ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: ENERGETYKA z.107 Nr kol. 1041

Krzysztof GRYSA,
Henryk KAMIŃSKI,
Andrzej FRĄCKOWIAK

Instytut Techniki Stosowanej
Politechniki Poznańskiej[x)]

NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE PEWNEGO DWUWYMIAROWEGO ZAGADNIENIA ODWROTNEGO PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

Streszczenie. Zbudowano algorytm rozwiązywania dwuwymiarowego zagadnienia odwrotnego przewodnictwa cieplnego, wykorzystując stowarzyszone równanie całkowe dla równania Helmholtza. Jako przykład rozwiązano pewne zagadnienia odwrotne w kwadracie. Wyniki ilustrują przydatność takiego podejścia do tego zagadnienia.

1. WSTĘP

Jednowymiarowe zagadnienia odwrotne przewodnictwa cieplnego mają bogatą literaturę, jakkolwiek poza rozwiązaniem Burggrafa [1] nie spotyka się rozwiązań ścisłych tych zagadnień. Rozwiązania przybliżone zagadnień jednowymiarowych prezentowane są w wielu pracach, a bogatą literaturę dotyczącą m.in. tych zagadnień można znaleźć w monografiach [2,3] czy w pracach [4,5]. Zagadnienia dwu- i trójwymiarowe rozważane były rzadko i bez większych sukcesów (por. np. [6,7]). Składały się na to zarówno problemy natury matematycznej (złe uwarunkowanie problemu), jak i numerycznej (w stosowanych metodach wymagana była bardzo duża pojemność pamięci operacyjnej komputera, jak również duża precyzja obliczeń). Prezentowane ostatnio w literaturze prace [8,9] podają rozwiązania zagadnień odwrotnych w dwóch i trzech wymiarach, lecz jest tam prezentowana szczególna metoda rozwiązywania, nie nadająca się do uogólnienia na dowolny obszar. Natomiast numeryczne rozwiązanie dwuwymiarowego zagadnienia odwrotnego w prostokącie, przedstawione w pracy [10], to wykorzystanie dynamicznego programowania do zagadnienia wyznaczania strumienia ciepła na brzegu obszaru.

W prezentowanej pracy przedstawiony jest algorytm rozwiązywania zagadnień odwrotnych w dwóch wymiarach, oparty na wykorzystaniu stowarzyszonych równań całkowych dla równania Holmholtza [11].

x) Praca wykonana w ramach CPBP nr 02.18, kierunek 2, zad. 2.2.1.2.

Algorytm ten wykorzystano do zbudowania programu testowego, za pomocą którego rozwiązano pewne zagadnienie odwrotne w kwadracie.

2. PODSTAWOWE WZORY

Szczegółowy opis metody przybliżonego rozwiązywania zagadnień odwrotnych przy wykorzystaniu stowarzyszonych równań całkowych dla równania Helmholtza przedstawiono w pracy [11]. Tu zatem ograniczymy się tylko do postawienia zagadnienia i podania podstawowych wzorów, wykorzystanych przy jego rozwiązywaniu.

Rozważmy równanie przewodnictwa cieplnego:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\right] T(\underline{\tilde{x}},t) = 0, \qquad (\underline{\tilde{x}},t)\in\tilde{\Omega}\times(0,t_K), \tag{1}$$

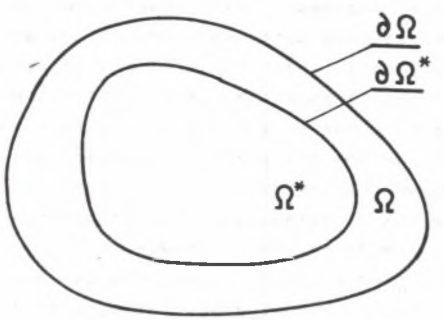
gdzie: $\tilde{\Omega}\subset E^2$ jest obszarem regularnym, a oznacza współczynnik dyfuzyjności temperaturowej, zaś $(0,t_K)$ jest przedziałem czasu, $t_K < +\infty$. T opisuje temperaturę względną, mierzoną od pewnej ustalonej temperatury odniesienia.

Załóżmy, że znany jest warunek początkowy dla temperatury w obszarze $\tilde{\Omega}$:

$$T(\underline{\tilde{x}},0) = \Theta_o(\underline{\tilde{x}}), \qquad \underline{\tilde{x}}\in\tilde{\Omega} \tag{2}$$

W miejsce warunków brzegowych, których nie znamy, przyjmujemy jako znane wartości temperatury na brzegu $\partial\tilde{\Omega}^*$ obszaru $\tilde{\Omega}^*\subset\tilde{\Omega}$ (rys. 1):

$$T(\underline{\tilde{x}}^*,t) = T^*(\underline{\tilde{x}}^*,t), \qquad (\underline{\tilde{x}}^*,t)\in\partial\tilde{\Omega}^*\times(0,t_K). \tag{3}$$



Rys. 1
Fig. 1

Funkcję T^* nazywamy wewnętrzną odpowiedzią temperaturową (WOT). Nie każda funkcja może opisywać WOT. Definicję WOT podano w pracy [12]; tutaj powiemy tylko, że musi być ona funkcją odpowiedniej klasy różniczkowalności.

Wielkością poszukiwaną jest pole temperatury w całym obszarze $\tilde{\Omega}$, a także na $\partial\tilde{\Omega}$ oraz strumień ciepła na $\partial\tilde{\Omega}$

Dyskretyzując zagadnienie po czasie można go sprowadzić do problemu rozwiązania układu równań różniczkowych Helmholtza o postaci [11]:

$$(\nabla^2 - p^2)\,\Theta_k(\underline{x}) = -\,p^2\Theta_{k-1}(\underline{x}), \qquad \underline{x}\in\Omega \qquad k=1,\dots,K, \tag{4}$$

(gdzie $p^2=1/\tau$, $\tau=a\Delta t/l^2$, Δt - krok czasowy, l - wymiar charakterystyczny obszaru $\tilde{\Omega}$, $\Omega = \tilde{\Omega}/l$, $\Theta_k(\underline{x})\approx \tilde{T}(x,k\Delta t)$, $\underline{x} = \tilde{x}/l$, $t_K=K\Delta t$), z warunkiem:

$$\Theta_k(x^*) = \Theta_k^*(\underline{x}^*), \qquad \underline{x}^*\in\partial\Omega^* \tag{5}$$

(gdzie: $\underline{x}^* = \tilde{\underline{x}}^*/l$, $\Omega^*=\tilde{\Omega}^*/l$). Oczywiście nie każda funkcja może opisywać prawą stronę związku (5), nazywaną dalej wewnętrzną odpowiedzią (WO). Definicja WO podana jest w pracy [12].

Układ funkcji $\{\Theta_k\}_{k=1,\dots,K}$ będzie stanowił przybliżone rozwiązanie zagadnienia odwrotnego.

Jest oczywiste, że dobór kroku czasowego oraz wielkości podobszaru Ω^* w stosunku do Ω będą miały wpływ na to, czy przybliżone rozwiązanie zagadnienia, reprezentowane przez układ funkcji $\{\Theta_k\}$, będzie bliskie rozwiązaniu ścisłemu. Dla zagadnień jednowymiarowych analizę wpływu kroku czasowego i wielkości obszaru Ω^* na dokładność i stabilność rozwiązania przybliżonego przedstawiono np. w pracach [13,14]. W tej pracy ograniczymy się do numerycznej analizy tego problemu w kwadracie i to tylko w zależności od wielkości obszaru Ω^* w stosunku do Ω.

Jak pokazano w pracy [11], aby rozwiązać układ równań (4) z warunkami (5), trzeba wyznaczyć pewną funkcję $h(\underline{\xi})$, $\underline{\xi}\in\partial\Omega$, z równania całkowego typu Fredholma I rodzaju, o postaci:

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\Omega} K_0(p|\underline{x}^*-\underline{\xi}|)\,h_k^H(\underline{\xi})\,dl(\underline{\xi}) = \Theta_k^*(\underline{x}^*) + \\ -\frac{p^2}{2\pi}\iint_{\Omega} K_0(p|\underline{x}^*-\underline{y}|)\,\Theta_{k-1}(\underline{y})\,dS(\underline{y}), \tag{6}$$

gdzie $K_0(.)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela II rodzaju, $k=1,\dots,K$. Funkcja Θ_{k-1} opisuje w sposób przybliżony temperaturę w obszarze w chwili $(k-1)\Delta t$.

Po wyznaczeniu funkcji h temperaturę w dowolnym punkcie $\underline{x}\in\Omega$ w chwili $k\Delta t$ wyznacza się ze wzoru:

$$\Theta_k(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\Omega} K_0(p|\underline{x}-\underline{\xi}|)\,h_k^H(\underline{\xi})\,dl(\underline{\xi}) + \\ +\frac{p^2}{2\pi}\iint_{\Omega} K_0(p|\underline{x}-\underline{y}|)\,\Theta_{k-1}(\underline{y})\,dS(\underline{y}). \tag{7}$$

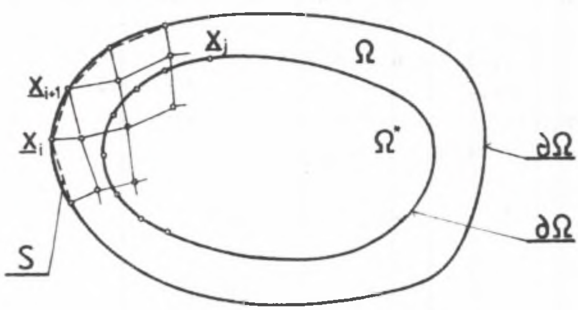
Sprawą zasadniczą jest zatem wyznaczenie funkcji $h_k(\underline{\xi})$, $\underline{\xi}\in\partial\Omega$. Funkcję tę będziemy wyznaczać numerycznie.

3. ROZWIĄZANIE RÓWNANIA CAŁKOWEGO

Wprowadźmy w obszarze Ω i na jego brzegu $\partial\Omega$ siatkę punktów. Dobór punktów jest niezależny od krzywej $\partial\Omega^*$, może natomiast wynikać z geometrii obszaru Ω (rys. 2). Kontur $\partial\Omega$ możemy teraz w przybliżeniu zastąpić konturem S, zaznaczonym na rys. 2 linią przerywaną, składającą się z odcinków prostych, zaś obszar Ω obszarem B, zawartym wewnątrz S. Tak więc:

$$\partial\Omega \approx S, \quad \Omega \approx B, \tag{8}$$

przy czym $S = \bigcup_{m=1}^{M} S_m$, gdzie S_m jest odcinkiem prostej i $S_m \cap S_n = 0$ dla $m \neq n$. Na każdym z odcinków S_m zakładamy stałość funkcji h_k, tzn. samą funkcję h_k przybliżamy funkcją schodkową wzdłuż konturu S.



Rys. 2. Dyskretyzacja obszaru
Fig. 2. Surface discretization

Oznaczmy przez ξ_m środek odcinka S_m (rys. 3). Na mocy przyjętych założeń całkę konturową możemy w przybliżeniu zapisać w postaci:

$$\oint K_o(p|\underline{x}-\underline{\xi}|)h_k^H(\underline{\xi})dl(\underline{\xi}) \approx \sum_{m=1}^{M} h_{km}a_m(\underline{x}) = H_k A(\underline{x}), \tag{9}$$

gdzie:

$$a_m(\underline{x}) = \int_{S_m} K_o(p|\underline{x}-\underline{\xi}|)dl(\underline{\xi}), \quad A(\underline{x}) = \left[a_1(\underline{x}),\ldots,a_M(\underline{x})\right], \quad \underline{x}\in\Omega$$

$$h_{km} \approx h_k^H(\underline{\xi}_m), \qquad H_k = \left[h_{k1},\ldots,h_{kM}\right] \tag{10}$$

S_m - m-ty element brzegowy. M jest ilością elementów brzegowych. Całkę po obszarze Ω aproksymowano w następujący sposób:

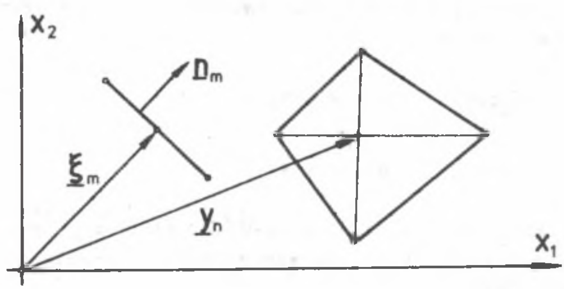
$$\iint\limits_{\Omega} K_0(p|\underline{x}-\underline{y}|)\theta_{k-1}(\underline{y})dS(\underline{y}) \approx \sum_{n=1}^{N} \theta_{k-1_n} b_n(\underline{x}) = B(\underline{x})T_{k-1} \tag{11}$$

gdzie:

$$b_n(\underline{x}) = \iint\limits_{B_n} K_0(p|\underline{x}-\underline{y}|)dS(\underline{y}), \quad B(\underline{x}) = \left[b_1(\underline{x}),\ldots,b_N(\underline{x})\right], \quad \underline{x}\in\Omega \tag{12}$$

θ_{k-1_n} - średnia (lub wyliczona w środku elementu) tempratura elementu skończonego B_n, $T_{k-1} = \left[\theta_{k-1_1},\ldots,\theta_{k-1_N}\right]$.

Rozważając równanie (6), trzeba w miejsce punktu $\underline{x}$ we współczynnikach $(10)_1$ i $(12)_1$ wstawić punkty leżące na $\partial\Omega^*$. Punktów tych musi być M, tzn. tyle, ile jest elementów brzegowych (tyle, ile jest wielkości h_{km} dla ustalonego k). Jeśli punktów, w których pomierzono WO, jest mniej niż M, to należy dla każdej chwili $k\Delta t$, $k=1,\ldots,K$, dokonać aproksymacji WO funkcją ciągłą (najlepiej klasy C^∞) wzdłuż krzywej $\partial\Omega^*$ i dobrać następnie wartości WO w tylu punktach, aby było ich razem M. Zrobić to można np. w sposób opisany w pracy [15], tzn. przybliżając funkcje opisujące WO wzdłuż konturu $\partial\Omega^*$ za pomocą skończonej kombinacji funkcji wykładniczych, których jest mniej (a nawet dużo mniej) niż M. Współczynniki kombinacji dobiera się przez minimalizację błędu opisu WO w punktach, w których jest ona dana. Szczegóły tej procedury podano także w opracowaniu [16] co prawda w odniesieniu do opisu WOT w danym punkcie przestrzennym w przedziale czasu: było to tam nazwane "wygładzaniem" WOT).



Rys. 3. Element brzegowy S_m i element skończony B_n

Fig. 3. Boundery element S_m and finite element B_n

Ostatecznie więc, stosując elementy brzegowe S_m i skończone B_n, otrzymujemy w miejsce równania (6) następujący układ równań algebraicznych:

$$H_k A(\underline{x}_j^*) = 2\pi\, \theta_k^*(\underline{x}_j^*) - p^2 B(\underline{x}_j^*) T_{k-1}, \tag{13}$$

gdzie $j=1,\ldots,M$. Po wyznaczeniu wektora H_k z układu równań (13) możemy obliczyć temperaturę w dowolnym punkcie $\underline{x} \in B \cup S$ ze związku:

$$\theta_k(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi} \left\{ H_k A(\underline{x}) + p^2 B(\underline{x}) T_{k-1} \right\}, \tag{14}$$

gdzie $B \cup S \approx \bar{\Omega}$.

4. SZCZEGÓŁOWE OBLICZANIE CAŁEK a_m i b_n

Całki a_m i b_n obliczano, stosując kwadraturę Gaussa. Gdy w całce a_m występowała osobliwość, usuwano ją, zastępując w otoczeniu punktu osobliwego funkcję $K_o(z)$ przez $-\ln z$. Osobliwości mogły wystąpić tylko w punktach węzłowych - wówczas w miejsce wzoru $(10)_1$ należało położyć:

$$a_m(\xi_m) \approx \frac{1}{p} \int_{\varepsilon}^{ps_m} K_o(\vartheta)\, d\vartheta - \frac{\varepsilon}{p} (\ln \varepsilon - 1), \tag{15}$$

gdzie: s_m jest długością elementu S_m, ε przyjmowano równe $0{,}05\, s_m$.

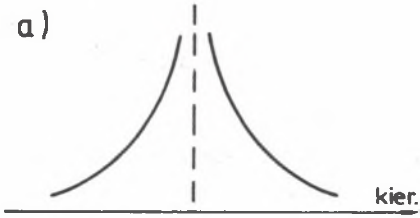
Natomiast gdy osobliwość występowała w całce b_m, to zamiast funkcji K_o, mającej w punkcie osobliwym wykres przedstawiony na rys. 4a, rozważano funkcję $\tilde{K}$, której wykres przedstawiono na rys. 4b. Funkcję tę dobrano w postaci danej wzorem:

$$\tilde{K}(r) = \begin{cases} K_o(pr) & \text{dla } r \geq R, \\ \alpha r^2 + \beta & \text{dla } r \leq R, \end{cases} \tag{16}$$

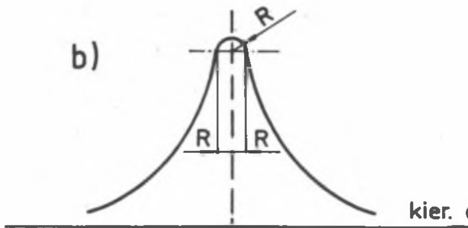
gdzie R pokazano na rys. 4b, $r = |x-y|$, zaś α i β wyznacza się z warunku, aby funkcje $\tilde{K}$ i K_o były sobie równe w punkcie $r=R$ wraz z pierwszą pochodną. Stąd:

$$\alpha = -\frac{p}{2R} K_1(pR), \qquad \beta = K_o(pR) + \frac{p}{2} R K_1(pR). \tag{17}$$

a)



b)



Rys. 4. Wykres funkcji K_o, z osobliwością w zerze (rys. a) i K, zastępującej funkcję K_o (rys. b)

Fig. 4. Diagram of K_o function with singularity at zero (fig. a) and K function which substitutes K_o function (fig. b)

Wartość R dobiera się tak, aby zachodziła równość:

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} K_o(p|x|)dx = \beta = \tilde{K}(0); \tag{18}$$

wówczas całka po elemencie z osobliwością może być zapisana jako jego pole razy prawa strona związku (18).

Taka procedura obliczania całki b_m jest bardzo "zgrubna", ale mimo to błąd popełniany przy tej procedurze jest niewielki i nawet przy 2h=1 i R=0.1 nie przekracza kilku (w tym przypadku 2.3) procent.

5. ALGORYTM ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIENIA I PRZYKŁAD TESTOWY

Poniżej przedstawiony jest algorytm rozwiązania numerycznego zagadnienia odwrotnego w dowolnym obszarze $\Omega \subset E^2$ z jednoczesnym zastosowaniem go do przypadku, gdy Ω jest kwadratem o jednostkowym boku. Algorytm podzielono na trzy części: część wstępną, obliczenia wielkości niezmiennych w cyklu obliczeń i obliczenia prowadzone dla każdej chwili $k\Delta t$ osobno.

I. Część wstępna

1° Dobór układu współrzędnych

Dla kwadratu przedstawiono układ współrzędnych na rys. 5.

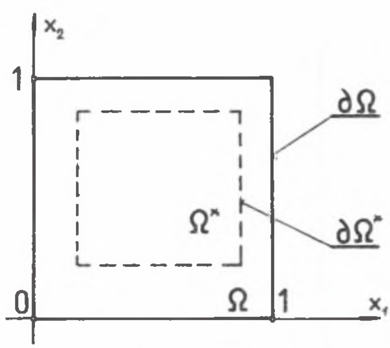
2° Opis punktów $\underline{x}^* \in \partial\Omega^*$ w których dane są WO i wprowadzenie ich jako danych.

3° Wprowadzenie WO jako danych.

Ponieważ obliczany jest przykład testowy, więc wartości WO są tu obliczane na podstawie wzoru, opisującego rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego, dla którego $T(\underline{x},0) = 0$. Warunki brzegowe (te same, które potem będą przedmiotem identyfikacji) przedstawiono na rys. 6. Wewnętrzne odpowiedzi obliczono na podstawie rozwiązania ścisłego, które w tym przypadku ma postać:

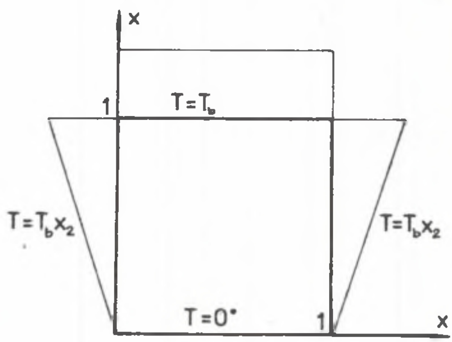
$$T(x_1,x_2,t) = T_b x_2 + \\ + \frac{8T_b}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi m x_1)\sin(\pi n x_2) e^{-a\pi^2(m^2+n^2)t}, \tag{19}$$

przy czym wartość a przyjęto równą 1.



Rys. 5.

Fig. 5.



Rys. 6. Warunki brzegowe w przykładzie testowym $T_b = 100°C$

Fig. 6. Boundary conditions in a test example; $T_b = 100°C$ has been assumed

4° Opis punktów charakteryzujących elementy brzegowe.

5° Wprowadzenie jako danych ilości elementów brzegowych i punktów, które je wyznaczają.

Podzielono brzeg na 40 elementów brzegowych, czyli M=40.

6^o Opis wszystkich punktów związanych z podziałem obszaru Ω na elementy skończone i numeracja elementów.

Wprowadzono kwadratowe elementy skończone.

7^o Wprowadzenie danych z punktu 6^o.
Ilość N elementów skończonych przyjęto równą 100.

8^o Wprowadzenie danych charakteryzujących rodzaj materiału przewodzącego ciepło oraz parametr l.

Przyjęto $a=1$, $l=1$, gdyż kwadrat ma bok jednostkowy.

9^o Wprowadzenie kroku czasowego.
Wprowadzono $\Delta t=0.05$ s.

10^o Wprowadzenie układu punktów, w których ma być obliczana temperatura po każdym kroku czasowym.

W rozważanym przypadku są to punkty w środku elementów skończonych.

11^o Wydruk wszystkich wprowadzonych danych oraz obliczonych parametrów p i τ, a także nowych bezwymiarowych współrzędnych punktów.

II. Obliczenia wielkości niezmiennych w cyklu obliczeń

12^o Obliczenie macierzy $[a_m(\underline{x}_j^*)]$ o wymiarach MxM (por. (10_1).

13^o Obliczenie macierzy $[p^2 b_n(\underline{x}_j)]$ o wymiarach NxM (por. $(12)_1$).

14^o Obliczenie macierzy $[a_m(\underline{x}_i)/2\pi]$, gdzie $\underline{x}_i$, $i=1,\dots,I$, są to punkty, w których ma być obliczana temperatura.

Tutaj $I=140$ (por. punkty 5^o, 6^o i 10^o).

15^o Obliczenie macierzy $[p^2 b_n(x_i)/2\pi]$

III. Obliczenia prowadzone dla każdej chwili czasu osobno

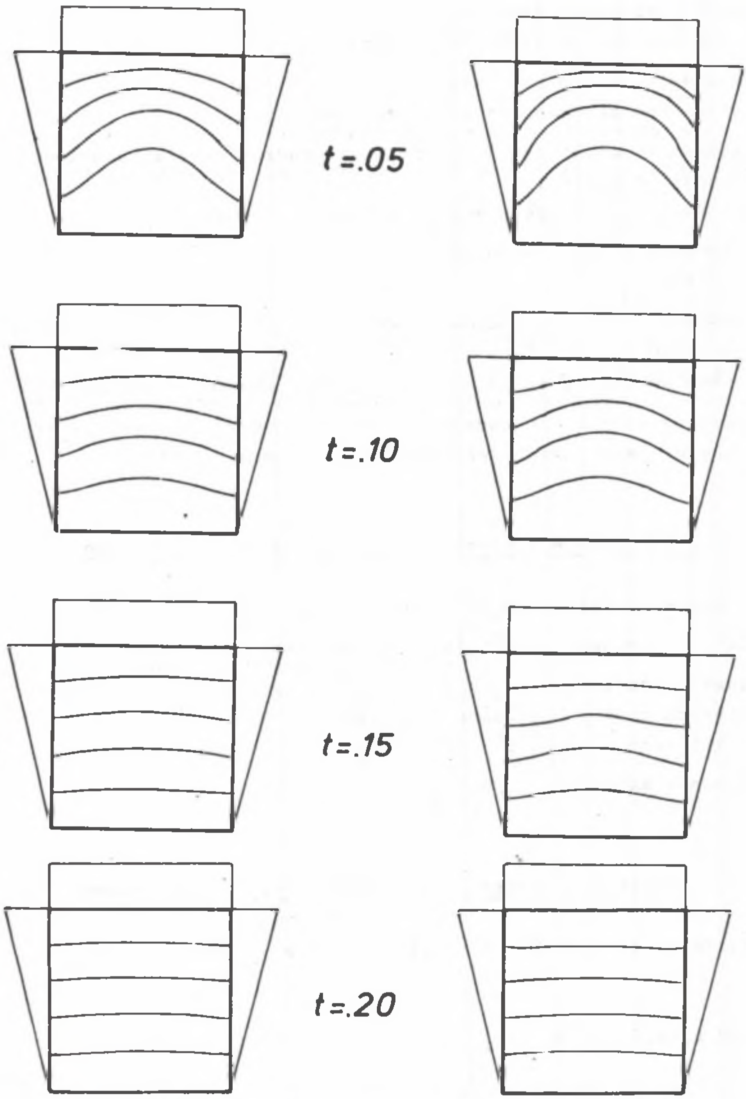
16^o Obliczenie wektora E, opisującego prawą stornę równania (13), tzn.:

$$E_j = 2\pi\, \theta_k^*(\underline{x}_j^*) - p^2 \mathbf{B}(\underline{x}_j^*)\mathbf{T}_{k-1}$$

17^o Rozwiązanie układu równań (13), tzn. wyznaczenie wektora $\mathbf{H}_k$.

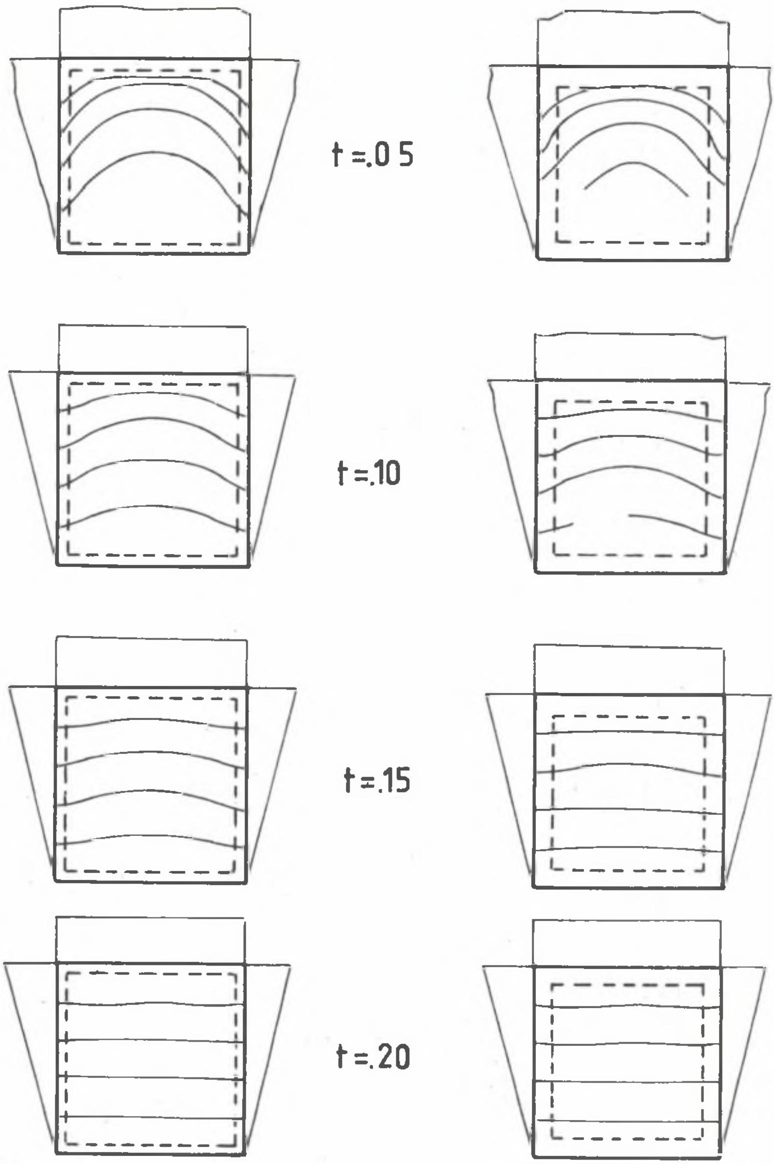
18^o Obliczenie temperatur $\theta_k(\underline{x}_i)$ w chwili $k\Delta t$ w punktach $\underline{x}_i$, $i=1,\dots,I$, ze wzoru (14).

19^o Wydruk wielkości $\mathbf{H}_k$ i $\theta_k(\underline{x}_i)$, $i=1,\dots,I$.



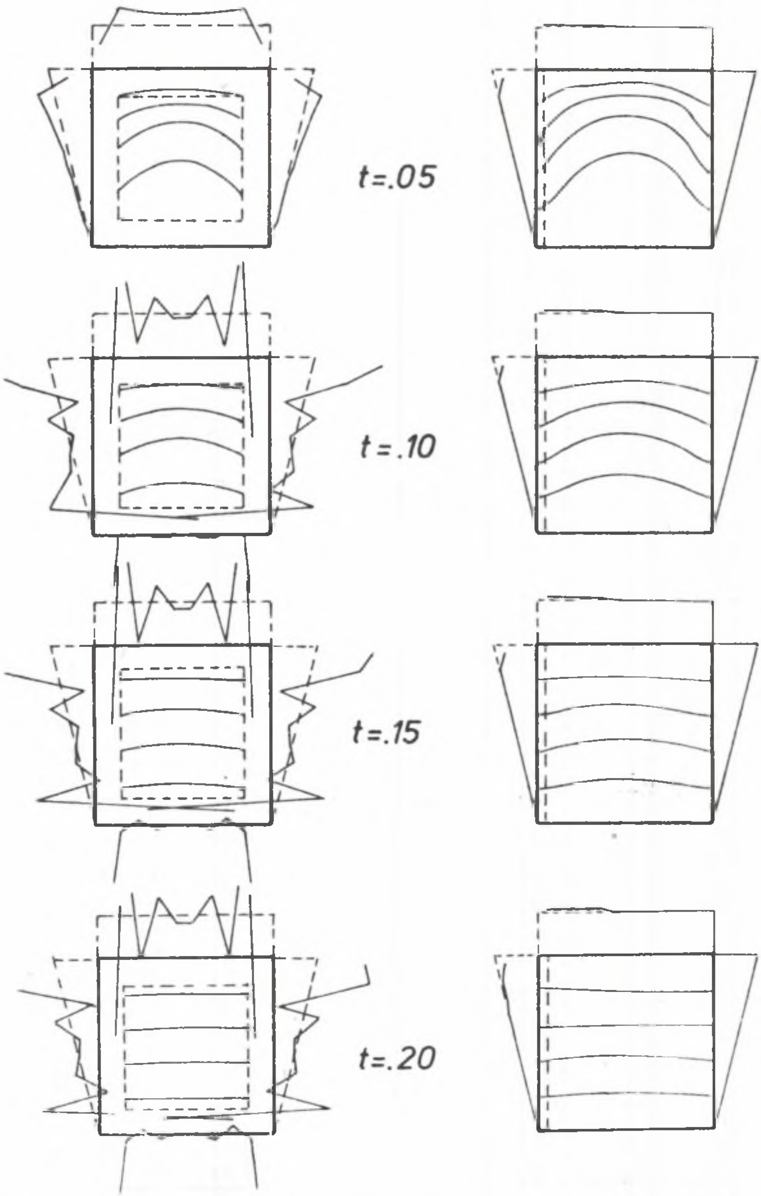
Rys. 7. Rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego dla kwadratu z warunkami jak na rys. 6. Po lewej stronie - rozwiązanie ścisłe (wg wzoru(19)) po prawej - przybliżone (wg wzoru (13) i (14), gdzie $\partial\Omega^* = \partial\Omega$). Wykresy dla chwil t=0.05, 0.1, 0.15, 0.2

Fig. 7. Solution of an initial - boundary problem for a square with the conditions as in fig. 6. On the left side - exact solution (according to formula (19)), on the right side - approximate solution (according to formulae (13) & (14), where $\partial\Omega^* = \partial\Omega$). Diagrams for the moments t = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2



Rys. 8. Rozwiązania zagadnienia odwrotnego. Lewa strona: odległość od $\partial\Omega^*$ do $\partial\Omega$ równa się 0.05. Prawa strona: $\partial\Omega^*$ odległe od $\partial\Omega$ o 0.1. Wykresy dla chwil czasu $t = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$

Fig. 8. Solutions of an inverse problem. Left side: distance from $\partial\Omega^*$ to $\partial\Omega$ is equal to 0.05. Right side: $\partial\Omega^*$ distant from $\partial\Omega$ by 0.1. Diagrams for the moments $t = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$



Rys. 9. Rozwiązania zagadnienia odwrotnego. Lewa strona: $\partial\Omega^*$ oddalone od $\partial\Omega$ o 0.15. Prawa strona: $\partial\Omega^*$ pokrywa się z $\partial\Omega$ na trzech bokach, a czwarty bok $\partial\Omega^*$ odległy jest od $\partial\Omega$ o 0.05. Wykresy dla chwil czasu $t = 0.05$, 0.1, 0.15, 0.2

Fig. 9. Solutions of an inverse problem. Left side: $\partial\Omega^*$ distant from $\partial\Omega$ by 0.15. Right side: $\partial\Omega^*$ coincides with $\partial\Omega$ on three sides and the fourth side of $\partial\Omega^*$ is distant from $\partial\Omega$ by 0.05. Diagrams for the moments $t = 0.05$, 0.1, 0.15, 0.2

6. WYNIKI OBLICZEŃ

Wyniki identyfikacji temperatury na brzegu kwadratu, przedstawionego na rys. 6, pokazano na rys. 7-9, przy czym na rys. 7 pokazano rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego metodą przybliżoną (wg wzorów (13) i (14)) i wg wzoru (19). Mimo bardzo zgrubnego obliczania całek i małej ilości punktów siatki zgodność wykresów przedstawionych na rys. 7 wydaje się być zadowalająca. Jak widać na rys. 8 temperatura brzegu nieco odbiegała od założonej dla $t=0.05$ i $t=0.1$; potem wyniki były już zadowalające. Rys. 9 wskazał na konieczność badania stabilności wyników przy zwiększaniu odległości od $\partial\Omega^*$ do $\partial\Omega$ (lewa strona rysunków) oraz na konieczność uwzględniania osobliwości całek brzegowych (prawa strona). W obliczeniach bowiem w programie testowym nie wykorzystano wzoru (15), lecz liczono całki a_m stosując kwadraturę Gaussa. Stało się to przyczyną gorszych wyników identyfikacji temperatury brzegu w tym ostatnim przypadku, choć można się było spodziewać rezultatów niemal idealnych (Ω^* i Ω prawie się pokrywają).

7. PODSUMOWANIE WYNIKÓW

Przedstawiony w pracy sposób przybliżonego rozwiązywania zagadnień odwrotnych pól temperatur w dwóch wymiarach jest jedną z niewielu prób atakowania tego typu zagadnień. Prace relacjonujące próby atakowania podobnych problemów nie oferowały - wg rozeznania autorów - jak dotąd metody nadającej się do uogólnienia na dowolny obszar regularny dwuwymiarowy. Potrzeba rozwiązywania takich zagadnień sygnalizowane była często przez autorów radzieckich, ale prace bezpośrednio traktujące o tych zagadnieniach spotyka się dosyć rzadko.

Przyjęty tu model ciała przewodzącego jest najprostszy z możliwych. Przyjęte uproszczenia pozwoliły tylko w niewielkim stopniu wykorzystać te cechy WO, które wynikają z jej definicji (por. [11]); tym niemniej otrzymano dla testowego przykładu wyniki zadowalające. Świadczy to o konieczności dalszych badań i daje jednocześnie nadzieję na ich pozytywne dla praktyki rezultaty.

Algorytm zbudowano dla zagadnień odwrotnych, w których dana jest WOT. Podczas rozważań dotyczących jednowymiarowych zagadnień odwrotnych, a dokładniej - stabilności rozwiązań tych zagadnień [13,14], stwierdzono bowiem, że w przypadku WOT utrata stabilności rozwiązania (związana, przy ustalonym kroku czasowym, ze stosunkiem wielkości l^*, będącej wymiarem charakterystycznym obszaru Ω^*, do wymiaru charakterystycznego l obszaru Ω) następuje prędzej niż w przypadku WO strumieniowej (por. także wzory (10) i (23) w pracy [17]). Wydaje się naturalne przeniesienie tego spostrzeżenia na obszary dwuwymiarowe, choć wynika z niego jednocześnie (jak również z rys. 9) konieczność analizy stabilności rozwiązań zagadnień odwrotnych.

Budując algorytm, przyjęto znaczne uproszczenia. Mimo to otrzymano część wyników testowych w postaci wskazującej na "odporność" algorytmu na uproszczenia. W dalszych badaniach poszczególne etapy obliczeń będą uściślane, co zapewne doprowadzi do lepszych wyników. Przykład testowy wskazuje, że praca ta ma wszelkie szanse powodzenia.

LITERATURA

[1] Burggraff O.K.: An exact solution of the inverse problem in heat conduction. Theory and application. Trans. ASME, s. C: J. of Heat Transfer, 86, 373-383, 1964.

[2] Мацевитый Ю.М., Мультановский А.В.: Идентификация в задачах теплопроводности. Наукова Думка, Киев 1982.

[3] Коздоба Л.А., Круковский П.Г.: Методы решения обратных задач теплопереноса. Наукова Думка, Киев, 1982.

[4] Grysa K., Ciałkowski M.J.: Zagadnienia odwrotne pól temperatur - przegląd literatury. Mech. Teoret. Stos., 18, 4, 525-554, 1980.

[5] Grysa K.: Przegląd literatury dotyczącej zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. Praca naukowo-badawcza. Umowa IMP-PAN-PR8-28/81, zadanie U.6.4.10.07, Politechnika Poznańska, 1981.

[6] Imber M.: Temperature extrapolation mechanism for two-dimensional heat flow. AIAA Journal, 12, 8, 1974.

[7] Imber M.: Two-dimensional inverse heat conduction problem - further observations. AIAA Journal, 13, 1, 1975.

[8] Al-Najem N.M., Özisik M.N.: A direct analytic approach for solving two-dimensional inverse heat conduction problems. Wärme und Stoffübertragung, 20, 89-96, 1986.

[9] Al-Najem N.M., Özisik M.N.: On the solution of three - dimensional inverse heat conduction in finite media. Int. J. Heat Mass Transfer, 28, 2121-2128, 1985.

[10] Busby H.R., Trujillo D.M.: Numerical solution to a two - dimensional inverse heat conduction problem. Int.J.Num.Meth. in Engng., 21, 349-359, 1985.

[11] Grysa K.: Stowarzyszone równanie całkowe dla równania Helmholtza i ich zastosowanie do rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. ZNPP, s.Mechanika, 31, 123-150, 1986.

[12] Grysa K.: Zagadnienia odwrotne przewodnictwa cieplnego. Część I. Równania całkowe. ZNPP, s.Mechanika, 31, 177-190, 1986.

[13] Grysa K., Kamiński H.: O przybliżonym rozwiązywaniu jednowymiarowych zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. Mech.Teoret.Stos., 24, 1/2, 3-21, 1986.

[14] Grysa K.: Uwagi o stabilności rozwiązań pewnych jednowymiarowych zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. Prace Naukowe Pol. Lub. 167, Mechanika 39, 5-28, 1988.

[15] Kamiński H.: Wyznaczenie współczynników materiałowych w procesach wymiany ciepła i masy. Praca doktorska. IMT PP, Poznań, 1984.

[16] Analiza numeryczna zagadnień identyfikacji temperatury, liczby Biota oraz naprężeń w ściance płaskiej. Praca naukowo-badawcza. Umowa IMP-PAN-PR-8-6/83, zadanie 6.4.9.07, etap c2, Politechnika Poznańska 1983.

[17] Grysa K., Kamiński H., Sypniewska G.: O wyborze kroku czasowego w przybliżonym rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. Mat. Sympozjonu "Modelowanie w Mechanice", str.155-160, Szczyrk, luty 1985.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРОЙ ДВУХМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОРОВОДНОСТИ

Р е з ю м е

В работе получен алгоритм решения двухмерной обратной задачи теплороводности, используя интегральное уравнение для уравнения Хельмгольца. В качестве примера решена одна обратная задача в квадрате. Результаты показывают пригодность такого подхода к этим вопросам.

NUMERICAL SOLUTION OF A TWO-DIMENSIONAL INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEM

S u m m a r y

An associated integral equation for Helmholtz equation has been introduced to build up an algorithm for solving a two,dimensional inverse heat conduction problem. As an exaple an inverse problem in a square has been solved. The results illustrate the applicability of such an approach to the problem.