ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973

Seria: Mechanika z. 50 Nr kol. 368

Julian Marszał, Bohdan Mochnacki

Instytut Matematyki

OBLICZENIE KSZTAŁTU JAMY SKURCZOWEJ W WALCOWYM WLEWKU PRZY ZAŁOŻENIU KRZEPNIĘCIA DWUKIERUNKOWEGO

Streszczenie. W pracy rozwiązano równanie różniczkowe dotyczące pewnego modelu krzepnięcia walcowego wlewka. Przedstawiono możliwość uogólnienia rozwiązania. W końcowej części rozwiązano przykłady liczbowe.

1. Wstęp

Kształt skupionej jamy skurczowej w obszarze wlewka zdeterminowany jest układem złożonych warunków początkowych i brzegowych, opisujących odprowadzenie ciepła z objętości odlewu oraz wielkościami parametrów termofizycznych układu wlewek - wlewnica - płyta podwlewnicowa. Czynniki te określają z jednej strony kształt i szybkość narastania warstwy zakrzepłego metalu w górnej części wlewka, z drugiej zaś regulują związany ze spadkiem temperatury i zmianą fazy skurcz objętościowy, którego skutkiem jest obniżanie się poziomu ciekłego metalu we wlewnicy. Warstwice jamy skurczowej, będące liniami przenikania obniżającej się płaszczyzny ciekłego metalu i odpowiadających jej kolejnym położeniom powierzchni izosolidusowych, wyznaczają jednoznacznie kształt jamy skurczowej.

Złożoność wpływu warunków procesu na kinetykę powstawania jamy, czyli na położenie kolejnych warstwic tworzących jej powierzchnię, stwarza duże trudności znalezienia drogą rozważań teoretycznych zależności funkcyjnych opisujących bądź kształt, bądź pewne wymiary jam skurczowych.

Wzór na głębokość jamy skurczowej podany przez Gulajewa [1], równanie Brumghausa [2] czy też wzór Niechendziego i Giroszowicza [3] na objętość jamy skurczowej, wyrażonej w procentach objętości całego odlewu, są nielicznymi przykładami zależności wyprowadzonych w oparciu o metody analizy matematycznej. Inną metodą teoretycznego rozwiązania omawianego problemu jest tworzenie matematycznych modeli procesów zachodzących przy stygnięciu wlewka [4]. Obliczenie niezwykle złożonego modelu tych zjawisk wymaga użycia elektronicznych maszyn cyfrowych.

2. Rozwiązanie Brumghausa i możliwości jego uogólnienia

Wyprowadzenie równania opisującego kształt jamy skurczowej w walcowym wlewku o wymiarach skończonych można znaleźć w wielu pracach (Gulajew [1] przypisuje autorstwo rozważań Brumghausowi). Podstawowe założenia prowadzące do znalezienia kształtu można sformułować następująco:

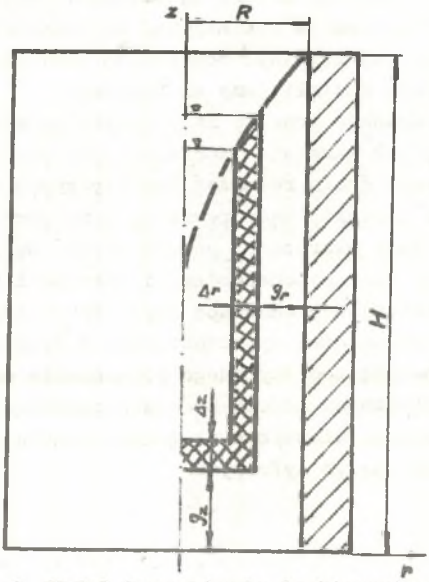
- krzepnięcie metalu przebiega w warstwach równoległych do bocznej powierzchni wlewnicy;
- zjawisko skurczu objętościowego występujące tylko przy zmianie fazy;
- wlewek jest zaizolowany cieplnie od góry.

W układzie rzeczywistym założenia te są w przybliżeniu spełnione dla wlewków o dużej smukłości, przy niewielkim przegrzaniu metalu oraz dla tych przypadków, gdzie stosuje się izolację termiczną górnej części wlewka (zasypki).

Celem pracy jest uogólnienie rozwiązania Brumghausa, a mianowicie znalezienie kształtu jamy skurczowej przy założeniu krzepnięcia dwukierunkowego (metal krzepnie również od dna wlewnicy w warstwicach poziomych).

3. Rozwiązanie zadania dla przypadku krzepnięcia dwukierunkowego

Problem udało się sprowadzić do równania różniczkowego liniowego, którego rozwiązanie dla przyjętych warunków brzegowych opisuje kształt bocznej powierzchni jamy. Punktem wyjściowym rozważań jest bilans zmiany objętości niezakrzepłej części wlewka.



Rys. 1. Model krzepnięcia dwukierunkowego

Przyjmując, że w dowolnej chwili t trwania procesu stosunek prędkości krzepnięcia w kierunkach promieniowym i osiowym jest stały, czyli

$$\frac{v_z(t)}{v_r(t)} = m = \text{idem} \tag{1}$$

mamy (rys. 1):

$$\frac{g_z(t)}{g_r(t)} = m. \tag{2}$$

Przy takim założeniu objętość elementarnej warstwy metalu krzepnącego równolegle do osi z wynosi

$$\Delta V_1 = \left[z - (R - r)\, m\right] 2\pi r \Delta r. \tag{3}$$

Objętość warstwy krzepnącej równolegle do osi r:

$$\Delta V_2 = \pi m\, r^2 \Delta r. \tag{4}$$

Spadek objętości spowodowany obniżaniem się zwierciadła ciekłego metalu:

$$\Delta V_3 = \pi r^2 \Delta z. \tag{5}$$

Bilans objętości w postaci

$$\Delta V_3 = (\Delta V_1 + \Delta V_2)\, \alpha_v, \tag{6}$$

gdzie α_v - skurcz objętościowy przy krzepnięciu, prowadzi do równania:

$$\frac{dz}{dr} - \frac{2z}{r}\alpha_v = \frac{3r - 2R}{r}\, m\, \alpha_v. \tag{7}$$

Całka ogólna równania liniowego

$$z = C\, r^{2\alpha_v}. \tag{8}$$

Po zastosowaniu metody wariacji Lagrange'a i wykorzystaniu warunku:

$$z = H \quad \text{dla} \quad r = R \tag{9}$$

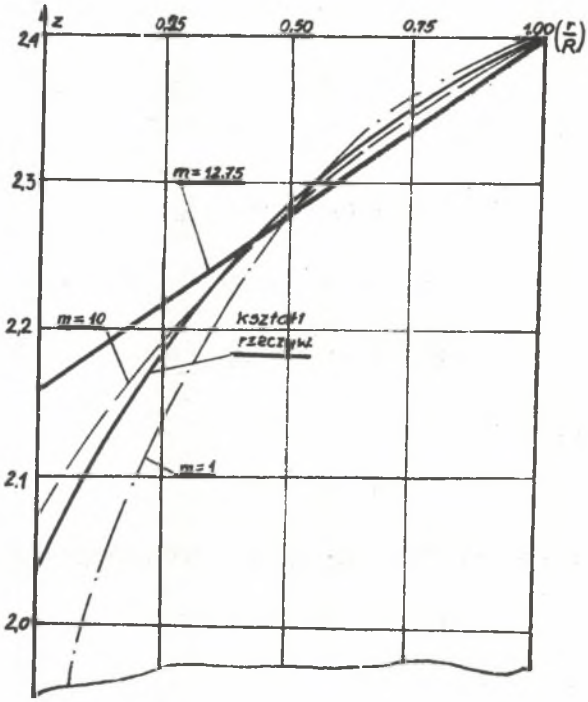
dochodzi się do rozwiązania w postaci

$$z = \left(H - m\,\frac{1+\alpha_v}{1-2\alpha_v}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^{2\alpha_v} + \left(\frac{3\alpha_v}{1-2\alpha_v}\,r + R\right)m. \qquad (10)$$

Należy zauważyć, że dla $m = 0$ (krzepnięcie jednokierunkowe), otrzymuje się znaną z literatury krzywą Brumghausa.
Dla $m = 1$, czyli dla przypadku gdy krzepnące warstwy są jednakowej grubości otrzymuje się

$$z = \left(H - \frac{1+\alpha_v}{1-2\alpha_v}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^{2\alpha_v} + \frac{3\alpha_v}{1-2\alpha_v}\,r + R. \qquad (11)$$

Założenie $m = 1$ znalazło m.in. zastosowanie w graficznej metodzie wyznaczania przybliżonego kształtu jamy skurczowej, zwanej metodą izosolidów.



Rys. 2. Kształt jamy skurczowej w zależności od parametru m

Przyjęcie wartości

$$m = \frac{H}{R} \frac{1 - 2\alpha_v}{1 + \alpha_v} \tag{12}$$

prowadzi do równania powierzchni stożkowej

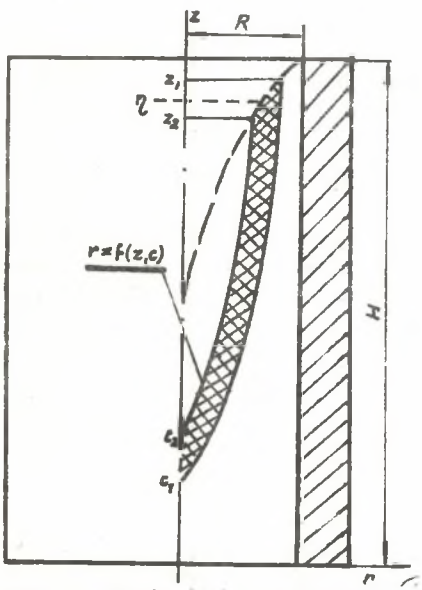
$$z = \frac{3\alpha_v}{1 + \alpha_v} \cdot \frac{H}{R} r + H \frac{1 - 2\alpha_v}{1 + \alpha_v}, \tag{13}$$

jest to górny przypadek graniczny. Ograniczeniem dolnym jest krzywa Brumghausa.

Rysunek 2 przedstawia kształt jamy skurczowej we wlewku walcowym o wysokości $H = 2{,}40$ m i średnicy $D = 0{,}35$ m dla kilku wartości parametru m. Na rysunku tym naniesiono również rzeczywisty kształt jamy skurczowej, zmierzony na wlewku o podobnych wymiarach, odlanym w hucie "Zygmunt".

4. Uwagi końcowe

Ostateczny kształt jamy skurczowej znaleziony wg równania (10) zależy od przyjęcia wartości parametru m. Kryteria doboru wielkości tego współczynnika mogą być ustalone drogą analizy materiału doświadczalnego, a w szczególności badań dokonywanych metodą wylewania. Należałoby tu dążyć do określenia zależności średniego stosunku prędkości krzepnięcia od warunków cieplnych i geometrycznych procesu. Autorzy pracy sugerują przyjmowanie wartości $m \in [1,5]$, przy czym dla wlewków o dużej smukłości wartości m będące w pobliżu dolnej granicy przedziału lub nawet nieco niższe.



Rys. 3. Uogólnione rozwiązanie krzepnięcia

Przytoczone wyżej rozważania można uogólnić, zakładając, że kolejne powierzchnie izosolidusowe tworzą jednoparametrową rodzinę krzywych (rysunek 3):

$$r = f(z, c) \tag{14}$$

Bilans objętości krzepnącego metalu przyjmuje wtedy postać

$$\pi\left[\int_{c_2}^{z_2} f^2(z, c_2)\, dz - \int_{c_1}^{z_1} f^2(z, c_1)\, dz - f^2(\eta)\Delta z\right]\alpha_v = \pi f^2(\eta)\Delta z, \quad (15)$$

gdzie

$$\eta \in [z_1, z_2].$$

Otrzymane równanie może być rozwiązane metodami przybliżonymi. Ścisłe rozwiązanie analityczne można uzyskać m.in. przyjmując dla powierzchni izosolidusowych opis przy pomocy jednoparametrowej rodziny parabol rzędu n.

LITERATURA

1. Gulajew B.B. - Zatwierdiewanije i nieodnorodnost' stali. Metałłurgizdat, Moskwa, 1950.
2. Gulajew B.B. - Litiejnyje processy. Maszgis, Moskwa, 1960.
3. Niechendzi I.A. - Czugunnoje litje, Metałłurgizdat, Moskwa, 1949.
4. Szargut J. Mochnacki B. - Archiwum Hutnictwa 3, 1971, 269.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФОРМЫ УСАДОЧНОЙ РАКОВИНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛИТКЕ ПРИ ЗАКЛАДКЕ

Р е з ю м е

В работе подано решение дифференциального уравнения, касающегося определённой модели затвердевания цилиндрического слитка. Представлена возможность обобщения решения. В заключительной части решены численные примеры.

COMPUTATION OF THE CONTRACTILE CAVITY IN A CYLINDRICAL INGOT, WHEN ASSUMING A TWO-DIRECTIONAL SOLIDIFICATION

S u m m a r y

In this paper there has been solved a differential equation concerning a given model of the solidification of a cylindrical ingot. A possibility of generalizing this solution has been suggested. The final part contains solutions of numerical examples.