Seria: ENERGETYKA z. 107

Nr kol. 1041

Adam FIC

Instytut Techniki Cieplnej Politechnika Šląska

WYBRANE ASPEKTY STOSOWANIA METODY UŚREDNIEŃ CAŁKOWYCH DO ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ STEFANA^{X)}

> <u>Streszczenie</u>. Praca dotyczy numerycznego rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła z przemianami fazowymi przy zastosowaniu metody uśrednień całkowych. Omówiono podstawy teoretyczne metody, obliczenie błędów uwzględnienia cieplnego efektu zmiany fazy i niektóre własności metody.

1. WPROWADZENIE

Jeden ze sposobów rozwiązywania zadań przewodzenia ciepła z przemianami fazowymi (w tym izotermicznymi) polega na zastosowaniu metody uśrednień całkowych [1, 2, 3, 4] przy uwzględnianiu nieliniowości związanych ze zmianą fazy. W ten sposób modeluje się generację lub pochłanianie ciepła podczas zmiany fazy oraz nieliniowe własności przewodzenia ciepła. Podstawową zaletą metody jest łatwość, z jaką można ją zaprogramować wykorzystując istniejące programy do rozwiązywania zadań przewodzenia ciepła bez zmiany fazy, nie tracąc przy tym ogólności tych programów. Ta jej zaleta jest widoczna szczególnie przy stosowaniu metody elementów skończonych do przestrzennej dyskretyzacji zagadnienia przewodzenia ciepła.

Zastosowanie metody uśrednień całkowych do rozwiązywania zagadnień Stefana, a także i innych nieliniowych zadań przewodzenia ciepła, zaproponowano w pracy [1]. Istota metody polega na specjalnym sposobie wyznaczania uśrednionych wartości pojemności cieplnej i współczynnika przewodzenia ciepła w tych elementach, w których wielkości te zależne są od temperatury (w szczególności - ma miejsce zmiana fazy). Cieplny efekt zmiany fazy w tych elementach, tzn. generację lub pochłanianie w nich ciepła z tytułu zmiany fazy, uwzględnia się dzięki odpowiedniemu określeniu zastępczej pojemności cieplnej właściwej.

x)Praca wykonana w ramach CPBP nr 02.18, kierunek 2, zad. 2.2.4.5.

Podstawą wyznaczania objętościowej pojemności cieplnej właściwej c oraz współczynnika przewodzenia ciepła λ są zależności;

$$c(\mathbf{T}) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{T}} \tag{1}$$

oraz

$$\frac{1}{\lambda(T)} = \frac{\partial W}{\partial T}$$
,

gdzie:

$$w(T) = w(T_1) + \int_{T_1}^{T} \frac{1}{\lambda(T')} dT',$$

h - objętościowa entalpia właściwa,

T - temperatura.

T1 - wybrana temperatura odniesienia.

Wartości λ i c są jednoznacznie określone, jeżeli h(T) i w(T) są ciągłymi i gładkimi funkcjami temperatury. Dlatego metoda wymaga, aby w przypadku izotermicznych przemian fazowych entalpia właściwa h(T) została "wygładzona" w otoczeniu temperatury T_m zmiany fazy tak, aby stała się ona ciągłą funkcją temperatury. W tym celu wystarczy założyć liniową zależ ność od temperatury entalpii h(T) w wąskim przedziale [T_m - \mathcal{E} , T_m + \mathcal{E}], gdzie 2 \mathcal{E} jest przedziałem "wygładzania" entalpii (rys. 1).



--- zalezność obliczeniowa

Rys. 1. Przyjęty sposób "wygładzania" entalpii jako funkcji temperatury w otoczeniu temperatury zmiany fazy

Fig. 1. Assumed method of "smoothing out" the enthalpy as a function of the temperature close to the phase change temperature Srednie wartości λ i c w wybranych przedziałach temperatury można wyznaczać zastępując pochodne we wzorach (1) i (2) ilorazami różnicowymi. Chcąc uwzględnić zmienność temperatury w elementach siatki, przekształca się zależności (1) i (2) do postaci:

$$c_{j}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_{j}} / \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}_{j}}$$
(4)

$$\frac{1}{\Re_{j}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}})} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}_{j}} / \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}_{j}}, \qquad (5)$$

gdzie w przypadku zagadnienia dwuwymiarowego $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2], \quad j = 1, 2.$ Kierunkowe wartości c_j objętościowej

pojemności cieplnej właściwej nie mają sensu fizykalnego. W pracy [1] proponu-

(2)

(3)

je się do obliczeń przyjnować średnią arytmetyczną tak uzyskanych wartości kierunkowych, tzn. w przypadku dwuwymiarowym:

$$c = 0,5(c_1 + c_2)$$
 (6)

2. Wyznaczanie wartości uśrednionych stałych λ i cw elementach dwuwymiarowych wybranych typów

Praktyczne wykorzystywanie zależności (4)÷(6) w obliczeniach numerycznych wymaga przyjęcia zależności funkcji w, objętościowej entalpii właściwej h oraz temperatury T jakc funkcji położenie w elementach siatki. W przypadku stosowania metody elementów skończonych temperaturę w elementach aproksymuje się zależnością:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{LW}} \mathbf{T}_{i} \mathbf{N}_{i}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}) , \qquad (7)$$

gdzie:

- LW liczba węzłów w elemencie,
- T₁ temperatura w i-tym węźle,
- N. funkcja kształtu związana z i-tym węzłem.

Funkcję w oraz entalpię właściwą h można w elementach aproksymować analogicznymi zeleżnościami. Wówczas pochodne występujące we wzorach (4) i (5) można wyrazić następująco:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_{j}} = \sum_{i=1}^{LW} \mathbf{f}_{i} \frac{\partial \mathbb{N}_{i} (\mathbf{x}^{\mathrm{T}})}{\partial \mathbf{x}_{j}}, \qquad (8)$$

gdzie: f = T, w, h.

W przypadku stosowania elementów, dla których funkcje kształtu są liniowe (odcinki z dwoma węzłami, trójkąty trójwęzkowe, czworościany czterowęzłowe), wspomniane pochodne są stałe w elementach. Stałe są więc również otrzymane w opisany sposób zastępcze wartości λ i c w elementach [1]. Całkowanie po takich elementach przestrzennych cesłem obliczenia wartości elementów macierzy zdyskretyzowanego układu równasń względem temperatur w węzłach realizuje się wtedy najczęściej analityycznie. W przypadku zaś stosowania innego rodzaju elementów przestrzennych - całkowanie to wykonuje się zwykle numerycznymi metodami Gaussa. Wzoory (4)+(6) i (8) są wówczas podstawą obliczenia wymaganych wartości λ ii c w punktach Gaussa. Tak obliczane wartości λ i c są bowiem w tych przypadkach zmienne w obszarze elementów.

3. OBLICZANIE BŁĘDÓW MODELOWANIE CIEPINYCH EFEKTÓW ZMIANY FAZY W ELEMENTACH

Jeżeli w elemencie ma miejsce zmiana fazy, to obliczane w podany sposób zastępcze wartości objętościowej pojemności cieplnej właściwej zawierają składową uwzględniającą cieplny efekt zmiany fazy. Taki sposób uwzględnienia ciepła generowanego lub pochłanianego w elementach w związku ze zmianą w nich fazy jest obarczony pewnymi błędami. Błędy te rzutują również na błędy obliczeń pola temperatury i położenia granicy zmiany fazy (ściślej, w związku z "wygładzaniem" entalpii, granic obszaru, w którym ma miejsce zmiana fazy). Różnica pomiędzy entalpią zmiany fazy elementu a ciepłem pochłoniętym lub wygenerowanym faktycznie przyporządkowanym elementowi w procesie obliczeniowym z tytułu zmiany w nim fazy będzie w dalszym ciągu nazywana błędem modelowania cieplnego efektu zmiany fazy.

Błędy te w poszczególnych elementach są z pewnością zależne od przyjętych parametrów obliczeniowych, jak: przedział wygładzania entalpii, krok czasowy, rodzaj i rozmiary elementu, a także od sposobu "wygładzania" entalpii. Istotna jest więc kontrola wartości tych błędów. Ich obliczanie zostanie omówione w przypadku wykorzystania metody elementów skończonych do obliczeń dwuwymiarowych płaskich zadań przewodzenia ciepła z przemianami fazowymi i przy zastosowaniu kilku rodzajów elementów.

Entalpia H, zmiany fazy elementu wynika ze wzoru:

$$H_{e} = h_{m} \nabla_{e} , \qquad (9)$$

gdzie:

h_m - objętościowa entalpia właściwa zmiany fazy,
V_a - objętość elementu o jednostkowej wysokości.

Przyporządkowana elementowi w procesie obliczeniowym ilość ciepła Q_e pochłoniętego lub wygenerowanego w nim z tytu≵u zmiany fazy jest równa:

$$Q_{e} = \sum_{l} \Delta Q_{e,l}, \qquad (10)$$

gdzie: $\Delta Q_{e\,l}$ jest ilością ciepła pochłoniętego lub wygenerowanego w elemencie w związku ze zmianą fazy w l-tym kroku czasowym, zaś sumowanie odbywa się praktycznie po tych krokach czasowych, w czasie których następuje w elemencie zmiana fazy.

160

Wybrane aspekty stosowania metody ...

Ilość ciepła ΔQ_{e-1} musi być obliczana w sposób wynikający konsekwentnie z przybliżenia, według którego dla danego typu elementu obliczane są składowe macierzy pojemności cieplnej związene z wkładem danego elementu.

W przypadku liniowych elementów trójkątnych zazwyczaj zakłada się w elemencie stałą (uśrednioną) wartość pojemności cieplnej właściwej i stosuje całkowanie analityczne. Wówczas ΔQ_{p_1} jest równe:

$$\Delta Q_{e_{1}} = (c_{1} - c_{0_{1}}) V_{e} \Delta T_{1_{1}}$$
(11)

gdzie: c_1 - objętościowa pojemność cieplna właściwa (zastępcza) przyporządkowana elementowi w 1-tym kroku czasowym, c_0 1 - objętościowa pojemność cieplna właściwa, jaka byłaby przyporządkowana elementowi, gdyby nie było w nim ofektu cieplnego zmiany fazy, $\Delta T_{1 \ B}$ - przyrost średniej temperatury elementu w 1-tym kroku czasowym.

Stosując czterowęzłowe elementy izoparometryczne całkowanie realizuje się zazwyczaj numerycznie metodą Gaussa. Wówczes $\Delta Q_{e~l}$ jest określone wzorem:

$$\Delta q_{e \ 1} = \sum_{m=1}^{LC} \sum_{n=1}^{LC} q_m q_n (c_{1 \ G} - c_{0 \ 1 \ G}) \Delta T_{1 \ G} \det J(\xi_m, \ \mathcal{I}_m) , \qquad (12)$$

gdzie: wielkości mające wskaźnik G dotyczą punktu Gaussa $\{\mathbf{x}_{m,n}, \mathbf{y}_{m,n}\}$, $\{\boldsymbol{\xi}_m, \boldsymbol{\mathcal{T}}_n\}$ - współrzędne lokalne tego punktu w układzie związanym z kwadratowym elementem podstawowym [5], LC - liczbea punktów Gaussa w jednym kierunku, $\Delta \mathbf{T}_{1,G}$ - przyrost temperatury punktu Gaussa w l-tym kroku czasowym, det J - wyznacznik obliczenej w punkcie Gaussa macierzy Jakobiego przekształcenia kwadratowego elementu podstawowego w rzeczywisty element czterowęzłowy, q_m i q_p - wagi Gaussa.

W przypadku stosowania elementów izoparameetrycznych wyższych rzędów (np. ośmio - lub dwunastowęzłowych elementów serendipowskich) występuje konieczność odmiennego wyznaczania macierzy pojemności cieplnej. Wówczas często wprowadza się funkcje kształtu w obszarze elementu schodkowe, co sprowadza się do przyporządkowywania poszczególnym węzłom pewnych części pojemności cieplnej elementu [5]. Wówczas $\Delta Q_{e,1}$ oblicza się według wzoru [4]:

$$\Delta Q_{e l} = (C_{l} - C_{0 l}) \sum_{i=1}^{LW} \Delta T_{i l} g_{i}^{*}, \qquad (13)$$

gdzie: $\Delta T_{i \ 1}$ - przyrost temperatury i-tego węzła w 1-tym kroku czasowym, C₁ i C₀₁ mają znaczenie pojemności cieplnych i wynikają ze wzoru:

$$C = \sum_{m=1}^{LC} \sum_{n=1}^{LC} q_m q_n c_G \det J(\xi_m, \tilde{z}_n), \qquad (14)$$

w którym w miejsce c_G należy wstawić wartość, odpowiednio, c_{lG} i c_{OlG}, zaś g^{*}_i jest równe:

gdzie g_i, g_j - części objętości elementu podstawowego przyporządkowane węzłowi i oraz j.

Błąd względny $\delta H_{\rm e}$ modelowania cieplnego efektu zmieny fazy w elemen-cie wynika w ten sposób ze wzoru:

$$\delta H_{e} = \frac{H_{e} - |Q_{e}|}{H_{e}} . \tag{16}$$

4. REZULTATY TESTOW NUMERYCZNYCH

W tym punkcie zostaną omówione rezultaty obliczeń zadania nieustalonego przewodzenia ciepła ze zmianą fazy zilustrowanego na rys. 2. Zastosowano metodę uśrednień całkowych i elementów skończonych oraz kontrolowano błędy modelowania cieplnego efektu zmiany fazy. Obliczenia testowe realizowano przy wykorzystaniu elementów trójkątnych oraz cztero-, ośmio- i dwunastowęzłowych elementów izoparametrycznych rodziny serendipowskiej. Zagadnienie takie przy warunku brzegowym I rodzaju na brzegu niezaizolowanym cieplnie ma rozwiązanie analityczne. Oprócz tego takie, w istocie jednowymiarowe, zadanie przysparza przy stosowanej metodzie pewnych dodatkowych trudności. Często bowiem podczas obliczeń istnieje możliwość wystąpienia nadmiarów przy korzystaniu ze wzorów (4)+(6). Celem ich uniknięcia w programie przyjęto odpowiednie ograniczenia.

Obliczenia realizowano operując współrzędnymi bezwymiarowymi:

- temperaturą bezwymiarową:

$$\mathbf{T}^* = \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}_{\mathrm{m}}}{\mathbf{T}_{\mathrm{m}} - \mathbf{T}_{\mathrm{b}}},$$

tura płynu omywającego brzeg,



Rys. 2. Przyjęty do obli-czeń obszar i jego podział za pomocą elementów trójkatnych, warunki brzegowe oraz rozkład procentowych błędów SH modelowania cieplnego efektu zmiany fazy przy stosowaniu wzorów (4):(6)

Fig. 2. Surface assumed for calculations and its division by means of triangular elements, boundary conditions and distribution of percentage errors of of modelling thermal effect of phase change when using formulae (4)+(6)

- liczbą Biota:

$$Bi = \frac{\alpha l_0}{\lambda_1},$$

gdzie: a - współczynnik wnikania ciepła,

- bezwymiarowymi liczbami:

 $\lambda_{2}^{*} = \frac{\lambda_{2}}{\lambda_{1}},$ (21)

$$c_2^* = \frac{c_2}{c_1}$$
 (21)

gdzie: T - temperatura w K, Tm - temperatura zmiany fazy, Th - tempera-

- wymiarem charakterystycznym elementu 1, który przyjęto równy długości boku elementu kwadratowego (w ten sposób badanie wpływu rozmiarów elementów na rezultaty obliczeń nie wymaga zmiany współrzędnych węzłów siatki).

- bezwymiarową entalpię zmiany fazy:

$$h_{m}^{*} = \frac{h_{m}}{c_{1}(T_{m} - T_{b})},$$
 (18)

gdzie: h_m - objętościowa entalpia właściwa zmiany fazy, c - objętościowa pojemność cieplna właściwa, wskaźnik "1" związany jest z fazą o temperaturze niższej, zaś wskaźnik "2" będzie związany z fazą o temperaturze wyższej (przejściu z fazy "1" do fazy "2" towarzyszy pochłanianie ciepła),

- liczbą Fouriera:

$$Fo = \frac{a_1 t}{l_0^2} , \qquad (19)$$

gdzie: a - współczynnik wyrównywania temperatury, t - czas,

(20)

Obliczenia testowe wykonano przy następujących danych: $T_p^* = 0,6667$ (bezwymiarowa temperatura początkowa, stała w całym obszarze) $h_m^* = 13,333$, $\lambda_2^* = 0,88235$, $c_2^* = 1,6$, $\Delta Fo = 0,272$, B1 = 29,41, $l_o = 0,1 m$, $\mathcal{E}^* = \frac{\mathcal{E}}{T_m - T_b} = 0,13332$.

Przyjęty do obliczeń obszar oraz jego podział za pomocą elementów trójkątnych pokazano na rys. 2. Pary elementów trójkątnych tworzą kwadraty stanowiące elementy przy stosowaniu elementów serendipowskich. W poszczególnych elementach podano wartości procentowych błędów óH_e modelowania cieplnego efektu zmiany fazy.

Jak widać, błędy modelowania cieplnego efektu zmiany fazy są różne w poszczególnych elementach i niekiedy przewyższają nawet 40%. Zwraca też uwagę przypadkowość rozkładu tych błędów. Takie wyniki oczywiście nie są możliwe do zeakceptowania. Można je wytłumaczyć częstym napotykaniem podczas obliczeń numerycznych warunków ograniczających stosowanie wzorów (4)÷(6) ze względu na niebezpieczeństwo występowania nadmiarów. Istnieje z pewnością możliwość korzystniejszego przyjęcia tych ograniczeń. W ogólnym programie obliczeniowym sytuacja jest jednak dość trudna do opanowania

Przy zastosowaniu elementów serendipowskich czterowęzłowych uzyskano wyniki obarczone podobnymi błędami, zaś przy stosowaniu elementów wyższych rzędów wyniki były jeszcze gorsze.

 a) Wpływ sposobu obliczania zastępczej objętościowej pojomności cieplnej właściwej na rezultaty obliczeń

W związku z zaistniałymi trudnościami poszukiwano alternatywnego sposobu obliczenia zastępczej objętościowej pojezności cieplnej właściwej. Zaproponowany sposób opiera się na przekształceniu [4]:

$$c = \frac{\partial h}{\partial n} / \frac{\partial T}{\partial n}$$
, (22)

gdzie: n jest wersorem gradientu temperatury. Jest więc związany z fizycznym przebiegiem zjawiska zmiany fazy.

Po prostych przekształceniach uzyskuje się w przypadku dwuwymierowym zależność:

$$c = \frac{\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y}}{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2}$$
(23)

łatwa do uogólnienia dla zagadnień trójwymiarowych. Stosowanie wzoru (23) nie wymaga uśrednienia kierunkowych wartości c_i , i = 1,2 (wzór (4)) według np. wzoru (6)(a postępowanie to nie wa sensu fizykalnego) Oprócz **b**)

 $\begin{array}{c} 62 \\ \hline 62 \\ \hline 3.0 \\ \hline -4.1 \\ -4.1 \\ -4.1 \\ -4.1 \\ -3.0 \\ \hline 7.5 \\ \hline 7.5 \\ \hline 7.5 \\ -9.7 \\ -9.1$

a)

3,0	30	3,0	3,0
2,7	2.7	2.7	2.7
3.0	3.0	3,0	3,0
13,4	13,4	13,4	13,4

Rys. 3. Rozkład procentowych wartości błędów 5H modelowania cieplnego efektu zmiany fazy przy stosowaniu wzoru (23), elementów trójkętnych (a) i kwadratowych czterowęzłowych (b)

Fig. 3. Distribution of percentage values of the errors δH of modelling thermal effect of phase change when using formula (23), triangular elements (a) and square four-nodal elements (b) tego niebezpieczeństwo wystąpienia nadmiarów przy stosowaniu wzoru (23) występuje tylko wtedy, kiedy gradient temperatury jest bliski zero.

Na rys. 3 podano rozkład procentowych błędów óH_e modelowania cieplnego efektu zmiany fazy przy stosowaniu wzoru (23) w elementach trójkątnych i kwadratowych czterowęzłowych. Analizując te błędy, należy zwrócić uwagę, że w szeregu elementów mających punkty wspólne z brzegiem niezaizolowanym (Bi ≠ 0) uzasadnione są nadmierne błędy dodatnie. W krokach czasowych nie realizowano bowiem iteracji, a w pierwszym kroku czasowym

temperatura węzłów brzegowych tej warstwy spada znacznie poniżej temperatury zmiany fazy, podczas gdy pojemność cieplna właściwa nie zawiera jeszcze cieplnego efektu zmiany fazy.

W przypadku elementów trójkątnych zwraca obecnie uwagę to, że rozkład błędów δH_e jest symetryczny względem płaszczyzny symetrii siatki. Oprócz tego błędy w elementach tworzących kwadraty mają poza dolną warstwą różne znaki. W ten sposób błędy te częściowo kompensują się. O błędach obliczeń pola temperatury decydują bowiem bardziej średnie wartości błędów δH_e w parach elementów tworzących kwadraty niż w poszczególnych elementach trójkątnych. W przypadku elementów kwadratowych czterowęzłowych rozkład błędów δH_e jest wyrównany w poszczególnych poziomych warstwach elementów. Poza dolną warstwą błędy te są niewielkie. Można mieć nadzieję, że przy odpowiednim doborze parametrów obliczeniowych (ć, ΔFo) możliwe jest dokładniejsze modelowanie cieplnego efektu zmiany fazy zarówno przy stosowaniu elementów trójkątnych, jak i czterowęzłowych.

O ile rezultaty obliczeń testowych przy wykorzystywaniu elementów trójkątnych i czterowęzłowych elementów serendipowskich można ocenić pozytywnie, nie można tego powiedzieć o przypadku stosowania elementów ośmioi dwunastowęzłowych. Błędy modelowania cieplnego efektu zmiany fazy były przy ich wykorzystywaniu wielokrotnie większe niż w przypadkach poprzednio omawianych. Przy bliższej analizie problemu okazało się, że niekiedy obliczane wartości zastępczej objętościowej pojemności cieplnej właściwej nie mają fizycznego uzasadnienia, w niektórych punktach są np. mniejsze od zera. Fakt ten można wytłumaczyć [4] błędemi stosowanej interpolacji wyższych rzędów objętościowej entalpii właściwej h i temperatury T w obszarze tych elementów, przy czym ontalpia właściwa h jest w nich funkcją znacznie silniej zmienną niż temperatura T. Problem można rozwiązać stosując w obszarze elementów interpolację entalpii właściwej h i temperatury T opartą na węzłach narożnych, czyli tak, jak robiono to w elementach czterowęzłowych. Ta interpolacja miałaby jedynie zastosowanie przy korzystaniu ze wzoru (23).

b) Wpływ doboru parametrów obliczeniowych na rezultaty obliczeń

Parametrami obliczeniowymi mającymi wpływ na rezultaty rozpatrywanych obliczeń numerycznych są: bezwymiarowy przedział \mathcal{E}^* wygładzania entalpii, skok liczby Fouriera Δ Fo (bezwymiarowy krok czasowy) i rodzaj stosowanych elementów.

a)	
٤=0	016
5.7	5,9
/-208	1-







6)

E-0,0167 0,033		0,067	0,133
-14,8	-6,2	- 0.3	3,0
-22,7	- 15,7	-5,7	2.7
1.9	- 1,5	-0,4	3,0
9,8	10,4	11,1	13,4

Rys. 4. Rozkład procentowych wartości błędów SH modelowania cieplnego efektu zmiany fazy dla różnych wartości & przy stosowaniu elementów trójkątnych (a) i czterowęzłowych (b)

Fig. 4. Distribution of percentage values of the errors $\delta H_{\rm c}$ of modelling thermal effect of phase change for different values of $\mathcal{E}^{*_{\rm X}}$

Na rys. 4 pokazano rozkład błędów procentowych ółe modelowania cieplnego efektu zmiany fazy w stosowanych elementach trójkątnych i kwadratonych czterowęzłowych do obliczeń zagadnienia identycznego jak poprzednio, ale przyjmując różne wartości bezwymiarowego przedziału wygładzania ć*. I przypadku elementów trójkątnych rozkłady podano w jednej z dwóch części siatki, w których rozkłady błędów są identyczne, w przypadku zaś elementów czterowęzłowych w pionowej warstwie elementów. Istnieje wyraźna zależrość rozkładu i wielkości tych błędów od szerokości przedziału wygładzania entalpii. W rozpatrywanym przypadku optymalna ze względu na błędy motelowania cieplnego efektu zmiany fazy wartość ć* zawiera się w przedziale 0,0670,13.

Wartości \mathcal{E}^* optymalne ze względu na błędy obliczeń pola temperatury pokożeń granicy zmiany fazy są zwykle inne niż optymalne ze względu na łłędy δH_a . Jak pokazano w [4], są one nieco mniejsze.

Fo =	0,136	0,272	1,088	2,176	
	2,2	1,9	<i>0,2</i>	-0,8	
	-1,4	-0,3	0,8	- 2, 3	
'	0,8	1,4	2,1	10,8	
	16,6	14,7	5,1	-3 <i>8,9</i>	

kys. 5. Rozkład procentowych wartości błędów δH modelowania cieplnego efektu zmiany fazy łla różnych wartości ΔFo przy stosowaniu elementów czterowęzłowych

Hig. 5. Distribution of percentage values of the errors δH of modelling thermal effect of phase change for different values of ΔF when using four-nodal elements

Na rys. 5 pokazano rozkład SH. w elementach kwadratowych uzyskany w obliczeniach testowych przy stosowaniu różnych wartości skoku liczby Fouriera ΔFo dla ε^{*}= 0,1. Jak widać, w zakresie skoku liczby Fouriera AFo = 0,136+1,09 rozkład błędów modelowania cieplnego efektu zmiany fazy zmienia sie nieznacznie (z wyjątkiem dolnych (elementów). Przy dalszym zwiększeniu tskoku liczby Fouriera wyraźnie zwiększsają się błędy SH, również w drugiej od i dołu warstwie elementów. Rezultaty sugersruja, że błąd δH_ w elemencie zależy odod liczby zrealizowanych w nim kroków w a czasie, kiedy występuje w tym elemencie z zmiana fazy. Błąd ten wzrasta, kiedy lidiczby wspomnianych kroków jest zbyt mamała. Biorąc pod uwagę, że prędkość ruchchu granicy zmieny fazy ku górze jest t coraz mniej-

sza, można sądzić, że w trzeciej i czwartej od dołu warstwie ; elementów liczba wykonanych w tych elementach kroków podczas zmiany w nnich fazy jest jostatecznie duża, by błędy δH_a były w nich małe.

Należy podkreślić, że przedstawione w pracy wyniki są uzysskane dla jedlego, wybranego zespołu danych termofizycznych. Dla innych (danych, szczezólnie bezwymiarowej entalpii zmiany fazy h_m^* , rozkłady błędów δH_e byłyby odmienne. Należy się wówczas spodziewać również innych optymalnych ze względu na te błędy wartości parametrów obliczeniowych.

5. UWAGI KOŃCOWE

Omówione rezultaty i wnioski wynikające z obliczeń testowych prostego zadania przewodzenia ciepła ze zmianą fazy za pomocą metody uśrednień całkowych w połączeniu z metodą elementów skończonych mogą być pomocne przy rozwiązywaniu tą metodą innych, bardziej złożonych zadań tego typu. Metoda uśrednień całkowych jest bowiem stosunkowo łatwa do zaprogramowania przy wykorzystaniu istniejących programów metody elementów skończonych do rozwiązywania różnorodnych złożonych zadań przewodzenia ciepła.

Przy zastosowaniu metody uśrednień całkowych ważną składową błędu rozwiązania zadań przewodzenia ciepła ze zmianą fazy jest błąd modelowania cieplnego efektu zmiany fazy. W obliczeniach testowych kontrolowano ten błąd i na tej podstawie przeanalizowano wpływ podstawowych parametrów obliczeniowych (ć^{*}, ΔFo) na jego wartości. Na ogół możliwy jest taki dobór parametrów obliczeniowych, że błąd modelowania cieplnego efektu zmiany fazy jest dostatecznie mały. Drastycznym wyjątkiem mogą być przypadki stosowania elementów wyższych rzędów. Aby uniknąć nadmiernego błędu, należy wówczas aproksymację temperatury i entalpii właściwej w obliczeniach zastępczej pojemności cieplnej właściwej oprzeć na węzłach narożnych.

LITERATURA

- Comini G., del Guidece S., Lewis R.H., Zienkiewicz O.C.: Finite Element Solution of Non-Linear Heat Conduction Problems with Special References to Phase Change. Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 8, 613+624, 1974.
- [2] Banaszek J.: A Conservative Finite Element Method for Heat Conduction Problems. Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 20, 2033+2055, 1984.
- [3] Fic A.: Błędy modelowania cieplnych efektów zmiany fazy przy stosowaniu metody uśrednień całkowych do rozwiązywania zagadnień Stefana. Sympozjon "Modelowanie w Mechanice", PTMTiS, Beskid Śląski, 1988.
- [4] Składzień J., Fic A.: Analiza i doskonalenie wybranej numerycznej metody rozwiązywania zadań przewodzenia ciepła ze zmianą fazy. Sprawozdanie z pracy naukowo-badawczej realizowanej w ITC Pol. Śl., Gliwice, 1977, praca niepublikowana.
- [5] Zienkiewicz O.C.: The Finite Element Method. Mc Graw-Hill, London, 1977.

Wybrane aspekty stosowania metody ...

ИЗБРАННЫЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОСРЕДНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТЕФАНА

Резюме

Работа касается численного решения вопросов теплопроводности с фазовыми изменениями с применением метода интегральных осреднений. Оговорень теоретические основы метода, произведены расчеты ошибок, учитывающих тепловой эффект изменения фазы. Оговорены также некоторые свойства метода.

CERTAIN ASPECTS OF USING INTEGRAL AVERAGING METHOD FOR SOLVING STEFAN'S PROBLEMS

Summary

The paper refers to the numerical solving of the problems of heat conduction with phase transitions by using the integral averaging method. Theoretical basis of the method, calculating the errors of allowance for thermal effect of phase change and some properties of the method have been discussed.