{c}_1$, ${}^{2}\bar{c}_2$ - ciągi dwuwskaźnikowe stałych,

wyznacza ruch rozważanego układu (mechanicznego) punktów $\bar{m}$, jeżeli w chwili początkowej $t = t_o$ są dane położenia początkowe punktów

$$ {}^{2}\bar{x}_o = {}^{2}\bar{x}(t)\Big|_{t = t_o} \tag{15} $$

oraz prędkości początkowe punktów

$$ {}^{2}\dot{\bar{x}}_o = {}^{2}\dot{\bar{x}}(t)\Big|_{t = t_o}, \tag{16} $$

wyrażone przez ciąg wartości współrzędnych odpowiednich ciągów wektorów.

Problem ruchu został dotychczas sformułowany i sformalizowany w sposób algebraiczny, za pomocą opisujących go ciągów wartości współrzędnych ciągów wektorów $\vec{x}$, $\dot{\vec{x}}$, $\vec{P}$. Ruch jest jednak pojęciem geometrycznym, wobec czego w danej bazie

$$ {}^{2}\vec{e} = \left[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right] = \left[\vec{e}_{j_1} \right] \tag{17} $$

wektorów przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej E_3 piszemy

$$ {}^{2}\vec{x} = {}^{2}\bar{x} \cdot {}^{3}\vec{e} = \left[\bar{x}_1 \cdot {}^{2}\vec{e}, \ldots, \bar{x}_n \cdot {}^{2}\vec{e} \right] = $$

$$ = \left[\begin{bmatrix} x_{11} & \vec{e}_1 \\ x_{21} & \vec{e}_2 \\ x_{31} & \vec{e}_3 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} x_{1n} & \vec{e}_1 \\ x_{2n} & \vec{e}_2 \\ x_{3n} & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \right], \tag{18} $$

gdzie każdy wektor $\vec{x}$ tej przestrzeni o współrzędnych $\bar{x} = [x_1, x_2, x_3]$ jest wyznaczony przez kombinację liniową

$$\vec{x} = \bar{x} \cdot {}^2\vec{e} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3. \tag{19}$$

Analogicznie otrzymuje się

$$\begin{aligned} {}^2\dot{\vec{x}} &= {}^2\dot{\bar{x}} \cdot {}^3\vec{e} = \left[\dot{\bar{x}}_1 \cdot {}^2\vec{e}, \ldots, \dot{\bar{x}}_n \cdot {}^2\vec{e}\right] = \\ &= \left[\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} & \vec{e}_1 \\ \dot{x}_{21} & \vec{e}_2 \\ \dot{x}_{31} & \vec{e}_3 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \dot{x}_{1n} & \vec{e}_1 \\ \dot{x}_{2n} & \vec{e}_2 \\ \dot{x}_{3n} & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \tag{20}$$

oraz

$${}^2\vec{P} = {}^2\bar{P} \cdot {}^3\vec{e}. \tag{21}$$

Wektorowe równanie różniczkowe ruchu ma wtedy postać

$${}^2\vec{P} = {}^2\vec{P}({}^3\vec{x}^{\,1}), \tag{22}$$

czyli

$${}^2\vec{P} = \vec{P}\,(t, {}^2\vec{x}\,(t), {}^2\dot{\vec{x}}\,(t)). \tag{23}$$

Ruch w tym przypadku opisuje rozwiązanie

$${}^2\vec{x} = {}^2\vec{x}\,(t), \tag{24}$$

danego równania różniczkowego wektorowego.

Uogólniając przytoczone pojęcia, można sformułować i sformalizować problem ruchu w terminologii systemu wielkiego [3], korzystając z organizacji wielociągowej elementów zbioru [1, 2].

Zauważmy, że:

- organizacja zbioru mas jest jednociągowa, to znaczy istnieje ciąg jednowskaźnikowy mas $\bar{m}$, dany odwzorowaniem

$$\bar{f} : [1, \ldots, n] \longrightarrow [m_{j_2}] = [m_1, \ldots, m_n] = \bar{m}, \tag{25}$$

gdzie nawias kwadratowy symbolizuje ciąg n-elementowy m_{j_2},

$$m_{j_2} > 0, \quad j_2 = 1,\dots,n. \tag{26}$$

- organizacja równań ruchu układu $\bar{m}$ jest dwuwskaźnikowa, algebraiczna w postaci ${}^2\bar{P}$, t, ${}^2\bar{x}$, ${}^2\dot{\bar{x}}$ lub geometryczna za pomocą ${}^2\vec{P}$, t, ${}^2\vec{x}$, ${}^2\dot{\vec{x}}$.

Przyjmując z kolei, że

- organizację zbioru mas w przestrzeni E_3, gdzie organizacja osi układu współrzędnych jest dana za pomocą wskaźnika $j_1 = 1,2,3$, wyznacza ciąg dwuwskaźnikowy ${}^2\bar{m}$, dany odwzorowaniem

$$
{}^2\bar{f} : \begin{bmatrix} 1\,1 & \dots & 1\,n_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ n_2\,1 & \dots & n_2\,n_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[m_{j_2 j_2} \right] =
$$

$$
\begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1\,n_3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n_2\,1} & \dots & m_{n_2\,n_3} \end{bmatrix} = {}^2\bar{m}, \tag{27}
$$

$$m_{j_2 j_3} > 0.$$

Wtedy organizacja algebraiczna wartości współrzędnych sił $\bar{P}$, położeń ${}^3\bar{x}$ prędkości ${}^3\dot{\bar{x}}$ jest trójwskaźnikowa, czyli

$$
{}^3\bar{P} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}_{11} & ,\dots, & \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}_{1\,n_3} \\ \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}_{n_2\,1} & ,\dots, & \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}_{n_2 n_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & ,\dots, & \bar{P}_{1\,n_3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{P}_{n_2\,1} & ,\dots, & \bar{P}_{n_2\,n_3} \end{bmatrix} = \tag{28}
$$

$$
= \left[\left[P_{j_1} \right]_{j_2 j_3} \right] = \left[\bar{P}_{j_2 j_3} \right],
$$

gdzie:

$j_1 = 1,2,3; \quad j_2 = 1,\ldots,n_2; \quad j_3 = 1,\ldots,n_3.$

$${}^{3}\bar{x} = \left[\left[x_{j_1}\right]_{j_2 j_3}\right] = \left[\bar{x}_{j_2 j_3}\right] = {}^{3}\bar{x}(t), \tag{29}$$

$${}^{3}\dot{\bar{x}} = \left[\left[\dot{x}_{j_1}\right]_{j_2 j_3}\right] = \left[\dot{\bar{x}}_{j_2 j_3}\right] = {}^{3}\dot{\bar{x}}(t). \tag{30}$$

Analogicznie, organizacja geometryczna wektorów ${}^{3}\vec{P}$, ${}^{3}\vec{x}$, ${}^{3}\dot{\vec{x}}$ jest trójwskaźnikowa, to znaczy

$${}^{3}\vec{P} = \left[\vec{P}_{j_2 j_3}\right], \tag{31}$$

$${}^{3}\vec{x} = \left[\vec{x}_{j_2 j_3}\right] = {}^{3}\vec{x}\,(t), \tag{32}$$

$${}^{3}\dot{\vec{x}} = \left[\dot{\vec{x}}_{j_2 j_3}\right] = {}^{3}\dot{\vec{x}}\,(t), \tag{33}$$

w danej bazie ${}^{2}\vec{e}$.

Równania ruchu mają przy tym postać:

algebraiczną

$${}^{3}\bar{P} = {}^{3}\bar{P}(t,\ {}^{3}\bar{x}(t),\ {}^{3}\dot{\bar{x}}(t)), \tag{34}$$

lub geometryczną

$${}^{3}\vec{P} = {}^{3}\vec{P}\,(t,\ {}^{3}\vec{x}\,(t),\ {}^{3}\dot{\vec{x}}(t)). \tag{35}$$

Ruchem systemu ${}^{2}\bar{m}$ jest rozwiązanie

$${}^{3}\vec{x} = {}^{3}\vec{x}\,(t) \tag{36}$$

(przy danych warunkach początkowych) otrzymanego systemu równań różniczkowych.

3. Prawo dynamiki systemu ${}^{2}\bar{m}$

Drugie prawo Newtona - jako prawo ruchu - jest przekształceniem liniowym zbioru przyspieszeń, które posiada system ustalonych mas, na zbiór działających na nie sił.

W przypadku jednego punktu przestrzeni E_3 scharakteryzowanego masą m zwaną dalej współczynnikiem bezwładności liniowej[x)], mamy

$$\vec{P} = m\,\vec{a}, \tag{37}$$

lub

$$\left[P_{j_1}\right] = m\left[a_{j_1}\right], \quad j_1 = 1, \dots, n_1 = 3. \tag{38}$$

Gdy dany jest system n_2-elementowy $\bar{m}$, to systemowe prawo ruchu przyjmuje postać [4]:

$$\left.\begin{aligned} \vec{P}_1 &= {}_1m_{11}\,\vec{a}_1 + \dots + {}_1m_{1n_2}\,\vec{a}_{n_2}, \\ &\;\vdots \\ \vec{P}_{n_2} &= {}_1m_{n_21}\,\vec{a}_1 + \dots + {}_1m_{n_2n_2}\,\vec{a}_{n_2}, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

gdzie ciąg dwuwskaźnikowy

$${}^{2}_{1}\bar{m} = \begin{bmatrix} {}_1m_{11}, & \dots, & {}_1m_{1n_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}_1m_{n_21}, & \dots, & {}_1m_{n_2n_2} \end{bmatrix} = \left[{}_1m_{i_1i_2}\right], \quad i_1 = i_2 = 1, \dots, n_2, \quad {}_1m_{i_1i_2} = {}_1m_{i_2i_1}, \tag{40}$$

nazywa się bezwładnością liniową systemu.
W skrócie można zapisać

$${}^{2}\vec{P} = {}^{2}\bar{m} \cdot {}^{2}\vec{a} = \begin{bmatrix} {}_1m_{11} & \dots & {}_1m_{1n_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}_1m_{n_21} & \dots & {}_1m_{n_2n_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_{n_2} \end{bmatrix}, \tag{41}$$

---

x) W odróżnieniu od współczynnika bezwładności kątowej, czyli momentu bezwładności ciała względem ustalonej osi obrotu.

przy czym mnożenie algebraicznego ciągu dwuwskaźnikowego $\underset{1}{{}^{2}\bar{m}}$ przez geometryczny ciąg dwuwskaźnikowy ${}^{2}\vec{a}$ jest analogiczne do mnożenia macierzy. Niech obecnie w przestrzeni E_3 będzie dany system n_2n_3 - wskaźnikowy ${}^{2}\bar{m}$ mas. Wtedy drugie prawo Newtona ma postać [4]:

$$\left.\begin{array}{l} {}^{2}\vec{P}_1 = \underset{2}{{}^{2}\bar{m}}_{11} \cdot {}^{2}\vec{a}_1 + \dots + \underset{2}{{}^{2}\bar{m}}_{1\,n_3} \cdot {}^{2}\vec{a}_{n_3} \\ \vdots \\ {}^{2}\vec{P}_{n_3} = \underset{2}{{}^{2}\bar{m}}_{n_3\,1} \cdot {}^{2}\vec{a}_1 + \dots + \underset{2}{{}^{2}\bar{m}}_{n_3n_3} \cdot {}^{2}\vec{a}_{n_3} \end{array}\right\} \tag{42}$$

którą zapisuje się w skrócie

$${}^{3}\vec{P} = \underset{2}{{}^{4}\bar{m}} \cdot {}^{3}\vec{a} = \begin{bmatrix} \underset{2}{{}^{2}\bar{m}}_{11} & \dots & \underset{2}{{}^{2}\bar{m}}_{1\,n_3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{2}{{}^{2}\bar{m}}_{n_3\,1} & \dots & \underset{2}{{}^{2}\bar{m}}_{n_3n_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{2}\vec{a}_1 \\ \vdots \\ {}^{2}\vec{a}_{n_3} \end{bmatrix}, \tag{43}$$

gdzie mnożenie algebraicznego ciągu czterowskaźnikowego $\underset{2}{{}^{4}\bar{m}}$ przez geometryczny ciąg trójwskaźnikowy ${}^{3}\vec{a}$ jest analogiczne do mnożenia macierzy [1,2].

Ciąg $\underset{2}{{}^{4}\bar{m}}$ nazywa się bezwładnością liniową wsystemu ${}^{2}\bar{m}$.

4. Przykład. Oscylator liniowy systemu ${}^{2}\bar{m}$.

Równanie oscylatora mechanicznego zerowskaźnikowego (jedna masa)w przestrzeni jednowymiarowej ma postać

$$\underset{1}{a}\,\ddot{x}(t) + \underset{2}{a}\,\dot{x}(t) + \underset{3}{a}\,x(t) = f(t), \tag{44}$$

gdzie:

$\underset{1}{a}$ - współczynnik bezwładności,

$\underset{2}{a}$ - współczynnik oporu,

$\underset{3}{a}$ - współczynnik sprężystości,

t - czas absolutny,

$f(t)$ - wartość siły wymuszającej,
$x(t)$ - wartość punktu drgającego,
$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ - wartość prędkości punktu drgającego,
$\ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$ - wartość przyspieszenia punktu (o masie a_1).

W przypadku $f(t) = 0$ wystąpią drgania swobodne w ośrodku z oporami. Gdy $a_2 = 0$, to ośrodek jest idealny (bez oporów).

Niech będzie dana przestrzeń n_1-wymiarowa. Równanie oscylatora mechanicznego zerowskaźnikowego ma postać algebraiczną

$$
\begin{aligned}
&a_{1\,11}\ddot{x}_1(t) + \dots + a_{1\,1n_1}\ddot{x}_{n_1}(t) + a_{2\,11}\dot{x}_1(t) + \dots + \\
&\vdots \\
&a_{1\,n_1 1}\ddot{x}_1(t) + \dots + a_{1\,n_1n_1}\ddot{x}_{n_1}(t) + a_{2\,n_1 1}\dot{x}_1(t) + \dots + \\
&+ \dots + a_{2\,1n_1}\dot{x}_{n_1}(t) + a_{3\,11}x_1(t) + \dots + a_{3\,1n_1}x_{n_1}(t) = f_1(t), \\
&\vdots \\
&+ \dots + a_{2\,n_1n_1}\dot{x}_{n_1}(t) + a_{3\,n_1 1}x_1(t) + \dots + a_{3\,n_1n_1}x_{n_1}(t) = f_{n_1}(t).
\end{aligned}
\tag{45}
$$

W skrócie można napisać [1], że

$$
{}^2\bar{a}_1 \cdot \ddot{\bar{x}}(t) + {}^2\bar{a}_2\,\dot{\bar{x}}(t) + {}^2\bar{a}_3\,\bar{x}(t) = \bar{f}(t). \tag{46}
$$

Niech w przestrzeni n_1-wymiarowej będzie dany system ${}^2\bar{m}$, czyli ciąg dwuwskaźnikowy mas

$$
{}^2\bar{m} = \begin{bmatrix} m_{11}, & \dots, & m_{1\,n_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n_2 1}, & \dots, & m_{n_2n_3} \end{bmatrix} = \left[m_{j_2j_3} \right], \tag{47}
$$

$j_2 = 1, \dots, n_2, \quad j_3 = 1, \dots, n_3.$

Drgania wymuszone w ośrodku z oporami systemu dwuwskaźnikowego [1] oscylatorów mają postać

$$
{}^6\bar{a}_1 \cdot {}^3\ddot{\bar{x}}(t) + {}^6\bar{a}_2 \cdot {}^3\dot{\bar{x}}(t) + {}^6\bar{a}_3 \cdot {}^3\bar{x}(t) = {}^3\bar{f}(t), \tag{48}
$$

gdzie:

$\overset{6}{\bar{a}}_1$ - ciąg sześciowskaźnikowy współczynników bezwładności,

$\overset{6}{\bar{a}}_2$ - ciąg sześciowskaźnikowy współczynników oporu,

$\overset{6}{\bar{a}}_3$ - ciąg sześciowskaźnikowy współczynników sprężystości,

$\overset{3}{\bar{f}}(t)$ - ciąg trójwskaźnikowy wartości współrzędnych sił wymuszających $\overset{3}{\vec{f}}(t)$.

5. Graf systemu $\overset{2}{\bar{m}}$

W pracach [3,5] przedstawiono sposób algebraizacji grafów systemu za pomocą ciągów wielowskaźnikowych [1, 2], Korzystając z przytoczonych tam rozważań skonstruowano grafy omówionych systemów mechanicznych.

Zerowskaźnikiem jest ustalona liczba n_o, na ogół naturalna. Grafem zerowskaźnika jest odcinek z numerem zerowskaźnikowym.

Zerociągiem jest odwzorowanie

$$f : n_o \longrightarrow z_{n_o} = \overset{o}{\bar{z}}, \quad \overset{o}{\bar{z}} \in Z, \tag{49}$$

gdzie:

Z - dowolny zbiór elementów.

Grafem zerociągu jest odcinek utożsamiany z $\overset{o}{\bar{z}} \in Z$.

Jednowskaźnikiem j jest ustalony podzbiór (tu kolejnych liczb naturalnych)

$$\left[1, \ldots, n\right] = j = 1, \ldots, n \tag{50}$$

zbioru liczb naturalnych.

Grafem jednowskaźnika j jest ciąg odcinków wyprowadzonych z jednego wspólnego punktu, zwanego centrum i ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi.

Jednociągiem jest odwzorowanie

$$\overset{1}{\bar{f}} : \left[1, \ldots, n\right] \longrightarrow \left[z_1, \ldots, z_n\right] = \overset{1}{\bar{z}} = \left[z_j\right], \tag{51}$$

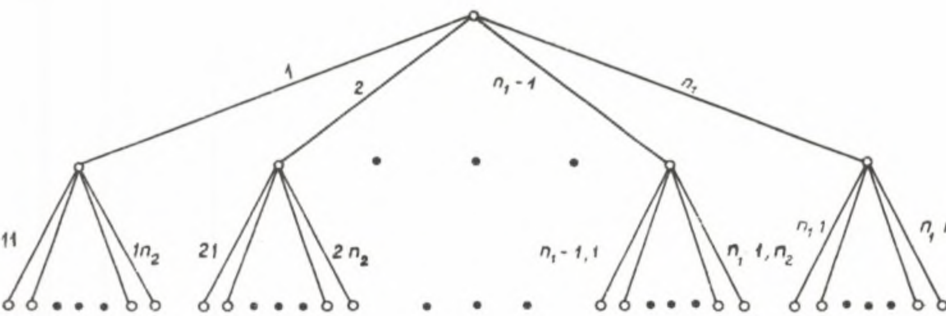
$$j = 1, \ldots, n, \quad z_j \in Z.$$

Grafem jednociągu $\bar{z}$ jest ciąg odcinków wyprowadzonych z jednego wspólnego punktu i oznaczonych za pomocą symbolu rdzeniowego "z", przy którym kolejny numer jednowskaźnika jest podporządkowany jednemu i tylko jednemu odcinkowi.

Dwuwskaźnikiem j_1j_2 jest iloczyn kartezjański

$$j_1j_2 = [1,\dots, n_1] \times [1,\dots, n_2] = \begin{bmatrix} 11 & \dots & 1\,n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ n_1\,1 & \dots & n_1\,n_2 \end{bmatrix} \tag{52}$$

dwóch ustalonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych.
Grafem dwuwskaźnika j_1j_2 jest ciąg ciągów odcinków wyprowadzonych z końca każdego odcinka grafu jednowskaźnika (przy dołączeniu odcinków jednowskaźnika) i ponumerowanych za pomocą numerów dwuwskaźnikowych, jak na rys. 1.



Rys. 1

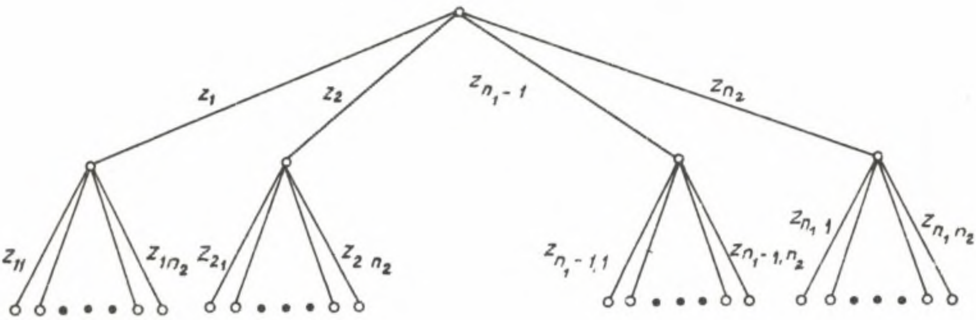
Dwuciągiem jest odwzorowanie

$$^2\bar{f} : \begin{bmatrix} 11 & \dots & 1\,n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ n_1\,1 & \dots & n_1n_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} z_{11} & \dots & z_{1\,n_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n_1 1} & \dots & z_{n_1n_2} \end{bmatrix} = {}^2\bar{z} = [z_{j_1j_2}], \tag{53}$$

gdzie:

$$j_1 = 1,\dots,n_1; \quad j_2 = 1,\dots,n_2; \quad z_{j_1j_2} \in Z.$$

Grafem dwuciągu $^2\bar{z}$ jest system odcinków grafu dwuwskaźnika j_1j_2 oznaczonych za pomocą symbolu rdzeniowego "z", przy którym kolejny numer dwuwskaźnika jest przyporządkowany jednemu i tylko jednemu odcinkowi (rys. 2).



Rys. 2

6. Schemat blokowy przekształcenia liniowego ${}^{3}\bar{y} = {}^{6}\bar{a}\,{}^{3}\bar{x}$

Do poglądowego przedstawienia przekształceń (tu liniowych) służą zaczerpnięte z automatyki schematy blokowe. Na rys. 3 pokazano schemat blokowy systemu

$$ {}^{3}\bar{y} = {}^{6}\bar{a}\,{}^{3}\bar{x} \tag{54}$$

o elementach dwuwskaźnikowych. To samo przekształcenie (zwane transmitancją) o elementach jednowskaźnikowych przedstawia rys. 4.

Ciąg trójwskaźnikowy ${}^{3}\bar{x}$ nazywa się wtedy wejściem systemu,natomiast ciąg trójwskaźnikowy ${}^{3}\bar{y}$ jest wyjściem systemu.
Jeśli zatem rozważyć przekształcenie liniowe

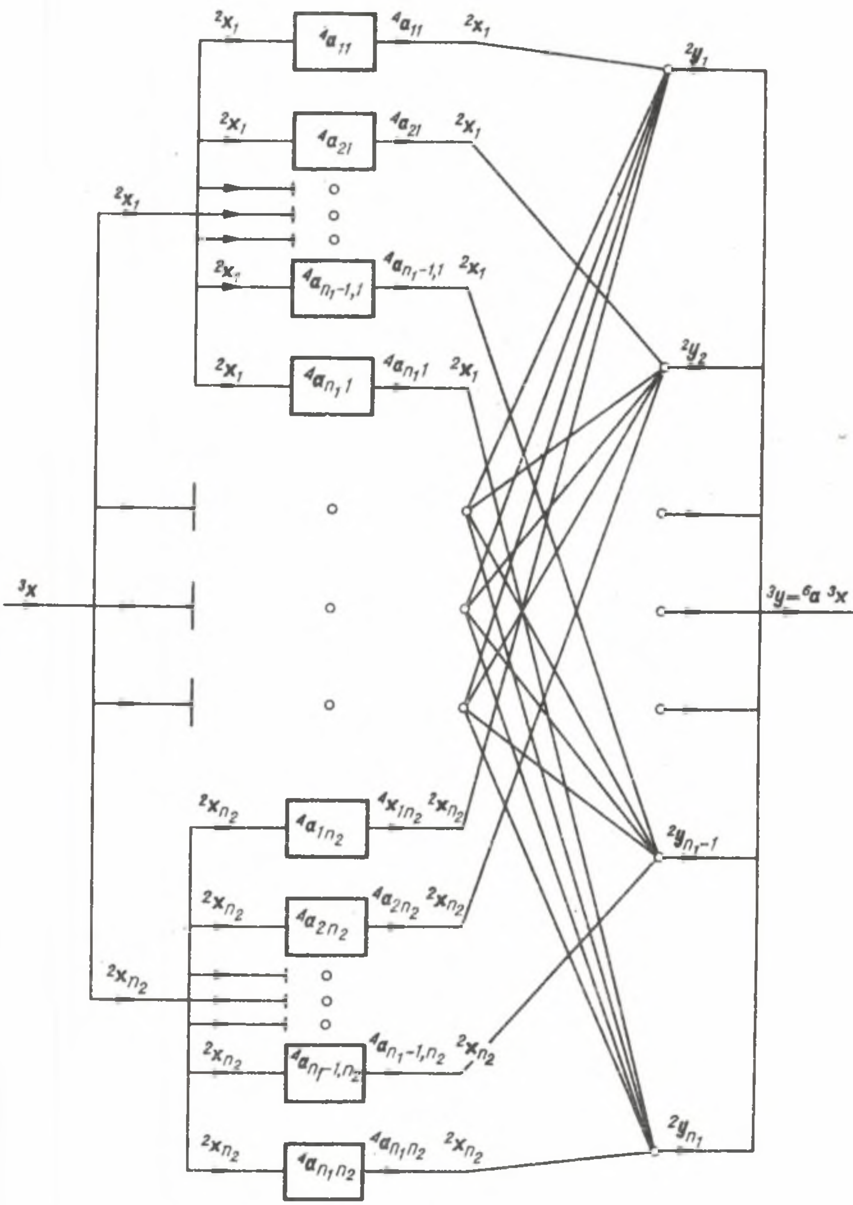
$$ f : {}^{3}\bar{X} \longrightarrow {}^{3}\bar{Y}, \tag{55}$$

gdzie

$$ {}^{3}\bar{x} \in {}^{3}\bar{X}, \qquad {}^{3}\bar{y} \in {}^{3}\bar{Y}, $$

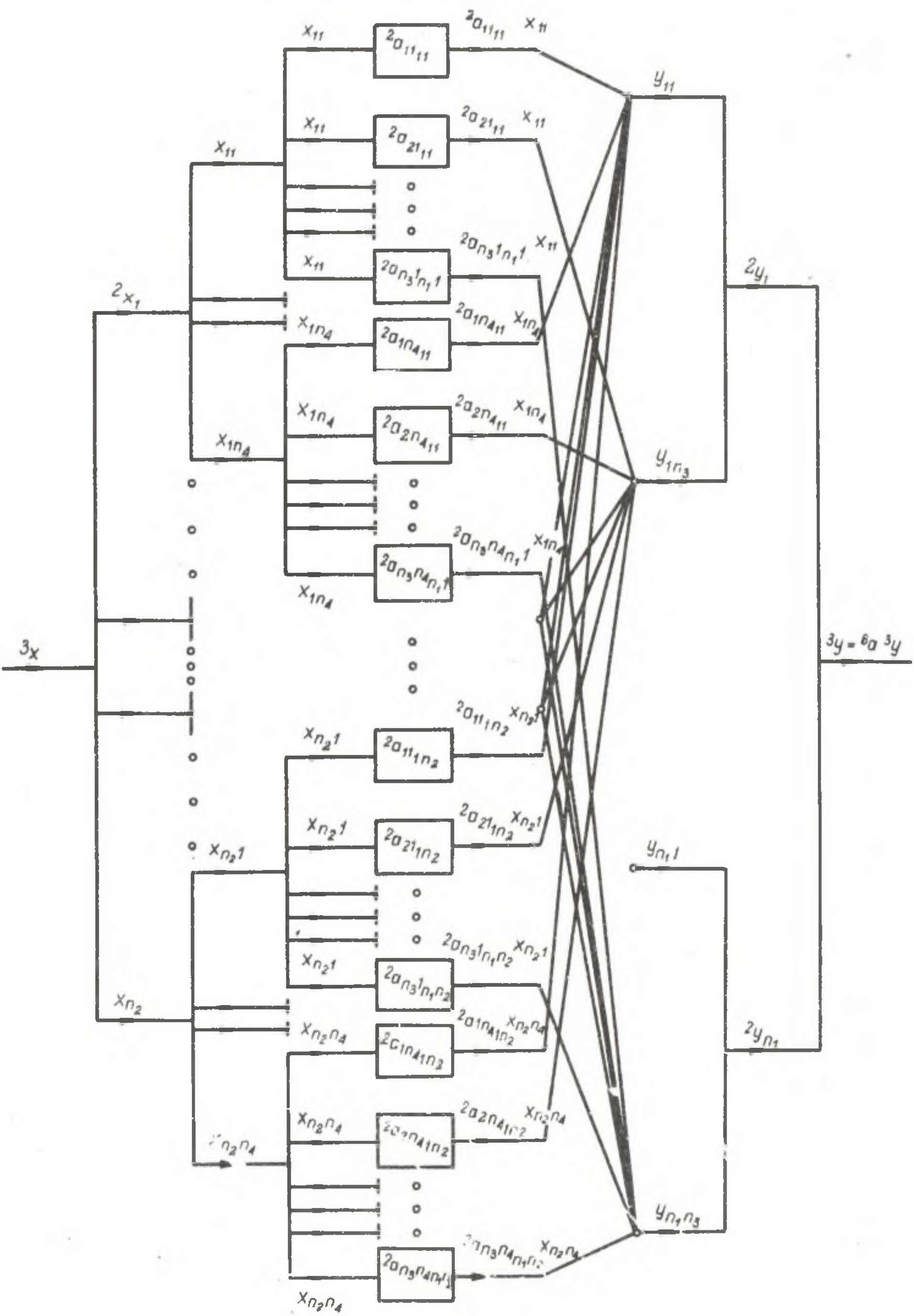
to dziedzina ${}^{3}\bar{X}$ jest zbiorem wejść, natomiast przeciwdziedzina ${}^{3}\bar{Y}$ stanowi zbiór wyjść systemu.

Ciąg dwuwskaźnikowy (macierz) ${}^{2}\bar{a} = \left[a_{j_1 j_2}\right]$, $j_1 = 1,\ldots,n_1$; $j_2 = 1,\ldots,n_2$, przekształcenia $\bar{y} = {}^{2}\bar{a}\,\bar{x}$. przedstawia rys. 5. Należy przy tym pamiętać, że $\bar{x} = \left[x_{j_2}\right]$ jest ciągiem jednowskaźnikowym współrzędnych wektora wodzącego punktu w przestrzeni n_1-wymiarowej, natomiast $\bar{y} = \left[y_{j_1}\right]$ jest ciągiem jednowskaźnikowym współrzędnych analogicznego wektora w przestrzeni n_2-wymiarowej.

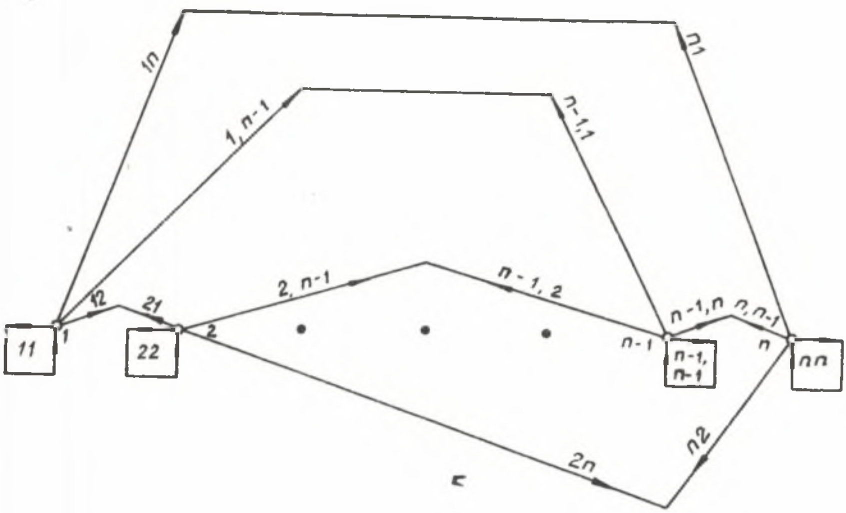


$^2x_1$
$^4a_{11}$
$^2x_1$
$^2y_1$
$^2x_1$
$^4a_{21}$
$^2x_1$
$^2x_1$
$^2x_1$
$^4a_{n_1-1,1}$
$^4a_{n_1-1,1}$
$^2x_1$
$^2y_2$
$^2x_1$
$^4a_{n_1 1}$
$^4a_{n_1 1}$
$^2x_1$
^3x
$^3y = {^6a}\,{^3x}$
$^2x_{n_2}$
$^4a_{1n_2}$
$^4x_{1n_2}$
$^2x_{n_2}$
$^2y_{n_1-1}$
$^2x_{n_2}$
$^4a_{2n_2}$
$^4a_{2n_2}$
$^2x_{n_2}$
$^2x_{n_2}$
$^2x_{n_2}$
$^4a_{n_1-1,n_2}$
$^4a_{n_1-1,n_2}$
$^2x_{n_2}$
$^2y_{n_1}$
$^2x_{n_2}$
$^4a_{n_1 n_2}$
$^4a_{n_1 n_2}$
$^2x_{n_2}$

Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Ciąg czterowskaźnikowy $\overset{4}{\bar{a}} = \left[a_{j_1 j_2 j_3 j_4}\right]$, $j_k = 1,\dots,n_k$; $k = 1,\dots,4$ przedstawia rys. 6, natomiast ciąg sześciowskaźnikowy (rys. 7):

$$\overset{6}{\bar{a}} = \left[a_{j_1 \dots j_6}\right], \quad j_k = 1,\dots,n_k; \quad k = 1,\dots,6,$$

LITERATURA

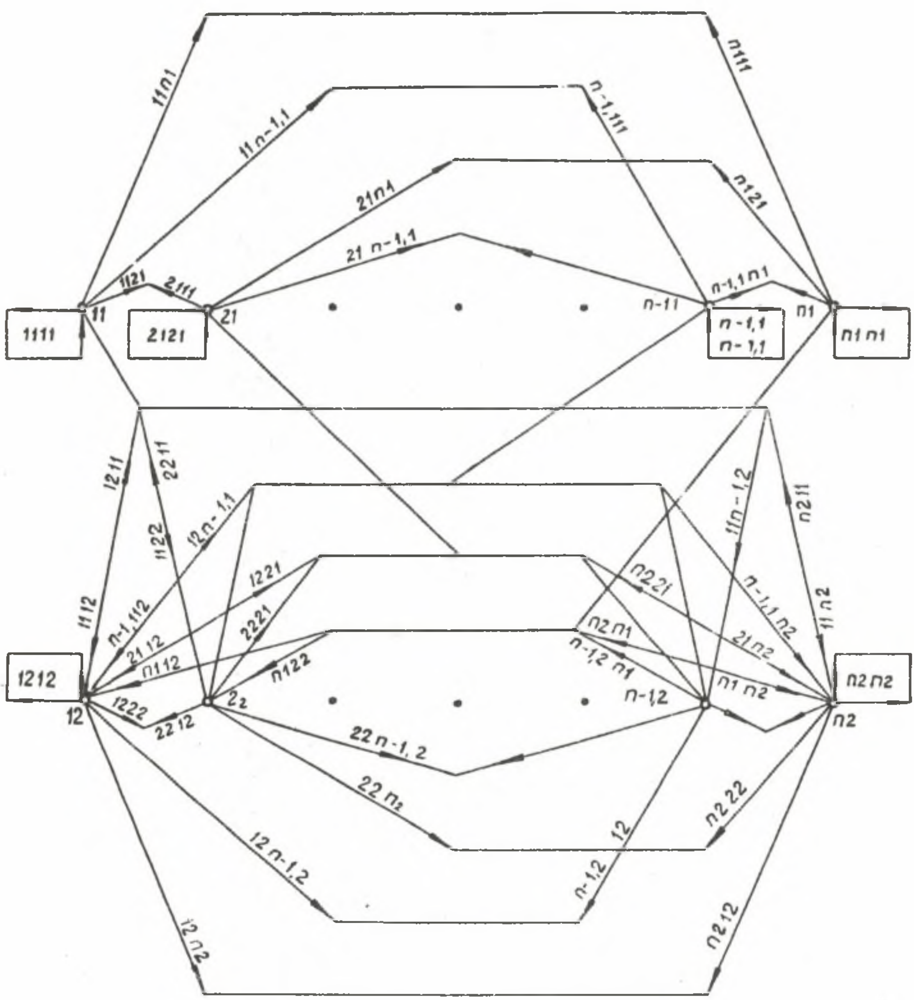
[1] Krzywiec R. - Wielociągi (ciągi wielowskaźnikowe), praca doktorska, nie publikowana.

[2] Krzywiec R. - Ciągi wielowskaźnikowe, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, PWN, Warszawa, 1971.

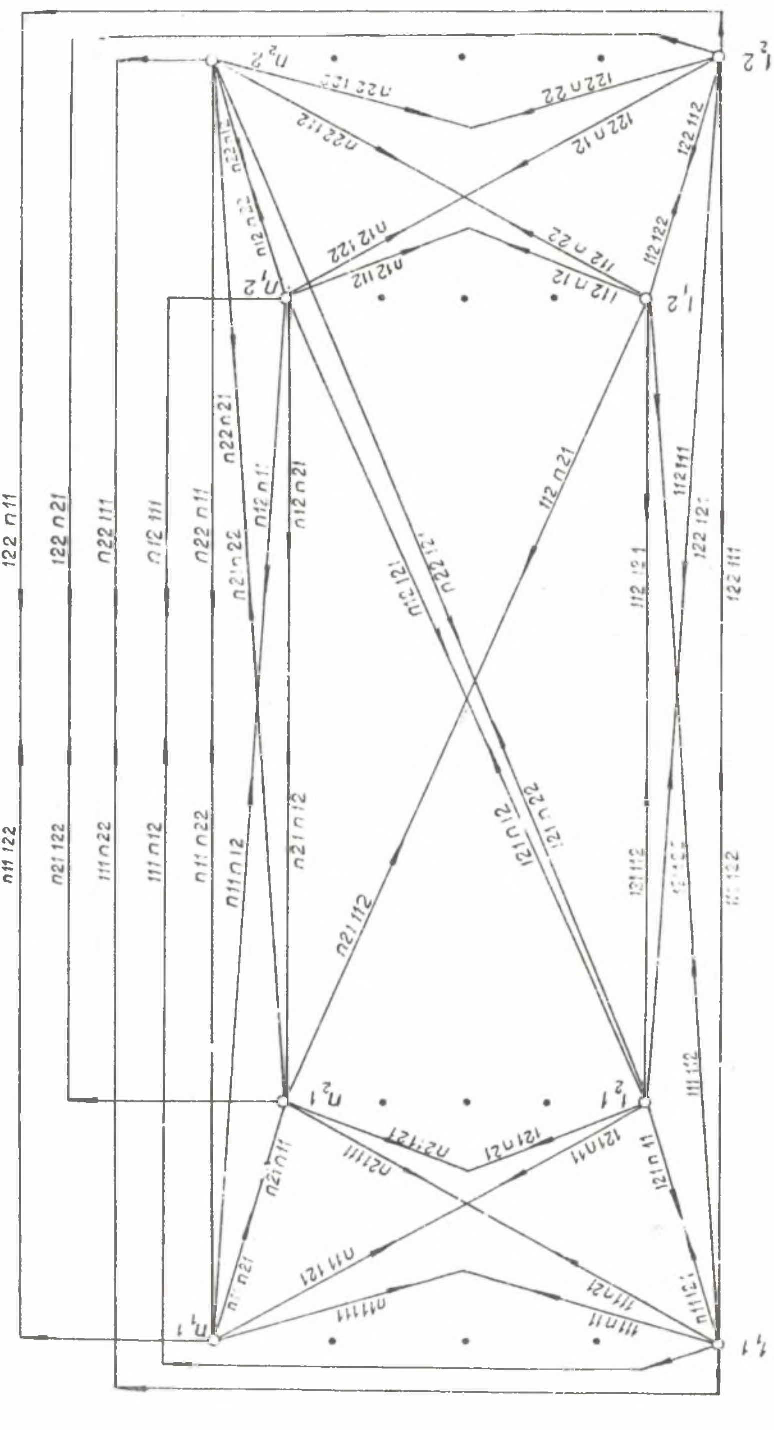
[3] Krzywiec R. - Organizacja wielociągowa systemów wielkich, rozprawa habilitacyjna, w druku.

[4] Krzywiec R. - Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej, 1972, s.

[5] Krzywiec R. - O wielowskaźnikowym uogólnieniu prawa Hooke'a układów stereomechanicznych wielokrotnych jako systemów wielkich, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, PWN, Warszawa, 1971.



Rys. 6



Rys. 7

О ФОРМИРОВАНИИ И ФОРМАЛИЗИРОВАНИИ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДВУХИНДЕКСНОЙ СИСТЕМЫ МАСС

Р е з ю м е

В работе введено понятие двухиндексной последовательности масс как большой системы масс, сформулировано уравнение движения такой механической системы, приведено соответственные представители системы, а именно графы и многоиндексные блоковые схемы.

ABOUT FORMULATING AND JUSTIFYING THE EQUASTIONS OF MOTION TWO-INDEX SYSTEM OF MASSES

S u m m a r y

In this paper the sequence two-index of masses as of great system of masses is being introduced and the equastions of motion this mechanical system was formulating. The representation of system corresponding is quoted as well as graphs and multi-index networks.