ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973

Seria: Mechanika z. 50 Nr kol. 368

Wacław Sakwa, Ryszard Parkitny

UZUPEŁNIENIA I UWAGI DO METODY WYZNACZANIA NAPRĘŻEŃ W ODLEWACH

Streszczenie. W pracy przedstawiono równania przemieszczeniowe i naprężeniowe, dla zakresu narastającej warstwy termosprężystej odlewu. Naprężenia w chwili τ stygnięcia odlewu wyrażono jako sumę naprężeń określonych w zakresie narastania warstwy termosprężystej oraz nąprężeń odpowiadających stanom termicznym w chwili τ i τ_k. Ponadto przedyskutowano problem niejednorodności materiału odlewu.

1. Wstęp

Występujące w odlewach pola temperatur $t(x_i, \tau)$ obok stałych materiałowych - modułu sprężystości podłużnej E, modułu sprężystości poprzecznej G, granicznej wartości odkształceń termosprężystych $\varepsilon_s(t)$ oraz współczynnika rozszerzalności cieplnej α - determinują ich stany naprężenia.

Wartość granicznego odkształcenia termosprężystego $\varepsilon_s(t)$ wyraża się jako funkcję monotonicznie malejącą, spełniającą warunek

$$\varepsilon_s(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t \geqslant t_k. \tag{1}$$

Temperatura t_k zwana temperaturą krytyczną jest granicą rozdzielającą obszar swobodnych odkształceń termoplastycznych od obszaru odkształceń termosprężystych. Dla pola temperatur $t(x_i, \tau)$ ujmuje się ją zależnością

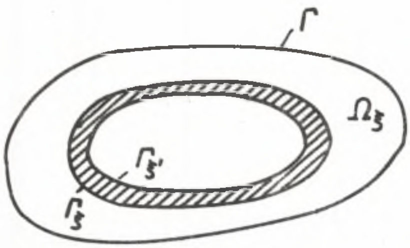
$$t(x_i, \tau_\xi) = t_k, \tag{2}$$

określoną dla czasu $\tau_\xi \in (\tau_p, \tau_k)$. Czas τ_p jest chwilą kiedy pierwszy punkt względnie zbiór punktów odlewu tworzących linie lub powierzchnie osiągnął temperaturę t_k. Czas τ_k określa ostatni punkt względnie zbiór punktów odlewu o temperaturze t_k.

2. Podstawy teorii

Niech w stygnącym odlewie w chwili τ_ξ część termosprężysta zajmuje objętość Ω_ξ, ograniczoną od strony formy odlewniczej powierzchnią brzegową Γ oraz od strony narastającej warstwy termosprężystej powierzchnia Γ_ξ

(rys. 1). Stan naprężenia odlewu odniesiony do chwili τ_ξ wynosi $\sigma_{ij}(x_i, \tau_\xi)$, dla $\tilde{\Omega}_\xi = \Omega_\xi \cup \Gamma \cup \Gamma_\xi$. W chwili $\tau_\xi + \Delta\tau_\xi$ następuje przemieszczenie powierzchni brzegowej do $\Gamma_{\xi'}$, a naprężenia zmieniają się do wartości $\sigma_{ij}(x_i, \tau_\xi + \Delta\tau_\xi)$. Obszarem określoności tych naprężeń pozostaje zbiór $x_i \in \tilde{\Omega}_\xi$. Dla $\tilde{\Omega}_{\xi'} - \tilde{\Omega}_\xi$ naprężenia $\sigma_{ij}(x_i, \tau_\xi + \Delta\tau_\xi)$ równe są zeru, gdyż przyrost warstwy termosprężystej w chwili $\Delta\tau_\xi$ odbywa się na odkształconą powierzchnię brzegową Γ_ξ.



Rys. 1. Przyrost warstwy termosprężystej odlewu w chwili $\Delta\tau$

Przyrost graniczny naprężeń $\Delta\sigma_{ij}(x_i, \tau_\xi) = \sigma_{ij}(x_i, \tau_\xi + \Delta\tau_\xi) - \sigma_{ij}(x_i, \tau_\xi)$ odniesiony do chwili $\Delta\tau$ wynosi

$$\lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\sigma_{ij}(x_i, \tau_\xi + \Delta\tau_\xi) - \sigma_{ij}(x_i, \tau_\xi)}{\Delta\tau} = \frac{\partial\sigma_{ij}(x_i, \tau_\xi)}{\partial\tau}$$

Biorąc pod uwagę fakt, iż $\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial\tau} \ll \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\tau}$, można napisać $\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\tau} \approx \frac{d\sigma_{ij}}{d\tau}$.

Pochodną względem czasu oznacza się dalej przez kropkę nad symbolem różniczkowanej wielkości.

W analogiczny sposób co naprężenia określa się przemieszczenia u_i jako prędkości przemieszczeń $\dot{u}_i$, odkształcenia ε_{ij} jako $\dot{\varepsilon}_{ij}$, a funkcję odkształcenia początkowego ε^o_{ij}, równą

$$\varepsilon^o_{ij} = \delta_{ij}\,\alpha t(x_i, \tau). \tag{3}$$

jako

$$\dot{\varepsilon}^o_{ij} = \delta_{ij}\,\alpha\dot{t}(x_i, \tau). \tag{4}$$

Równania przemieszczeniowe i naprężeniowe, wyrażone odpowiednio w prędkościach przemieszczeń i prędkościach naprężeń, wyprowadza się biorąc pod uwagę [1]:

1) zależności prędkości odkształceń od prędkości przemieszczeń

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}), \tag{5}$$

wraz z równaniami nierozdzielności prędkości odkształceń

$$\dot{\varepsilon}_{ij,kl} + \dot{\varepsilon}_{kl,ij} - \dot{\varepsilon}_{jl,ik} - \dot{\varepsilon}_{ik,jl} = 0, \tag{6}$$

2) warunki równowagi, wyrażone w prędkościach naprężeń

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = 0; \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \tag{7}$$

3) związki fizyczne, wiążące prędkości odkształceń z prędkościami naprężeń

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{o}_{ij} + \frac{1}{2G}\left(\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\,\delta_{ij}\,\dot{\Theta}\right),$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G\left[\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}^{o}_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\delta_{ij}(\dot{e} - \dot{e}^{o})\right], \tag{8}$$

gdzie $\dot{\Theta} = \dot{\sigma}_{ii}$, $\dot{e} = \dot{\varepsilon}_{ii}$ i $\dot{e}^{o} = \dot{\varepsilon}^{o}_{ii}$.

Po uwzględnieniu związku (4) i odpowiednim podstawieniu zależności (5÷8), analogicznym do stosowanych podstawień w teorii naprężeń cieplnych [1, 2, 3], otrzymuje się równania przemieszczeniowe wyrażone w prędkościach przemieszczeń:

$$\dot{u}_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu}\,\dot{u}_{j,ij} = 2\,\frac{1+\nu}{1-2\nu}\,\alpha\,\dot{t}_{,i}, \tag{9}$$

oraz równania naprężeniowe wyrażone w prędkościach naprężeń

$$\dot{\sigma}_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\,\dot{\Theta}_{ij} + \frac{\alpha E}{1+\nu}\left(\dot{t}_{,ij} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\,\delta_{ij}\,\dot{t}_{,kk}\right) = 0. \tag{10}$$

Do równań tych dołącza się warunki brzegowe i początkowe.

Warunki na powierzchni Γ_ξ, przy prędkości obciążenia równej zeru, wynoszą

$$\left[\dot{\sigma}_{ij}n_j\right]_{x_i \in \Gamma_\xi} = 0,$$

$$\left[(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})n_j + \frac{2\nu}{1-2\nu}\,\dot{u}_{k,k}n_i\right]_{x_i \in \Gamma_\xi} = 0. \tag{11}$$

Ograniczając się do swobodnego przemieszczenia powierzchni odlewów, warunki brzegowe na powierzchni Γ są analogiczne do warunków (11):

$$\left[\dot{\sigma}_{ij}n_j\right]_{x_i \in \Gamma} = 0,$$

$$\left[(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})n_j + \frac{2\nu}{1-2\nu}\,\dot{u}_{k,k}n_i\right]_{x_i \in \Gamma} = 0. \tag{12}$$

Równania (9) i (10) wraz z warunkami brzegowymi (11) i (12) określają w sposób jednoznaczny prędkości przemieszczeń $\dot{u}_i$ i prędkości naprężeń $\dot{\sigma}_{ij}$. Prędkości przemieszczenia $\dot{u}_i$ podstawione do (5) a następnie do (8_2) wyznaczają prędkości naprężeń $\dot{\sigma}_{ij}$, równe prędkościom naprężeń otrzymanym z równań naprężeniowych (10).

Naprężenia dla dowolnej chwili τ stygnięcia odlewów określa się w zależności

$$\sigma_{ij}(x_i, \tau) = \int_{\tau_\xi}^{\tau} \dot{\sigma}_{ij}(x_i, \tau')\, d\tau', \tag{13}$$

przy czym warunek początkowy przyjmuje się w postaci

$$\sigma_{ij}(\xi_i, \tau_\xi) = 0. \tag{14}$$

W warunku tym przyjęto, że swobodna część termoplastyczna odlewu nie oddziaływuje na jego obszar termosprężysty. Istnieje również możliwość ściślejszego ujęcia warunku początkowego (14), na przykład przyjmując część termoplastyczną odlewu jako ciecz nienewtonowska (ciało binghamowskie [7]).

Czas przejścia dowolnego punktu odlewu w zakres termosprężysty oraz wartość narastającej warstwy termosprężystej odlewu określa się z zależności (2), po jej rozwikłaniu względem τ i x_i. Odpowiednio otrzymuje się

$$\begin{aligned} \tau_\xi &= \tau(x_i,\ t_k), \\ \xi_i &= \xi_i(\tau,\ t_k). \end{aligned} \tag{15}$$

Rozpisując formułę (13) w sposób następujący:

$$\sigma_{ij}(x_i, \tau) = \int_{\tau_\xi}^{\tau_k} \dot{\sigma}_{ij}(x_i, \tau')\, d\tau' + \int_{\tau_k}^{\tau} \dot{\sigma}_{ij}(x_i, \tau')\, d\tau', \tag{16}$$

i dokonując operacji całkowania $\int_{\tau_k}^{\tau}$ na równaniach (9) i (10), kiedy to $\Gamma_\xi = 0$, dochodzi się do równań:

$$\begin{gathered} u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ij} - 2\,\frac{1+\nu}{1-2\nu}\,\alpha(t_{,i} - \tilde{t}_{,i}) = 0, \\ \sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\,\Theta_{,ij} + \frac{\alpha E}{1+\nu}\left[\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\delta_{ij}(t_{,kk} - \tilde{t}_{,kk}) + (t_{,ij} - \tilde{t}_{,ij})\right] = 0 \end{gathered} \tag{17}$$

gdzie $\tilde{t}$ oznacza krytyczny rozkład temperatur $\tilde{t} = t(x_i, \tau_k)$ odlewu.

Warunki brzegowe w tym przypadku wynoszą:

$$\left[\sigma_{ij} n_j\right]_{x_i \in \Gamma} = 0,$$

$$\left[(u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \frac{2\nu}{1 - 2\nu} u_{k,k} n_i\right]_{x_i \in \Gamma} = 0. \tag{18}$$

Równania (17) pokrywają się z równaniami końcowymi prac [5, 6]. Pozwalają one wyznaczyć naprężenia zasadnicze dla chwili τ stygnięcia odlewu. Naprężenia dopełniające, przez które się rozumie naprężenia dla chwili τ_k określają równania (9) i (10). Całkowite naprężenia w chwili τ stygnięcia odlewu, w myśl (16), są sumą naprężeń zasadniczych i dopełniających.

Naprężenia własne w odlewach wyznacza się jako naprężenia chwilowe określone dla czasu, w którym odlew osiąga temperaturę otoczenia. Są one sumą naprężeń cieplnych dla krytycznego rozkładu temperatur (równania (17)) oraz naprężeń dopełniających (chwila τ_k) wyznaczonych z (9) lub (10).

3. Uwagi dotyczące niejednorodności materiałów odlewów

W równaniach opisujących stan naprężenia w odlewach przyjęto stałą wartość E, G i α. Założenie niezmienności E, G i α upraszcza w sposób zasadniczy analityczne ujęcie zjawiska, odbiega jednak od stanu faktycznego.

Uwzględnienie w równaniach (9) i (10) zmienności współczynnika rozszerzalności cieplnej $\alpha = \alpha(t(x_i, \tau))$ nie przedstawia większej trudności. W miejsce odkształcenia początkowego (3) i prędkości odkształcenia początkowego (4) pojawiają się bowiem zależności

$$\varepsilon^{o}_{ij} = \delta_{ij} \alpha t(x_i, \tau),$$

$$\dot{\varepsilon}^{o}_{ij} = \delta_{ij}\left[\alpha + \frac{d\alpha}{dt} t(x_i, \tau)\right]\dot{t}(x_i, \tau), \tag{19}$$

które nie zmieniają charakteru równań różniczkowych (9) i (10), komplikują co najwyżej człony zawierające $\dot{t}$.

Uwzględnienie zmienności modułu sprężystości podłużnej E i modułu sprężystości poprzecznej G prowadzi do skomplikowanych równań różniczkowych. Na przykład równania przemieszczeniowe wyrażone w prędkościach przemieszczeń, dla stałej wartości α, przyjmują postać

$$\dot{u}_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu}\dot{u}_{j,ij} - 2\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha\dot{t}_{,i} + \frac{1}{G}\frac{dG}{dt}\dot{t}(u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu}u_{j,ij} +$$

$$- 2\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha t_{,i}) + \frac{1}{G}\frac{dG}{dt}\dot{t}_{,i}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\dot{u}_{j,j} - 2\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha\dot{t}) +$$

$$+ \frac{1}{G}(\frac{d^2G}{dt^2}\dot{t}\,t_{,i} + \frac{dG}{dt}\dot{t}_{,i})(u_{i,j} + u_{j,i} + \frac{2\nu}{1-2\nu}u_{j,j} - 2\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha t) = 0. \quad (20)$$

Rozwiązanie równania (20) czy choćby właściwa jego interpretacja jest ogromnie trudna. Na obecnym etapie badań nie wydaje się stosowne takie sformułowanie zagadnienia. Musi ono bowiem obok swej ścisłości uwzględniać możliwość korzystania z istniejących rozwiązań,na przykład z rozwiązań teorii naprężeń cieplnych. Jednakowoż w celu uniknięcia większych rozbieżności rozwiązań liczbowych z praktyką proponuje się uwzględnienie zmiany E, G i α w sposób jak uczyniono to w pracach [5, 6]. Odpowiadałoby to pominięciu w równaniu (20) wszystkich członów zawierających $\frac{1}{G}\frac{dG}{dt}$, jako znikomo małych w porównaniu z jednością. Równania przemieszczeniowe (20) i odpowiadające im równania naprężeniowe przyjmują zatem postać równań (9) i (10). Uwzględnia się w nich tylko zmianę stałych materiałowych. Na fakt możliwości takiego podejścia do zagadnień ośrodków niejednorodnych zwrócił uwagę J. Nowiński (końcowa część pracy [4]).

LITERATURA

1. B. Boley, J. Weiner - Theory of Thermal Stresses,New York-London,1960.
2. W. Nowącki - Teoria sprężystości, Warszawa, 1970.
3. W. Nowacki - Zagadnienia termosprężystości, Warszawa, 1960.
4. J. Nowiński - Arch. Mech., Stos., 4, 1953.
5. W. Sakwa, R. Parkitny - Arch. Hutn. 4, 1970.
6. W. Sakwa, R. Parkitny - Giesserei-Forschung, 3, 1971,
7. W.L. Wilkinson - Ciecze nienewtonowskie, Warszawa, 1963.

ДОПОЛНЕНИЯ И ЗАМЕЧАНИЯ К МЕТОДУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ОТЛИВКАХ

Р е з ю м е

Представленная работа является продолжением работ [5, 6]. В ней даётся формулировку управнений перемещений и напряжений для пределов нарастающего слоя отливка. Напряжение в моменте τ остывания отливка выражены суммой напряжений определённых в пределе нарастания термоупругово слоя, а также напряжений соответствующих термическим состояниям в моментах τ и τ_K. Кроме того обсуждается проблема неоднородности материала отливки.

SUPPLEMENTS AND REMARKS CONCERNING THE METHOD OF DETERMINING STRESSES IN CASTINGS

S u m m a r y

The present paper is a continuation of former publications [5, 6], and contains equations for the displacement and stress in the accumulating thermo-elastic layer of a casting. The stress at the moment of cooling down τ has been expressed as the sum of stresses within the range of the accumulation of a thermo-elastic layer and of the stresses which correspond to the thermal states at the moment τ and τ_k. Moreover, the problem of the heterogeneity of the casting material has been dealt with, too.