

Kazimierz KURPISZ

Janusz SKOREK

Instytut Techniki Ciepłej
Politechniki Śląskiej

NUMERYCZNA METODA ROZWIĄZYWANIA PEWNEJ KLASY ODWROTNYCH ZADAŃ
PRZEWODZENIA CIEPŁA^{x)}

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę rozwiązywania pewnej klasy odwrotnych zadań przewodzenia ciepła z nieznanym warunkiem początkowym. Rozwiązanie zostało przedstawione w postaci szeregu zawierającego pochodne temperatury względem czasu. Do wyznaczania tych pochodnych zaproponowano metodę regularyzacji. W pracy zamieszczono przykłady, ilustrujące przydatność metody.

1. WSTĘP

Odwrotne zagadnienia przewodzenia ciepła są definiowane w rozmaity sposób. Wielu autorów (m.in. Beck [1]) rozważa przede wszystkim tzw. graniczne zadania odwrotne, polegające na identyfikacji gęstości strumienia ciepła na powierzchni ciała na podstawie znajomości przebiegu temperatury w punktach leżących wewnątrz ciała.

Wielu innych autorów przez pojęcie "zadanie odwrotne" rozumie szerszą klasę problemów [2, 3, 4]. Kozdoba [3] definiuje zadania odwrotne jako problemy, które określają przyczyny ze skutków.

Przypadek, który rozpatruje się w niniejszym artykule, jest trochę różny od definiowanych powyżej. Zasadniczym celem jest wyznaczenie wszystkich skutków, jeżeli niektóre z nich są znane, a niekoniecznie wszystkich przyczyn. W szczególności poszukuje się rozkładu temperatury wewnątrz ciała na podstawie znajomości przebiegu temperatury w niektórych punktach wewnątrz ciała. Jednocześnie zakłada się, że nie jest znany warunek początkowy oraz niektóre warunki brzegowe. Położenie punktów, w których znane są przebiegi temperatur, może być zupełnie dowolne dla przypadków jednowymiarowych pól temperatury. Dla tych przypadków mogą pozostać nieznanne wszystkie warunki brzegowe. Jedynie dla problemów wielowymiarowych występują pewne ograniczenia w wyborze punktów.

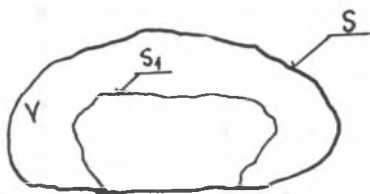
^{x)} Praca wykonana w ramach CPBP nr 02.18, kierunek 2, zad. 2.2.1.1.

Prezentowana metoda może być stosowana zarówno do zagadnień sformułowanych analitycznie, jak i numerycznie, do problemów ustalonych i nieustalonych. Niniejszy artykuł dotyczy jednak wyłącznie zadań nieustalonych, sformułowanych numerycznie.

Rozwiązanie zadania zostało przedstawione w postaci szeregów, zawierających pochodne temperatury względem czasu. Jest ono zatem podobne do jednego z najwcześniej cytowanych w literaturze, a mianowicie do rozwiązania Burggrafa [5]. Burggraf rozwiązywał jednowymiarowy problem odwrotny, w którym zakładał, że zarówno temperatura, jak i strumień ciepła są znane w jednym punkcie. Metoda Burggrafa została rozwinięta przez innych autorów m.in. Tiomkina [6], ale ostatecznie zarzucono ją z uwagi na duże trudności w uzyskiwaniu stabilnych rezultatów. Trudności te związane są ze specyficzną właściwością zadań odwrotnych, a mianowicie z ich złym uwarunkowaniem. Właściwość ta powoduje, że niewielkie niedokładności danych powodują na ogół duże niedokładności wyników. Źle uwarunkowane zadania były nazywane "źle sformułowane fizycznie" i przez wiele lat ich rozwiązywaniem nikt się nie zajmował. W ciągu ostatnich kilkunastu lat opracowano jednakże wiele procedur, które umożliwiają efektywne rozwiązywanie zadań źle uwarunkowanych.

2. WEWNĘTRZNA ODPOWIEDŹ TEMPERATUROWA

Rozwiązywanie odwrotnych zadań przewodzenia ciepła jest możliwe, jeżeli dysponujemy danymi o przebiegu temperatury lub gęstości strumienia ciepła w punktach położonych wewnątrz ciała.



Rys. 1. Geometria odwrotnego zadania przewodzenia ciepła

Fig. 1. Geometrical parameters of the heat conduction inverse problem

no być znane rozwiązanie problemu przewodzenia ciepła. Tego typu informacje nazywamy termiczną odpowiedzią układu.

Dla zagadnień nieustalonych jest to przebieg temperatury lub gęstości strumienia ciepła w funkcji czasu dla pewnego konturu S_1 (rys. 1). W niniejszym artykule w rozważaniach uwzględnia się tylko odpowiedź temperaturową.

We wnętrzu odpowiedź temperaturową może być zilustrowana na przykładzie liniowego, bezźródłowego przypadku, który opisywany jest równaniem Fouriera-Kirchhoffa w postaci:

$$\frac{\partial T(\bar{r}, t)}{\partial t} = a \nabla^2 T(\bar{r}, t), \quad \bar{r} \in V \quad (1)$$

gdzie:

- T - temperatura,
- t - czas,
- a - współczynnik wyrównywania temperatury,
- \bar{r} - wektor - promień wodzący punktu,
- V - objętość ciała.

Zakłada się, że odpowiedź temperaturowa $F(\bar{r}_1, t)$, gdzie $\bar{r}_1 \in S_1$, spełnia warunek:

$$F(\bar{r}_1, t) \rightarrow T(\bar{r}, t), \quad \text{jeżeli} \quad \bar{r} \rightarrow \bar{r}_1.$$

Zakłada się dalej, że warunek powyższy jest słuszny dla całego rozpatrywanego przedziału czasu, tzn.:

$$t \in [0, \infty).$$

Oznacza to, że warunek początkowy jest rozumiany jako rozwiązanie równania (1) dla $t \rightarrow 0$.

Zakłada się także, że pochodne odpowiedzi temperaturowej względem czasu są ograniczone:

$$F^{(k)}(\bar{r}, t) \equiv d^k F(\bar{r}, t)/dt^k < \infty \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

dla $0 \leq t < \infty$

Powierzchnia S_1 może być w skrajnym przypadku powierzchnią zewnętrzną ciała. Nie jest to wtedy klasyczne zadanie odwrotne, ale problem taki może mieć duże znaczenie praktyczne.

3. OGÓLNY OPIS METODY

Metoda rozwiązywania odwrotnych zadań przewodzenia ciepła, która jest prezentowana w niniejszej pracy, wykorzystuje pewne właściwości układu równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego w postaci:

$$\frac{dT}{dt} = CT + \sum_{i=1}^L F_i(t)B_i, \quad (3)$$

gdzie:

C - nieosobliwa macierz kwadratowa o wymiarach $N \times N$, której elementy są znane i stałe,

B_i - N -elementowe wektory o znanych, stałych elementach,

$F_i(t)$ - znane funkcje, które spełniają zależność:

$$F_i^{(k)}(t) \equiv d^k F_i(t)/dt^k < \infty, \quad 0 \leq t < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

T - wektor N -elementowy, którego elementy są poszukiwane.

Metody numeryczne rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła prowadzą bezpośrednio do układu równań typu (3), jeżeli tylko nie dyskretyzuje się pochodnej temperatury względem czasu. Macierze C i B zawierają wówczas współczynniki układu równań różnicowych, a wektor T - temperatury w węzłach siatki różnicowej.

Rozwiązanie układu równań (3) uzyskano dwiema metodami: bezpośrednią i metodą przekształceń spektralnych.

3.1. Bezpośrednia metoda pochodnych

Rozwiązanie układu równań (3) jest znane i może być zapisane w postaci:

$$T = e^{Ct} T_0 + e^{Ct} \sum_{i=1}^L \int_0^t F_i(s) e^{-Cs} B_i ds, \quad (5)$$

gdzie:

$$T = T_0 \quad \text{dla} \quad t = 0.$$

Całkując nieskończoną liczbę razy całkę, jaka pojawiła się w zależności (5), otrzymuje się inną postać rozwiązania:

$$T = e^{Ct} T_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^L \phi_{k,i} F_i^{(k)}(t) - e^{Ct} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^L \phi_{k,i} F_i^{(k)}(0), \quad (6)$$

gdzie wektory $\phi_{k,i}$ są rozwiązaniami układu równań:

$$\phi_{k,i} = - (C^{-1})^{k+1} B_i. \quad (7)$$

W rozwiązaniu (6) pominięto składnik:

$$- \sum_{i=1}^L e^{Ct} (C^{-1})^K \int_0^t F_i^{(K)}(s) e^{-Cs} B_i ds, \quad \text{gdzie } K \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Składnik ten może być pominięty, ponieważ założono, że pochodne są ograniczone, a ponadto można dowiedzieć, że wartość bezwzględna najmniejszej wartości własnej macierzy C jest większa od 1, jeśli choć jeden warunek brzegowy jest warunkiem brzegowym pierwszego rodzaju, tzn. jeśli rozważa się wyłącznie pole temperatury łącznie z temperaturą na powierzchni (można to porównać z wartościami własnymi odpowiedniego zagadnienia Sturm-Liouville'a). Podobne szeregi pojawiły się w rozwiązaniu opisywanym w [6] i tam problem ich zbieżności był szczegółowo badany.

Można także wykazać, że jeżeli funkcje $F_i(t)$ są wewnętrznymi odpowiedziami temperaturowymi w sensie założeń podanych w punkcie 2, to słuszna jest zależność [7, 8]:

$$T_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^L \phi_{k,i} F_i^{(k)}(0), \quad (9)$$

a zatem rozwiązanie można ostatecznie przedstawić w postaci:

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^L \phi_{k,i} F_i^{(k)}(t). \quad (10)$$

Wielkość L zostanie określona w dalszej części niniejszego punktu. Warto podkreślić, że rozwiązanie powyższe nie zawiera jawnej zależności od warunku początkowego.

Dla potrzeb numerycznego rozwiązywania zadań odwrotnych rozwiązanie (10) zostanie przepisane w innej postaci, która jest dogodniejsza do programowania komputerowego i automatyzacji obliczeń.

Do otrzymania układu równań typu (3) może być wykorzystana dowolna metoda numeryczna. W niniejszym artykule zastosowano metodę bilansów elementarnych opisaną w [9, 10]. Dla wygody węzły siatki różnicowej podzielono na dwie grupy: powierzchniowe i wewnętrzne. Węzły powierzchniowe położone są na konturze S_1 . Jeżeli powierzchnia S_1 jest zewnętrzną powierzchnią ciała, to przyjmuje się ich pojemność cieplną równą zero, a opór przewodzenia ciepła między nimi jest nieskończenie wielki.

Zagadnienia odwrotne, które są rozpatrywane w niniejszym artykule, mogą także być podzielone na dwie grupy: wewnętrzne i ekstrapolacji. Problem nazywa się wewnętrznym, jeżeli wszystkie węzły siatki różnicowej, w których należy wyznaczyć temperaturę, znajdują się wewnątrz konturu S_1 . W szczególności, jeżeli powierzchnia S_1 pokrywa się z zewnętrzną powierzchnią ciała, problem wydaje się być podobny do klasycznego zagadnienia początkowo-brzegowego z warunkiem brzegowym I rodzaju. W rzeczywistości jest to zagadnienie innego rodzaju, bowiem w rozwiązaniu nie występuje warunek początkowy. Co więcej, nawet moment czasowy rozpoczęcia obserwacji zjawiska może pozostać nieznany. Jak się wydaje, ten typ zagadnienia może mieć duże znaczenie praktyczne. Często bowiem spotykamy się z potrzebą wyznaczenia pola temperatury wewnątrz ciała na podstawie znajomości temperatury powierzchni dla pewnych, czasami przypadkowych momentów czasu. Przykładem tego może być pole temperatury wewnątrz wlewka stygnącego swobodnie przed walcowaniem, albo nawet ogrzewanego w piecu, jeżeli nie jest znany model matematyczny przepływu ciepła w piecu.

Zagadnienie nazwano zadaniem ekstrapolacji, jeżeli problem polega na ekstrapolacji rozwiązania poza kontur S_1 . Jest to klasyczne graniczne zadanie odwrotne.

Rozwiązanie układu równań (3) jest możliwe, jeżeli liczba równań jest równa liczbie nieznanych funkcji. Warunek ten jest dostateczny tylko dla zadań jednowymiarowych lub wewnętrznych. Dla problemów ekstrapolacji występują dodatkowo ograniczenia w doborze punktów, w których jest mierzona temperatura. Na podobne ograniczenia wskazano w [3].

W dalszych rozważaniach przyjęto następujące oznaczenia:

- N - sumaryczna liczba węzłów różnicowych z wyjątkiem węzłów położonych na powierzchni zewnętrznej ciała,
 L - liczba węzłów różnicowych położonych na powierzchni zewnętrznej ciała,
 M - całkowita liczba węzłów, $M = N + L$.

Węzły wewnętrzne są numerowane od 1 do N , a węzły położone na powierzchni zewnętrznej $N + 1, N + 2, \dots, N + L$.

Ponadto oznaczono:

- J - wektor L -elementowy zawierający indeksy węzłów siatki różnicowej, w których przebieg temperatury jest znany,
 T - wektor M -elementowy zawierający przebiegi temperatur we wszystkich węzłach, a więc także wartości $F_1(t)$ (por. (3)); L elementów tego wektora powinno być znaną funkcją,
 A - macierz $N \times M$ -elementowa, zawierająca współczynniki układu równań różnicowych (także wektory B_1).

Wprowadza się następnie macierz $M \times M$, nazwaną dalej H , składająca się z dwóch podmacierzy: A i D :

$$H = \begin{bmatrix} A \\ D \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Macierz D jest macierzą o wymiarach $L \times M$, zdefiniowaną następująco:

$$\begin{aligned} D_{i,m} &= 1 & \text{dla } m = J_i, \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad m = 1, 2, \dots, M \\ D_{i,m} &= 0 & \text{dla } m \neq J_i, \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad m = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (12)$$

Ostatecznie rozwiązanie zadania może być przedstawione w postaci:

$$T(t) = \sum_{k=0}^K \sum_{i=1}^L \Psi_{k,i} T_{J_i}^{(k)}(t), \quad (13)$$

gdzie $\psi_{k,i}$ są wektorami M -elementowymi, spełniającymi układy równań:

$$H \psi_{k,i} = P_{k,i}, \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (14)$$

oraz

$$P_{0,i,m} = 0 \quad \text{dla} \quad m \neq N + i, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$P_{0,i,i+N} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (15)$$

$$P_{k,i,m} = \psi_{k-1,i,m} \quad \text{dla} \quad m = 1, 2, \dots, N$$

$$P_{k,i,m} = 0 \quad \text{dla} \quad m = N + 1, N + 2, \dots, M$$

$$i = 1, 2, \dots, L$$

$$k = 1, 2, \dots, K$$

Liczba K jest równa N dla zadań ekstrapolacji i dąży do nieskończoności dla zadań wewnętrznych.

Wcześniej wskazano już, że istnieją pewne ograniczenia w doborze punktów dla wielowymiarowych zagadnień ekstrapolacji. Poprawność doboru punktów, w których znana jest odpowiedź temperaturowa, może być stwierdzona przez zbadanie rzędu macierzy H . Rząd tej macierzy powinien być równy M .

3.2. Metoda dyskretnych przekształceń spektralnych

Metoda dyskretnych przekształceń spektralnych, nazywana dalej metoda DTS, umożliwia rozwiązywanie pewnej klasy liniowych układów równań różniczkowych dając rozwiązanie w postaci ciągłej ze względu na zmienne niezależne występujące w operatorze różniczkowym.

W analizowanym przypadku metoda DTS została zastosowana do rozwiązania problemu opisanego równaniem (3).

Istotą metody DTS [8, 11] jest transformacja układu równań różniczkowych, w wyniku której otrzymuje się zespół pojedynczych równań różniczkowych w dziedzinie transformaty. Każde z równań różniczkowych rozwiązuje się oddzielnie, po czym dokonuje się retransformacji do dziedziny oryginału.

Transformację wyjściowego układu równań różniczkowych (3) przeprowadza się na podstawie wektorów własnych ψ_i i wartości własnych λ_i kwadratowej macierzy C . Wynikają one z rozwiązania następującego zagadnienia własnego:

$$C \psi_i = \lambda_i \psi_i \quad (16)$$

Wszystkie wektory własne φ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ tworzą tzw. macierz modalną W w postaci:

$$W = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N] \quad (17)$$

Macierz C powstała w wyniku dyskretyzacji samosprężonego operatora Laplace'a jest symetryczna. Z faktu tego wynikają istotne właściwości zagadnienia własnego (16) [12]:

- wartości własne λ_i macierzy C są rzeczywiste,
- istnieje N niezależnych wektorów własnych φ_i nawet w przypadku, gdy niektóre wartości własne są wielokrotne,
- macierz modalna W jest ortonormalna, tzn. zachodzi związek:

$$W^{-1} = W^T$$

gdzie:

W^T - macierz transponowana.

Równanie (3) może być zapisane w następującej postaci macierzowej:

$$\frac{dT}{dt} = C T + D T_S(t) \quad (19)$$

gdzie:

- D - macierz diagonalna o rozmiarze $N \times N$ zawierająca na głównej przekątnej stałe współczynniki,
- $T_S(t)$ - wektor kolumnowy zawierający L znanych funkcji będących odpowiedzią temperaturową;

$$T_S(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ T_{S1}(t) \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ T_{SL}(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Transformata \tilde{T} wektora temperatur T określona jest następująco:

$$\tilde{T} = W^{-1} T = W^T T \quad (21)$$

Podstawiając zależność (21) do równania (19) oraz wykorzystując twierdzenie o diagonalizacji macierzy C [8], otrzymuje się równanie macierzowe w postaci:

$$\frac{d\tilde{T}(t)}{dt} = \text{Diag } \lambda \tilde{T}(t) + D^* T_S(t) \quad (22)$$

gdzie:

$\text{Diag } \lambda$ - macierz diagonalna zawierająca na głównej przekątnej wartości własne macierzy C ,

$$D^* = W^T D \quad (23)$$

Każde z równań układu (22) może być zapisane następująco:

$$\frac{d\tilde{T}_i(t)}{dt} = \lambda_i \tilde{T}_i(t) + (D^* T_S(t))_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (24)$$

Równania typu (24) są niezależne i mogą być rozwiązane oddzielnie. Całka ogólna równania (24) ma znaną postać:

$$\tilde{T}_i(t) = e^{\lambda_i t} \tilde{T}_{0i} + e^{\lambda_i t} \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} (D^* T_S(\tau))_i d\tau \quad (25)$$

gdzie:

$$\tilde{T}_{0i} = \psi_i T_0 \quad (26)$$

$$(D^* T_S(\tau))_i = \sum_{j=1}^N D_{ij}^* T_{Sj}(\tau) \quad (27)$$

Suma występująca w zależności (27) zawiera jedynie L niezerowych składników.

Rozwiązanie klasycznego zagadnienia brzegowego polegałoby na wyznaczeniu całek występujących po prawej stronie równania (25), obliczeniu wszystkich elementów wektora transformat \tilde{T}_i , a następnie retransformacji danej zależności:

$$T(t) = W \tilde{T}(t) \quad (28)$$

Metoda rozwiązania analizowanego zagadnienia odwrotnego polega na takim przekształceniu równań (25), aby wyeliminować z nich nieznaną kierunek początkowy T_0 . Oczywiście taka eliminacja warunku początkowego może prowadzić do celu jedynie po wykorzystaniu pewnych dodatkowych informacji, jak na przykład wartości pochodnych odpowiedzi temperaturowych względem czasu.

Proponowane rozwiązanie zagadnienia odwrotnego opiera się na koncepcji metody szeregów pochodnych [7]. Całkując wyrażenie występujące po prawej stronie zależności (25) nieskończoną liczbę razy, otrzymuje się ostatecznie następującą zależność określającą $\tilde{T}_i(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i(t) \cong e^{\lambda_i t} \tilde{T}_{0i} - \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_i^{-1})^{k+1} \sum_{j=1}^L D_{ij}^* T_{Sj}^{(k)}(t) + \\ + e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_i^{-1})^{k+1} \sum_{j=1}^L D_{ij}^* T_{Sj}^{(k)}(0) \end{aligned} \quad (29)$$

gdzie:

$T_{Sj}^{(k)}(t)$ - k-ta pochodna odpowiedzi temperaturowej względem czasu.

Przyjmując, że szeregi występujące w (29) są zbieżne, pominięto ostatni składnik zawierający całkę typu:

$$\theta(t) = (\lambda_i^{-1})^{k+1} \int_0^t e^{\lambda_i \tau} \sum_{j=1}^L D_{ij}^* T_{Sj}^{(k)}(\tau) d\tau \quad (30)$$

Zbieżność omawianych szeregów wynika z następujących faktów:

- udowadnia się [8], że w analizowanym przypadku (wyłącznie warunki brzegowe I i II rodzaju) wartości własne zagadnienia spełniają warunek:

$$\lambda_i < -1 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (31)$$

- zakłada się, że pochodne odpowiedzi temperaturowej względem czasu są ograniczone.

Wyrażenie (29) zawiera w dalszym ciągu niewiadomą wartość transformaty warunku początkowego \tilde{T}_{0i} . Wielkość ta może być wyeliminowana, jeżeli dowiezie się słuszności następującego twierdzenia:

$$-\tilde{T}_{0i} = -\tilde{T}_i(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_i^{-1})^{k+1} \sum_{j=1}^L D_{ij}^* T_{Sj}^{(k)}(0) \quad (32)$$

Dowód twierdzenia (32) przedstawiony jest w pracy [8].

Podstawiając (32) do zależności (29), otrzymuje się ostatecznie rozwiązanie w dziedzinie transformaty:

$$\tilde{T}_i(t) = - \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_i^{-1})^{k+1} \sum_{j=1}^L D_{ij}^* T_{S_j}^{(k)}(t) \quad (33)$$

Rozwiązanie problemu dla wszystkich węzłów podziału różnicowego można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\tilde{T}(t) = - \sum_{k=0}^{\infty} [(\text{Diag } \lambda)^{-1}]^{k+1} W^T D T_S^{(k)}(t) \quad (34)$$

Rozwiązanie w dziedzinie oryginału wynika z zależności (28) i ma postać:

$$T(t) = - W \sum_{k=0}^{\infty} (\text{Diag } \lambda)^{-1}^{k+1} W^T D T_S^{(k)}(t) \quad (35)$$

Uzyskane rozwiązanie wyraża się jako suma szeregu, którego składniki zawierają kolejne pochodne odpowiedzi temperaturowej według czasu. Podobnie jak w zależności (13) nie występuje w rozwiązaniu (35) jawna zależność od warunku początkowego.

Zasadnicza różnica pomiędzy rozwiązaniami (13) i (35) polega na sposobie wyznaczania współczynników odpowiednich szeregów. W przypadku metody DTS jest to o tyle proste, że rozwiązanie opiera się na znajomości wartości i wektorów własnych wyjściowej macierzy C , które obliczane są za pomocą standardowych podprogramów. Unika się w ten sposób konieczności tworzenia i rozwiązywania dodatkowych układów równań, jak to ma miejsce w przypadku bezpośredniej metody szeregów pochodnych.

Algorytm metody DTS daje się bardzo prosto zaprogramować na emc niezależnie od tego, czy zagadnienie jest jedno- lub wielowymiarowe, co jest bez wątpienia istotną zaletą metody.

Na podstawie zależności (35) mogą być rozwiązywane dowolne zagadnienia wewnętrzne, tzn. takie, w których poszukuje się pola temperatury wewnątrz pewnego zamkniętego kontura S_1 . Kontur S_1 może być rzeczywistą powierzchnią zewnętrzną ciała, ale może być również dowolną powierzchnią wyodrębnioną wewnątrz ciała.

Obliczenia potwierdziły przydatność stosowania metody DTS do rozwiązywania omawianej klasy zagadnień odwrotnych. Przykładowe wyniki obliczeń przedstawiono w rozdziale 5.

4. WYZNACZANIE POCHODNYCH

Odwrotne zadania przewodzenia ciepła należą do źle uwarunkowanych. W przypadku rozwiązań prezentowanych w niniejszym artykule źle uwarunkowanie ujawnia się przy wyznaczaniu pochodnych. Ten problem numeryczny wymaga zatem szczególnej uwagi.

Wspomniano już, że w ostatnich latach opracowano wiele procedur, za pomocą których można efektywnie rozwiązywać zadania źle uwarunkowane. Spośród wielu metod, które autorzy niniejszego artykułu testowali [8], najlepsza okazała się metoda regularyzacji [10, 13]. Ponieważ metoda ta jest szczególnie dostosowana do rozwiązywania źle uwarunkowanych równań całkowych, problem różniczkowania funkcji został przetransponowany do rozwiązywania równania całkowego Volterry I rodzaju. Pochodna funkcji:

$$Z = d^k F/dt^k$$

może być bowiem traktowana jako rozwiązanie równania całkowego:

$$\int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} Z(s) ds = W(t) \quad (36)$$

gdzie:

$$W(t) = F(t) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \left. \frac{d^n F(t)}{dt^n} \right|_{t=t_0}$$

Powyższe równanie całkowe może być rozwiązane za pomocą metody regularyzacji. Parametr regularyzacji, który występuje w tej procedurze, może być wyznaczony za pomocą algorytmu quasi-optymalnego [13]. Obliczenia wykazały jednak, że wpływ tego parametru na wyniki obliczeń jest w szerokim przedziale wartości nieznaczny. Całkę występującą w równaniu całkowym obliczano za pomocą metody trapezów. Jakkolwiek metoda regularyzacji pozwala uzyskiwać stabilne wartości pochodnych, to im wyższy rząd pochodnej, tym mniejsza dokładność ich wyznaczania. Dlatego liczba wyrazów szeregu w rozwiązaniu [13] powinna być ograniczona.

5. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

Celem zbadania właściwości prezentowanych rozwiązań pod względem stabilności i zbieżności wykonano szereg obliczeń dla rozmaitych przykładów. Dane do tych obliczeń czerpano z rozwiązania klasycznych zadań początkowo-brzegowych. Wyniki liczbowe dla tych rozwiązań zaburzane były następ-

nie pewnymi przypadkowymi błędami, które miały symulować błędy pomiarowe. Ostatecznie wewnętrzne odpowiedzi temperaturowe były opisywane równaniem:

$$T_i(t) = \bar{T}_i(t) + (1 - 2r)\delta, \quad (37)$$

gdzie:

- $\bar{T}_i(t)$ - dokładna wartość temperatury,
- δ - błąd maksymalny,
- r - liczba pseudolosowa, generowana według rozkładu równomiernego z przedziału $[-1, 1]$.

Wyniki niektórych przykładów zamieszczono poniżej.

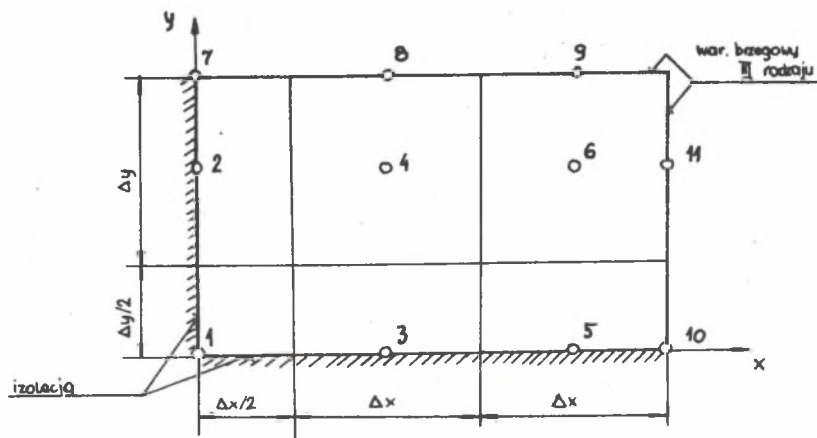
5.1. Przykład 1

Przykład ten dotyczy dwuwymiarowego pola temperatury w płycie, pokazanej na rys. 2. Założono, że powierzchnie $x = 0$ i $y = 0$ są adiabatyczne, a na pozostałych powierzchniach przy rozpatrywaniu zagadnienia prostego założono warunek brzegowy III rodzaju, przy czym liczby Biota zdefiniowano odpowiednio:

$$Bi_x = \frac{h_x d_x}{\lambda}, \quad Bi_y = \frac{h_y d_y}{\lambda},$$

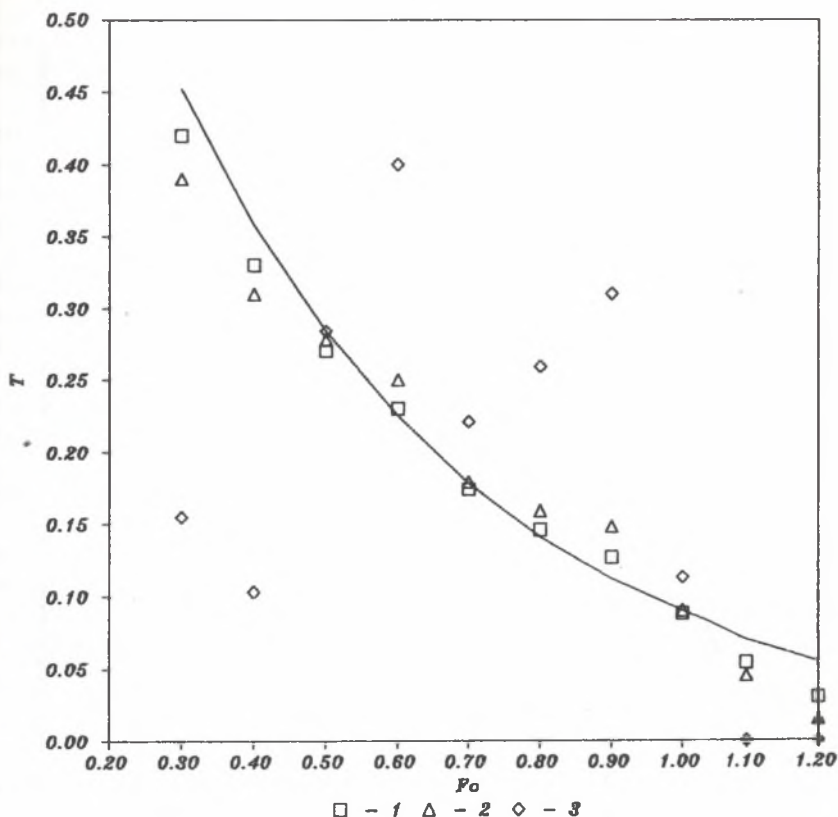
gdzie:

- h_x, h_y - współczynnik wnikania ciepła na odpowiednich powierzchniach,
- d_x, d_y - rozmiary płyty,
- λ - współczynnik przewodzenia ciepła.



Rys. 2. Siatka różnicowa dla przykładu 1

Fig. 2. Differential grid for the 1-st example



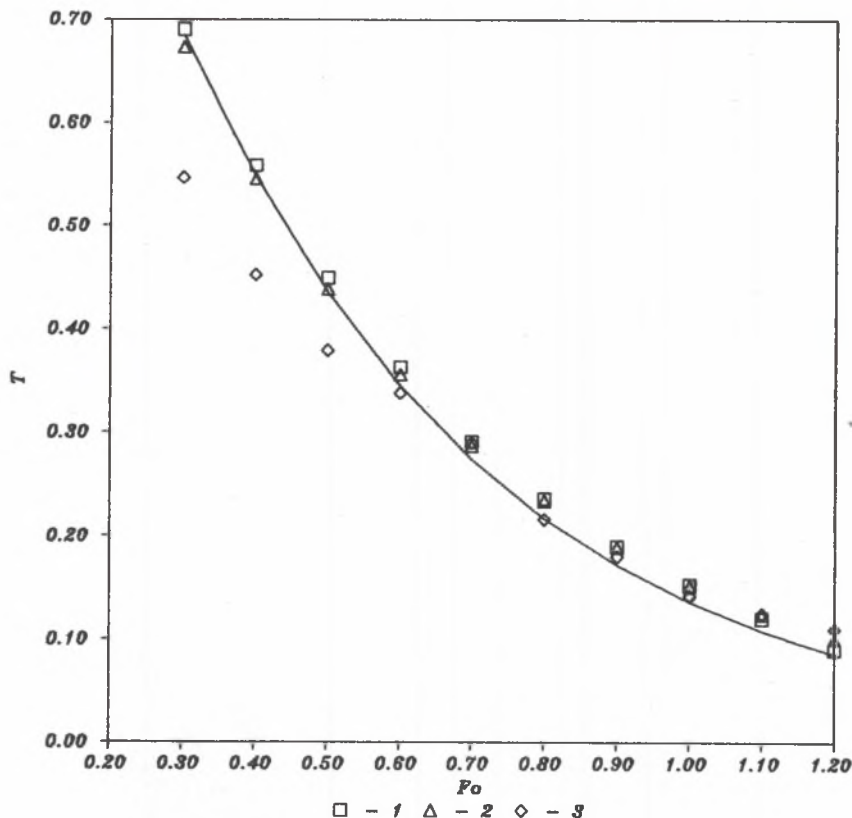
Rys. 3. Rozwiązanie zadania ekstrapolacji dla przykładu 1
 Fig. 3. Solution of the extrapolation problem for the 1 st example

Wybrane rezultaty dla tak sformułowanego problemu ekstrapolacji przedstawiono na rys. 3. Odnoszą się one do przypadku $Bi_x = Bi_y = 2$, początkowy rozkład jest wyrównany i równy jedności, a temperatura ośrodka, występująca w warunku brzegowym III rodzaju, jest równa zero. Liczbę Fouriera zdefiniowano następująco:

$$Fo = \frac{a \cdot t}{d_x^2} .$$

Bezwymiarowy krok czasu przyjęto równy 0.1. Obserwację odpowiedzi temperaturowej rozpoczęto zaś od $Fo = 0,3$. W tym momencie czasu rozkład temperatury w płycie odbiegał już od wyrównanego.

Przebieg temperatury w węźle nr 5 przedstawiono na rys. 3. Linia ciągła przedstawia wyniki dokładne dla zadania prostego. Punkty oznaczone



Rys. 4. Rozwiązanie zadania wewnętrznego dla przykładu 1

Fig. 4. Solution of internal problem for the 1st example

nr 1 odpowiadają $\delta = 0,005$, nr 2 $\delta = 0,01$, nr 3 $\delta = 0,05$. Uzyskane rezultaty są dość stabilne i dokładne, z wyjątkiem przypadku nr 3. Warto jednak zauważyć, że różnice między odpowiedziami temperaturowymi dla kolejnych punktów są zbliżone do wartości członu $(1 - 2r)\delta$ w równaniu definiującym odpowiedź temperaturową, co może tłumaczyć takie wyniki.

Na rys. 4 przedstawiono rezultaty dla zadania wewnętrznego przy tych samych parametrach. Odpowiedzi temperaturowe rejestrowano w punktach 7, 8, 9, 10, 11. Na rys. 4 przedstawiono natomiast przebieg temperatury dla węzła nr 1. Uzyskane rezultaty są bardziej stabilne i dokładne niż dla zadania ekstrapolacji.

Obliczenia wykazały, że stabilność i dokładność wyników zależy od wielu czynników. Do głównych należą: błąd maksymalny δ , liczba Biota i krok czasu. Z obliczeń wynika, że im większa liczba Biota, tym mniejsza dokład-

ność i stabilność wyników. Dla zagadnień dwuwymiarowych zadowalające rezultaty uzyskano dla liczb Biota nie przekraczających 4-6.

Problem wyboru kroku czasu jest bardziej złożony. Im większy błąd δ , tym większe powinny być kroki czasu. Z drugiej strony, im większe kroki czasu, tym gorsza aproksymacja odpowiedzi temperaturowej, szczególnie dla dużych liczb Biota. Zadowalające rezultaty uzyskano dla kroków czasu z przedziału $[0,05-0,1]$.

Szereg opisywany równaniem (13) ograniczono do 6 wyrazów, co oznacza, że pochodne wyznaczono tylko do piątego rzędu. Okazało się jednak, że dla zakresu parametrów, który opisano powyżej, wystarczającą dokładność można uzyskać przy 4 lub 5 wyrazach szeregu. Nie ulega jednak wątpliwości, że dla wielu przypadków, zwłaszcza dla zjawisk przebiegających z dużą intensywnością, 6 wyrazów może nie wystarczyć dla uzyskania pożądanej dokładności obliczeń. Zwiększanie liczby wyrazów szeregu także może nie poprawić rezultatów z powodów omówionych w punkcie 4. Do tych przypadków prezentowana metoda nie może być stosowana.

Wpływ parametru regularyzacji na wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 5 i 6. Prezentowane wyniki dotyczą problemu wewnętrznego, który został powyżej opisany. Rysunek 5 dotyczy $\delta = 0,05$, a rysunek 6 dotyczy $\delta = 0,005$. Linia ciągła odpowiada rozwiązaniu dokładnemu. Punkty oznaczone nr 1 odpowiadają następującym wartościom parametru regularyzacji (dla kolejnych pochodnych):

$$\alpha_1 = 100 \quad \alpha_2 = 100 \quad \alpha_3 = 100 \quad \alpha_4 = 100$$

- nr 2

$$\alpha_1 = 0,001 \quad \alpha_2 = 0,001 \quad \alpha_3 = 0,001 \quad \alpha_4 = 0,001$$

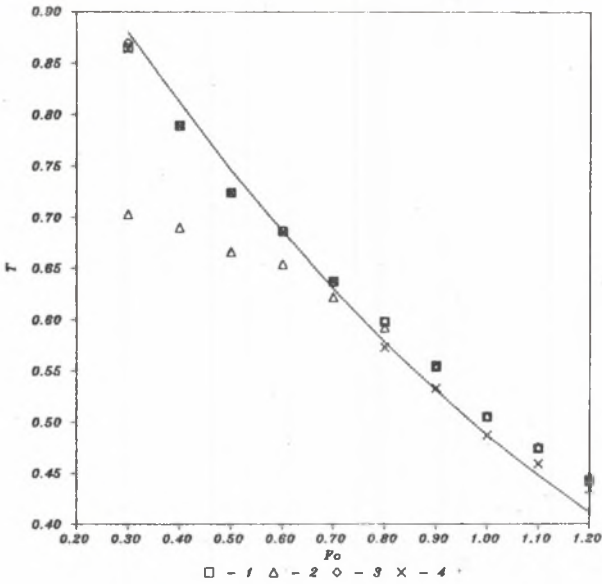
- nr 3

$$\alpha_1 = 100 \quad \alpha_2 = 10 \quad \alpha_3 = 0,1 \quad \alpha_4 = 0,1$$

- nr 4

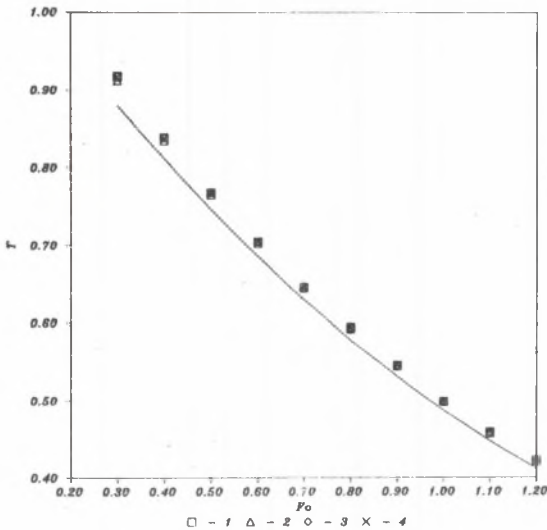
$$\alpha_1 = 0,1 \quad \alpha_2 = 0,1 \quad \alpha_3 = 1,0 \quad \alpha_4 = 1,0$$

Z rysunków tych wynika, że wpływ parametru regularyzacji na wyniki obliczeń rośnie ze wzrostem błędu δ , ale w szerokim zakresie jest nieznaczny.



Rys. 5. Wpływ parametru regularyzacji na wyniki obliczeń dla przykładu 1 ($\delta = 0,05$)

Fig. 5. Effect of the regularization parameter on the calculation results for the 1st example ($\delta = 0,05$)

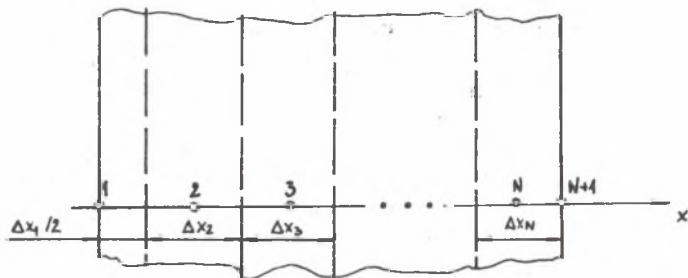


Rys. 6. Wpływ parametru regularyzacji na wyniki obliczeń dla przykładu 1 ($\delta = 0,005$)

Fig. 6. Effect of the regularization parameter on the calculation results for the 1st example ($\delta = 0,005$)

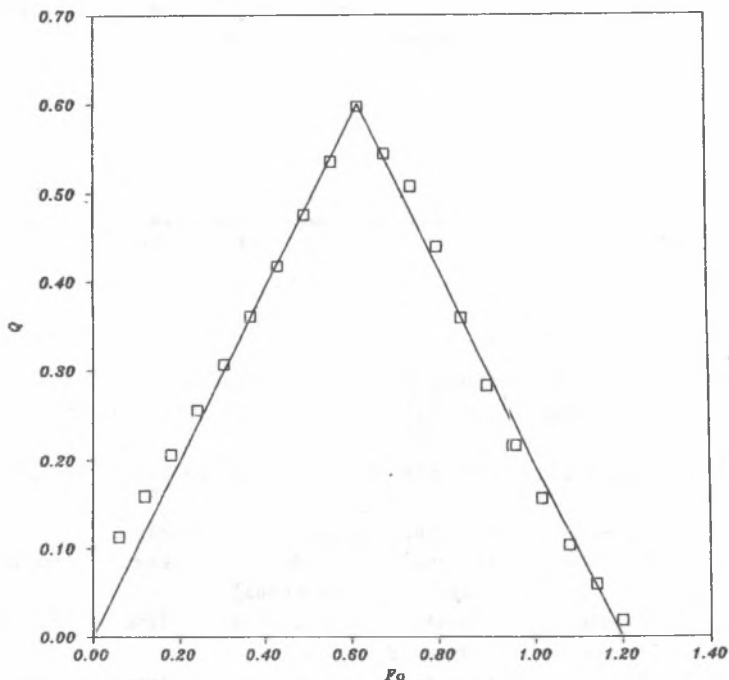
5.2. Przykład 2

Przykład 2 jest szeroko dyskutowany w [1]. Traktuje się go jako szczególnie trudny test dla metod rozwiązywania zadań odwrotnych. Dotyczy on przypadku, w którym gęstość strumienia ciepła na powierzchni ciała zmienia się według kształtu trójkąta. Jest to przypadek jednowymiarowy, w którym odpowiedź temperaturowa rejestrowana jest w punkcie 1 (por. rys. 7),



Rys. 7. Siatka różnicowa dla przykładu 2

Fig. 7. Differential grid for the 2nd example



Rys. 8. Obliczona gęstość strumienia ciepła dla przykładu 2

Fig. 8. Calculated heat flux density for the 2nd example

a wyznacza się strumień ciepła w punkcie $N + 1$. Symulowane wartości odpowiedzi temperaturowej, zaburzone błędami, zaczerpnięto z [1]. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 8. Przyjęty w obliczeniach krok czasu jest równy 0,06. Z rysunku wynika bardzo dobra dokładność uzyskanych wyników obliczeń. Rozwiązanie uzyskano metodą bezpośrednią.

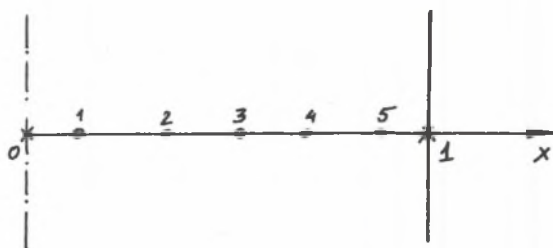
5.3. Przykład 3

Wyniki obliczeń przedstawione w rozdziale 5.1 i 5.2 zostały uzyskane przy zastosowaniu klasycznej metody szeregów pochodnych. W niniejszym rozdziale zostaną zaprezentowane wyniki uzyskane za pomocą metody dyskretnej transformacji spektralnej.

Weryfikację numeryczną metody przeprowadzono na przykładzie zagadnienia jednowymiarowego. W takim bowiem przypadku wpływ analizowanych parametrów na dokładność rozwiązania jest w najmniejszym stopniu zakłócony przez kształt obszaru.

Rozpatrzono nieustalone pole temperatury w płycie symetrycznej i niesymetrycznej. Podział różnicowy płyty przedstawiono na rys. 9.

W każdym analizowanym przypadku zakres zmienności zredukowanej temperatury w płycie wynosił $T \in [0, 1]$. Przyjęto do analizy trzy wartości bezwzględnego błędu pomiaru δ : 0,005, 0,01 oraz 0,05. Odpowiada to minimalnej wartości błędu względnego odpowiednio: 0,5%, 1% i 5%.



Rys. 9. Podział różnicowy płyty jednowymiarowej

Fig. 9. Differential division of one - dimensional plate

W większości przypadków obliczenia prowadzono dla jednego tylko punktu pomiarowego (punkt B).

Analizie poddano zagadnienie z jednym warunkiem brzegowym III rodzaju dla brzegu $x = 1$ (płyta symetryczna) bądź z dwoma warunkami III rodzaju na brzegach $x = 0$ i $x = 1$ (płyta niesymetryczna).

Przyjęto, że początkowa temperatura w płycie jest wyrównana i wynosi $T_0 = 0$, natomiast temperatura płynu $T_{p1} = 1$.

Wartości pochodnych odpowiedzi temperaturowej występujących w rozwiązaniu (33) obliczano za pomocą metody opisanej w rozdziale 4.

Pochodne wyznaczono na podstawie stałej, wynoszącej 10 liczby punktów czasowych. W obliczeniach ograniczono się do wyznaczenia pochodnych do czwartego rzędu włącznie.

Na prezentowanych rysunkach, ilustrujących wyniki obliczeń, przedstawione jest każdorazowo rozwiązanie dokładne (linia ciągła) oraz uzyskane rozwiązanie zagadnienia odwrotnego dla trzech wartości błędu pomiaru δ . Przedstawione wyniki obrazują więc równocześnie wpływ dokładności pomiaru i analizowanego parametru na dokładność metody. Jak już bowiem wspomniano wcześniej, decydującym czynnikiem określającym przydatność metody rozwiązania zagadnienia odwrotnego jest jej wrażliwość na błędy pomiarowe.

Przebadano wpływ następujących najistotniejszych parametrów na dokładność metody:

- błąd pomiaru δ ,
- liczba Biota Bi ,
- krok czasowy ΔFo ,
- wartość parametru regularyzacji α ,
- liczba punktów pomiarowych.

Na rysunkach 10 i 11 przedstawiono wyniki obliczeń temperatury w osi symetrii płyty dla liczb Biota $Bi = 1$ oraz $Bi = 3,5$ (jeden punkt pomiarowy na powierzchni $x = 1$).

Dokładność wyników pogarsza się wraz ze zwiększaniem liczby Biota. Wynika to z faktu, że dla dużych liczb Biota może wystąpić zjawisko "nasyce-
nia" wyników pomiarów polegające na tym, że po upływie stosunkowo krótkiego czasu od początku trwania zjawiska wartości mierzonej temperatury ulegają niewielkim już zmianom.

W przypadku gdy zmiany te są na przykład mniejsze od wartości błędu δ , obliczone wartości pochodnych obarczone są już bardzo dużym błędem (jest to wyraźnie widoczne dla błędu $\delta = 0,05$). Dla wartości błędu $\delta = 0,005$ i $0,01$ uzyskano w obydwóch przypadkach dużą zgodność z rozwiązaniem dokładnym.

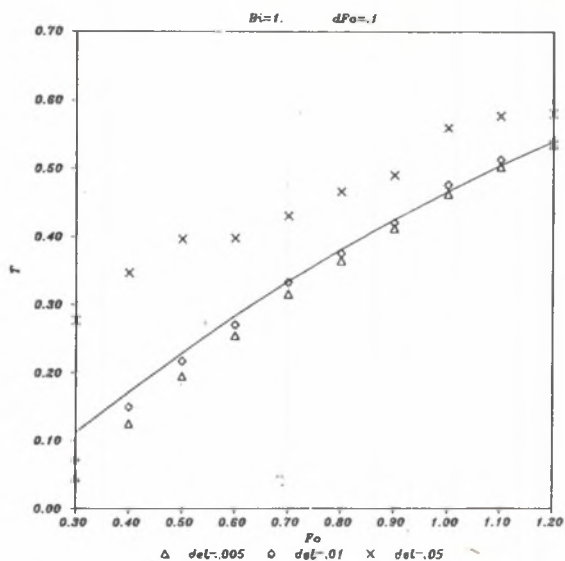
Pomiary temperatury w wybranych punktach ciała (odpowiedź temperaturowa) dokonywane są w odstępach czasowych ΔFo . Obliczenia wykazały, że dokładność metody silnie zależy od wielkości kroku próbkowania ΔFo (dokładność zmniejsza się wraz ze zmniejszeniem wartości ΔFo).

Przyczyna tego zjawiska jest następująca. Jeżeli rozpatrzyć średnią wartość, np. pierwszej pochodnej odpowiedzi temperaturowej w przedziale ΔFo , to dana jest ona zależnością:

$$\frac{dT_S}{dFo} \approx \frac{T_S^{k+1} + \delta_{k+1} - T_S^k - \delta_k}{\Delta Fo}$$

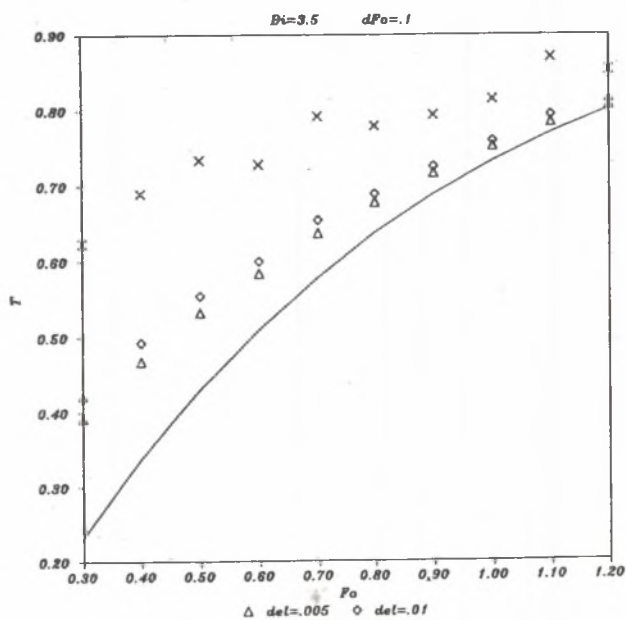
gdzie:

- T_S - dokładna wartość mierzonej temperatury,
- δ - błąd pomiaru,
- k - oznaczenie chwili czasu.



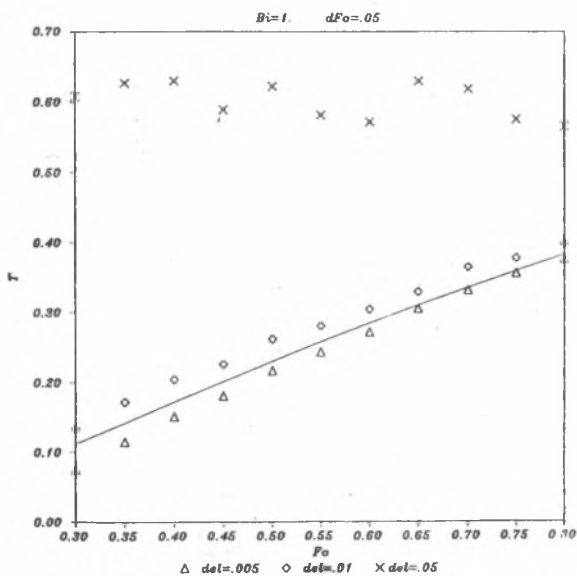
Rys. 10. Przebieg temperatury w osi symetrii płyty

Fig. 10. Temperature diagram along the symmetry axis of the plate

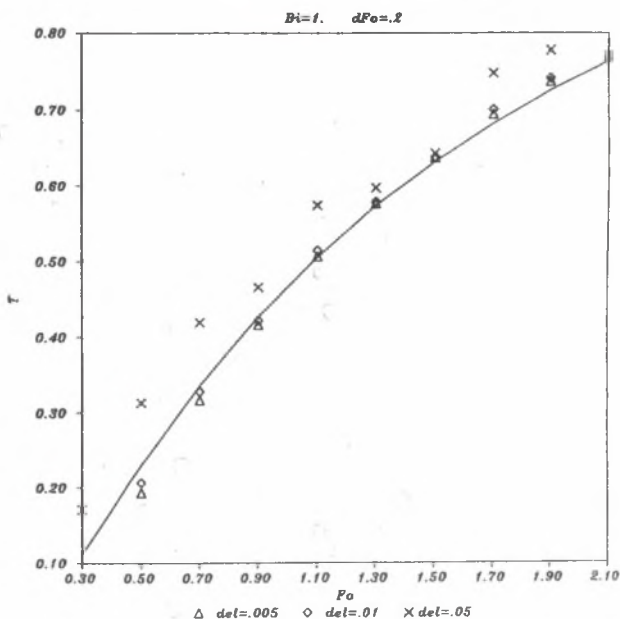


Rys. 11. Przebieg temperatury w osi symetrii płyty

Fig. 11. Temperature diagram along the symmetry axis of the plate



Rys. 12. Przebieg temperatury w osi symetrii płyty
 Fig. 12. Temperature diagram along the symmetry axis of the plate



Rys. 13. Przebieg temperatury w osi symetrii płyty
 Fig. 13. Temperature diagram along the symmetry axis of the plate

W przypadku gdy ΔFo jest bardzo małe, różnica $T_S^{k+1} - T_S^k$ staje się również mała. Wtedy o wartości pochodnej decydują praktycznie wyłącznie błędy pomiaru δ_{k+1} i δ_k , które w skrajnym przypadku mogą się sumować. Błąd obliczenia pierwszej pochodnej przenosi się z kolei na pochodne wyższych rzędów.

Przedstawiony problem ilustrują wyraźnie rysunki 12 i 13, gdzie przedstawiono wyniki obliczeń temperatury w płaszczyźnie symetrii płyty dla $\Delta Fo = 0,05$ i $0,2$. Dla błędów $\delta = 0,005$ i $0,01$ nie obserwuje się znacznego wpływu ΔFo na dokładność obliczeń (przy czym dokładność jest większa dla większej wartości ΔFo).

Różnice stają się już jednak wyraźne dla błędów $\delta = 0,05$, co potwierdza tezę o przyczynie powstawania dużych błędów przy małych wartościach Fo . Należy jednak pamiętać, że przyjmowanie zbyt dużych wartości kroku próbkowania ΔFo może prowadzić do utraty informacji o przebiegu mierzonej temperatury.

Prezentowane rezultaty stanowią część wyników badań dotyczących weryfikacji numerycznej przedstawionej metody dyskretnej transformacji spektralnej (część z nich przedstawiona jest w pracy [8]).

Należy również podkreślić, że prezentowane wyniki w każdym przypadku dotyczyły punktów, w których uzyskiwano najmniejszą dokładność obliczeń.

Na wielkość uzyskiwanych błędów miał też niewątpliwie niekorzystny wpływ rodzaj generatora liczb pseudolosowych zastosowany do symulacji błędów pomiarów. Generator ten dawał w każdym przypadku tę samą sekwencję kolejnych liczb pseudolosowych (wartość r w zależności (37)), co było celowe z uwagi na możliwość porównania różnych wariantów obliczeniowych. Jednocześnie jednak sekwencja pierwszych 10 liczb wykazywała silną asymetrię wokół wartości średniej, co miało niewątpliwie niekorzystny wpływ na dokładność wyników. Dla dużej wartości δ wyniki symulowanych pomiarów pozbawione już były często sensu fizycznego.

Przeprowadzone obliczenia wykazały przydatność stosowania algorytmu DTC do rozwiązywania pewnej klasy odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła. Sam algorytm cechuje się dużą zwartością i jest stosunkowo prosty do zaprogramowania na EMC.

6. WNIOSKI

Dowolna metoda numeryczna może znaleźć praktyczne zastosowanie, jeżeli pozwala uzyskiwać stabilne i dokładne wyniki dla danych obciążonych błędami. Metody prezentowane w niniejszym artykule pozwalają uzyskiwać takie rezultaty. Główne ograniczenia w stosowaniu prezentowanych metod związane są z liczbą wyrazów w szeregach (13) lub (35), maksymalnym błędem i dopuszczalnym krokiem czasu. Kolejnym ograniczeniem dla wielowymiarowych zadań ekstrapolacji jest rozmieszczenie punktów pomiarowych. Prezentowane metody mogą znaleźć zastosowanie także dla przypadków nieliniowych.

W tym celu należy rozpatrywany przedział czasu podzielić na podprzedziały, w których właściwości termofizyczne ciała można uważać za stałe i rozwiązywać problem niezależnie w tych podprzedziałach. Ponieważ prezentowane rozwiązanie nie wymaga informacji o warunku początkowym, takie postępowanie nie wnosi żadnych dodatkowych trudności.

Metoda szeregów pochodnych może być także stosowana w przypadku nadmiaru danych dzięki zastosowaniu rachunku wyrównawczego. Ten sposób postępowania opisano szczegółowo w [7].

LITERATURA

- [1] Beck J.V. i in.: Inverse Heat Conduction, A Wiley-Interscience Publ., New York, 1985.
- [2] Matzewity J., Multanowskij A.: Identifikacja w zadaczach ciepłowodności. Izd. "Naukowa Dumka", Kijew 1982.
- [3] Kozdoba L., Krukowskij P.: Metody rieszenija obratnych zadacz ciepłowodności. Izd. "Naukowa Dumka", Kijew 1982.
- [4] Tichonow A.: Obratnyje zadaczi ciepłowodności. Inż. Fiz. Żurnał, 29, no 1, 7-12 (1975).
- [5] Burggraf O.: An Exact Solution of the Inverse Problem in Heat Conduction - Theory and Applications. J. Heat Transfer, 86C, 373-382 (1964).
- [6] Tiomkin A.: Obratnyje metody ciepłowodności, Izd. "Energija", Moskwa 1973.
- [7] Kurpisz K.: Wyznaczanie pola temperatury w ciałach stałych na podstawie obserwacji temperatury lub gęstości strumienia ciepła w wybranych punktach ciała. ZN Pol. Śl., s. Energetyka, z. 84, Gliwice 1984.
- [8] Kurpisz K., Skorek J.: Zadania odwrotne teorii przewodzenia ciepła. Sprawozdanie z pracy nauk.-bad. realizowanej w ramach problemu O2.18, zad. 2.2.1.1., Gliwice 1986-87.
- [9] Gdula S.J. (red.): Przewodzenie ciepła. PWN, Warszawa 1934.
- [10] Szargut J.: Metody numeryczne w obliczeniach cieplnych pieców przemysłowych. Wyd. Śląsk, Katowice 1977.
- [11] Skorek J.: Zastosowanie teorii spektralnej operatorów dyskretnych do rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła. Materiały XIII Zjazdu Termodynamików, Kozubnik 1987.
- [12] Gille J.Ch., Clique M.: Rachunek macierzowy i wprowadzenie do analizy funkcjonalnej. Skrypt Politechniki Śl., Gliwice 1977.
- [13] Tichonow A., Arsenin W.: Solutions of IU-Posed Problems. V.H. Winston and Sons, Washington D.C., 1977.
- [14] Tichonow A. i in.: Rieularizujuszczije algoritmy i apriornaja informacija. Izd. "Nauka", Moskwa 1983.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Р е з ю м е

В работе представлен метод решения некоторого класса обратных задач теплопроводности с неизвестным начальным условием. Решение дано в виде ряда с производными по температуре относительно времени. Для определения этих производных предложен метод регуляризации. В работе даются примеры и иллюстрации пригодности метода.

NUMERICAL METHOD OF SOLVING CERTAIN CASES OF INVERSE PROBLEMS
OF HEAT CONDUCTION

S u m m a r y

Method of solving certain cases of inverse problems of heat conduction with unknown initial condition is presented in the paper. Solution has been obtained in the form of series of derivatives of temperature. The method of regularization has been suggested for determining values of these derivatives. Examples illustrating usability of this method are included in the paper.