

**ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ**

MARIAN SARNA

**ZASTOSOWANIE ZBIORÓW
ROZMYTYCH W MODELOWANIU
UKŁADÓW MECHANICZNYCH**

MECHANIKA

**Z. 90
GLIWICE
1989**

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 990

MARIAN SARNA

ZASTOSOWANIE ZBIORÓW
ROZMYTYCH W MODELOWANIU
UKŁADÓW MECHANICZNYCH

GLIWICE

1989

OPINIODAWCY

Prof. dr hab. inż. Jan Osiecki
Prof. dr hab. inż. Czesław Woźniak

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY — Prof. dr hab. inż. Jan Węgrzyn
REDAKTOR DZIAŁU — Prof. dr hab. inż. Józef Wojnarowski
SEKRETARZ REDAKCJI — Mgr Elżbieta Stinzing

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Alicja Nowacka

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0434-0817

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł. 160+85	Ark. wyd. 5,35	Ark. druk. 4,5	Papier offset. kl III 70x160, 70 g
Oddano do druku 30.12.88	Podpis. do druku 22.02.89	Druk ukończ. w kwietniu 1989	
Zam. 937/88	C-23	Cena zł 107,-	

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

	Str.
1. WSTĘP	7
2. MODELOWANIE I MODELE MATEMATYCZNE UKŁADÓW MECHANICZNYCH	11
3. "TOLERANCYJNA" ADEKWATNOŚĆ MODELU MATEMATYCZNEGO	15
4. "NIEOSTRA" ADEKWATNOŚĆ MODELU MATEMATYCZNEGO	18
5. SEKWENCYJNA PROCEDURA WYZNACZANIA "NIEOSTREJ" ADEKWATNOŚCI MODELU MATEMATYCZNEGO	29
6. PODSUMOWANIE	37
7. PRZYKŁAD	39
DODATEK	52
LITERATURA	63
STRESZCZENIA	67

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. ВВЕДЕНИЕ	7
2. МОДЕЛИРОВАНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ	11
3. "ТОЛЕРАНТНОСТНАЯ" АДЕКВАТНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ	15
4. "НЕЧЁТКАЯ" АДЕКВАТНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ	18
5. СЕКВЕНЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА ОПРЕДЕЛЕНИЯ "НЕЧЁТКОЙ" АДЕКВАТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ	29
6. ИТОГИ	37
7. ПРИМЕР	39
ПРИЛОЖЕНИЕ	52
ЛИТЕРАТУРА	63
РЕЗЮМЕ	67

CONTENTS

	Page
1. INTRODUCTION	7
2. MODELLING AND MATHEMATICAL MODELS OF MECHANICAL SYSTEMS	11
3. "TOLERANT" ADEQUACY OF MATHEMATICAL MODEL	15
4. "FUZZY" ADEQUACY OF MATHEMATICAL MODEL	18
5. SEQUENCE PROCEDURE OF "FUZZY" ADEQUACY ESTIMATION TO MATHEMATICAL MODELS	29
6. RECAPITULATION	37
7. EXAMPLE	39
APPENDIX	52
REFERENCES	63
SUMMARY	67

1. WSTĘP

1.1. Pojęcie modelu jest mocno ugruntowane w nauce i można napotkać je w wielu pracach i wydaniach książkowych poświęconych różnym dyscyplinom naukowym. Rozumiane ono bywa przy tym różnie. Z pragmatycznego punktu widzenia, użytecznego dla niniejszej pracy, model jest pewnym tworem zastępczym w stosunku do modelowanego obiektu badań, odtwarzającym własności badanego obiektu i stanowiącym narzędzie w uzyskiwaniu informacji o badanym obiekcie, w tym także uprzednio nie znanych [1]. Potrzeba zastąpienia badanego obiektu innym, bardziej dostępnym w badaniu, wynika ze złożoności badanej rzeczywistości fizycznej, a o tym, czy dany twór zastępczy jest modelem, decyduje interpretacja badającego [2]. Podział i klasyfikację modeli można przeprowadzać ze względu na różne kryteria i można tu odnotować dużą różnorodność ujęć [1,4-8].

Dla celu niniejszej pracy, w której zajmiemy się modelami i modelowaniem maszyn, wymienimy klasy modeli nazywanych modelami matematycznymi i modelami rozmytymi [4, 5, 8].

Przez modele matematyczne będziemy rozumieli tzw. opisy badanego obiektu (maszyny) w formalnym języku matematyki. Mają one często formę równań różniczkowych, rozwiązań tych równań, równań algebraicznych, równań całkowych, równań różnicowych, struktur grafowych, procedur komputerowych [3, 4, 6-10]. O rozmytych modelach matematycznych będziemy mówili wówczas, gdy w badanych własnościach uwzględnimy w sposób formalny tzw. czynniki nieostre [11-22]. Nieostrość nazwy (pojęcia) "A" oznacza, że można wskazać na przedmioty, co do których nie można powiedzieć, że są desygnatami nazwy "A" ani nazwy przeciwnej "nie A" [23]. Formalny sposób uwzględniania nieostrości w modelowaniu matematycznym oparty jest na teoriomnogościowej koncepcji zbioru o wielowartościowej funkcji charakterystycznej. Wartości funkcji charakterystycznej, wyznaczające stopień przynależności elementu do zbioru, interpretowane są jako stopień posiadania przez element cechy nieostrej. Zastosowanie tych zbiorów do analizy nieostrych problemów zostało zainicjowane w 1965 roku przez L.A. Zadeha [24], a zbiory zostały nazwane zbiorami rozmytymi (fuzzy sets).

1.2. Od 1965 r. można zanotować intensywny rozwój teorii i zastosowań zbiorów rozmytych. Zastosowania obejmują wiele dziedzin nauki, jak: technikę, fizykę, matematykę, cybernetykę, filozofię, logikę, lingwistykę, psychologię, socjologię, ekonomię, medycynę, geografę, ochronę środo-

wiska. Ukazuje się bardzo duża ilość publikacji rozproszonych w różnych specjalistycznych wydawnictwach, a także w poświęconych tylko zbiorom rozmytym, jak: "An International Journal Fuzzy Sets and Systems" i "Fuzzy Mathematics". Przegląd bibliograficzny z 1979 r. zawiera 1799 pozycji [25].

Zastosowania zbiorów rozmytych budzą jeszcze wiele kontrowersji, które są często wynikiem niezrozumienia idei tej teorii, jak i przeceniania jej obecnych możliwości. Jako motto dla jej stosowania niechaj posłuży cytata [26]: "Rozmytość nie jest przecież ani rezygnacją z precyzji pojęć, ani też jej pochwałą, lecz próbą względnie ścisłego ujmowania wyrażen nieostrych, z którymi mamy do czynienia nie tylko w życiu codziennym, lecz także w naukach społecznych i ścisłych, np. w fizyce".

Wśród zastosowań zbiorów rozmytych w mechanice warto odnotować takie jak:

- sterowanie procesem obróbki mechanicznej [11],
- badanie bezpieczeństwa konstrukcji [12, 13, 21],
- diagnostyka maszyn [16, 31],
- dobór rozwiązań konstrukcyjnych [14, 27, 32, 33],
- budowa modeli matematycznych i badanie ich własności [15, 18-20, 22, 28-30, 85, 86].

Do podstawowych pozycji literaturowych w teorii zbiorów rozmytych można zaliczyć [34-42].

1.3. Poznawcza wartość informacji o modelowanym obiekcie uzyskiwanych za pomocą modelu matematycznego, zależy między innymi od tego jak "dokładnie" i w jakim "zakresie" model matematyczny odtwarza własności modelowanego obiektu. "Dokładność" i "zakres" odtwarzanych przez model matematyczny własności wchodzi w skład jego własności, którą nazywamy adekwatnością. Jest to własność, która nie jest tożsama z "byciem modelem" [43]. Problem "dokładności" modelu matematycznego występuje podczas jego tworzenia na etapie identyfikacji, w którym dla skończonego zbioru danych pomiarowych tak dobiera się wartości parametrów modelu, aby "odchylenie" pomiędzy modelem i modelowanym obiektem było minimalne ze względu na przyjętą miarę odchylenia [44-50]. W badaniu adekwatności modelu uwzględniamy nie tylko "dokładność", ale także eksplicite "zakres" i cel, dla którego model jest budowany.

Ocenę i wartościowanie adekwatności modelu matematycznego przeprowadza się na ogół intuicyjnie i heurystycznie. Dysponując danymi pomiarowymi uzyskanymi na modelowanym obiekcie i danymi numerycznymi otrzymanymi z obliczeń na podstawie modelu matematycznego badający jest często w stanie szybko i w sposób trafny dokonać oceny adekwatności modelu bez uciekania się do formalizowania zagadnienia. W przypadku złożonych obiektów badań, skomplikowanych modeli matematycznych, podejście heurystyczne, intuicyjne, może napotykać trudności w dokonaniu wartościowania i dycho-

tomicznej oceny modelu matematycznego. W dużym uproszczeniu problem badania adekwatności modelu matematycznego można sprowadzić do badania pewnej funkcji $\varphi(x,y)$, gdzie x - dotyczy modelowanego obiektu, y - modelu matematycznego oraz przyjęcia pewnej liczby $\alpha \in \mathbb{R}_+$ takiej, że adekwatność jest osiągnięta gdy zachodzi $\varphi(x,y) \leq \alpha$ dla $(x,y) \in \text{dom}\varphi$, (w przestrzeni unormowanej $\varphi(x,y)$ może być normą). Dobór funkcji φ oraz liczby α jest luźno związany z celem, dla którego model jest tworzony, brak jest w tym względzie reguł doboru φ i α , dobór ten odbywa się w dużym stopniu intuicyjnie [47]. Stwarza to nieostrość prowadzącą do możliwych różnych ocen tego samego modelu. O nieostrości w ocenach modelu matematycznego można mówić zarówno, gdy kilku ekspertów dobiera niezależnie od siebie φ i α i dokonuje sprawdzenia czy $\varphi(x,y) \leq \alpha$, jak i wtedy gdy jeden z nich wybierając φ i α ma wątpliwości co do oceny modelu. Na przykład niechaj $\alpha = 1000$, $\varphi_1(x,y) = 999$, $\varphi_2(x,y) = 1005$, $\varphi_3(x,y) = 500$. Nasuwają się tutaj naturalne wątpliwości: czy model matematyczny dla $\varphi_1(x,y) = 999$ jest na pewno adekwatny, a dla $\varphi_2(x,y) = 1005$ nie adekwatny? Czy ustalenie wartości $\alpha = 1000$ nie mogłoby być inne? Można wskazać wiele sposobów usuwania tego typu nieostrości w ocenie i wartościowaniu modeli czy to przez arbitralne przyjęcie danej wartości α jako obowiązującej, czy przez wprowadzenie przedziału tolerancji w zachodzeniu $\varphi(x,y) \leq \alpha$. Podejścia takie ułatwiające dokonanie oceny i wartościowania adekwatności modeli matematycznych polegają w istocie na zawężaniu informacji, jaką noszą dane empiryczne i obliczeniowe. Podjęty w niniejszej pracy problem adekwatności wydaje się zatem ważny tak z teoretycznego punktu widzenia, jak i ze względu na praktyczne implikacje. Celem niniejszej pracy jest opracowanie formalnej metody wyznaczania adekwatności przy wykorzystaniu metod i pojęć teorii zbiorów rozmytych. Proponowane podejście do zagadnienia przedstawia "logiczną redukcję" nieostrości występującej przy ocenie i wartościowaniu adekwatności modeli matematycznych do zbiorów o wielowartościowej funkcji charakterystycznej. Pozwoliło to włączyć czynnik nieostrości w formalizm metody. Oceny adekwatności dokonywane są formalnie na nie zawężanej bazie informacji, korzystniej niż przy podejściu tradycyjnym.

Tezy pracy:

- 1^o Adekwatność modeli matematycznych układów mechanicznych jest nieostrą własnością modeli.
- 2^o Nieostrość adekwatności modeli matematycznych układów mechanicznych można opisać wykorzystując metody i takie pojęcia teorii zbiorów rozmytych, jak: rozmytej miary zbioru, rozmytej całki, liczby rozmytej i rozmytej binarnej relacji utworzonej na zbiorach liczb rozmytych.
- 3^o Sekwencyjna procedura wyznaczania adekwatności modeli matematycznych metodami teorii zbiorów rozmytych prowadzi do dychotomicznych ocen adekwatności.

Słowa kluczowe:

model matematyczny, system relacyjny, system tolerancyjny, wnioskowanie empiryczne, liczby rozmyte, relacje rozmyte, rozmyta miara, rozmyta całka.

2. MODELOWANIE I MODELE MATEMATYCZNE UKŁADÓW MECHANICZNYCH

2.1. Przedmiotem wyjściowym naszych rozważań będzie wydzielony w uniwersum obiekt techniczny nazywany maszyną. Wszystko co nim nie jest stanowi jego otoczenie. Celem utworzenia modelu matematycznego rozważanego obiektu dokonajmy konceptualizacji zagadnienia. Przeprowadźmy zatem myślą kwantyzację maszyny, tj. dokonajmy jej podziału na obiekty prostsze, chwilowo niepodzielne, jak: bryły nieodkształcalne, odkształcalne kontinua, dwójniki bezmasowe: sprężyste, lepkie, plastyczne. Sposób przeprowadzenia tego podziału, czyli tzw. redukcja fenomenologiczna obiektu badań zależy od celu badań, rodzaju badanych własności czy procesów oraz poziomu szczegółowości rozważań. Modelowanie jest bowiem wybiórcze, aspektowe i przybliżone. Ten etap budowy modelu prowadzi do utworzenia tzw. "modelu fizycznego" [6] czy "fenomenologicznego" [4], który jest tworem myślowym zastępującym badany obiekt. W kolejnym kroku modelowania składnikom modelu fizycznego przyporządkujemy odpowiednie wielkości fizyczne i usralamy pomiędzy nimi zależności "podstawowe" [6, 52, 53]. Każdej z "podstawowych" zależności możemy przypisać jedną z własności:

- 1^o jest zasadą mechaniki Newtona,
- 2^o jest równaniem konstytutywnym,
- 3^o jest równaniem więzów w układzie,
- 4^o jest zasadą ciągłości ruchu,
- 5^o jest zasadą zachowania (energii, pędu, momentu pędu),
- 6^o jest matematycznym następstwem przynajmniej jednej z 1^o-5^o.

Wykonanie odpowiednich operacji matematycznych na zależnościach "podstawowych" prowadzi między innymi do równań różniczkowych, a w konsekwencji ewentualnych rozwiązań tych równań. Zależności "podstawowe" łącznie z modelem fizycznym mogą prowadzić do utworzenia struktury grafowej, która jest także formą modelu matematycznego, bez konieczności wypisywania równań różniczkowych [3]. Należy tutaj zauważyć, że naszkicowana wyżej procedura tworzenia modelu matematycznego jest tylko jednym z wielu możliwych sposobów budowania modelu matematycznego [8, 51-61]. Modelowanie jest procesem twórczym i może przebiegać według różnych schematów, zależnie od predyapozycji twórczych podmiotu modelowania [62].

2.2. Postulujemy w dalszych rozważaniach, że model matematyczny układu mechanicznego można przedstawić jako system relacyjny:

$$S_y = \langle Y, R_y \rangle.$$

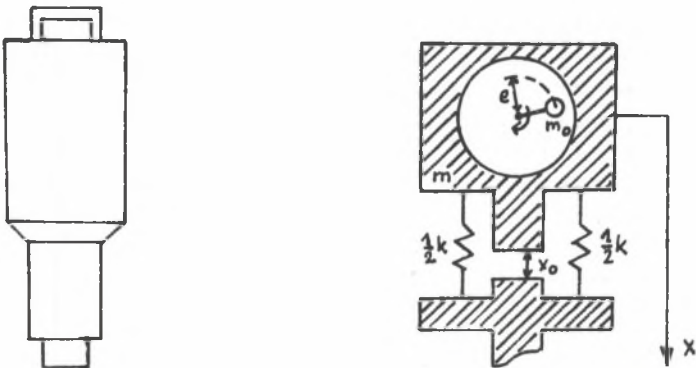
gdzie: Y jest zbiorem elementów indywidualnych - liczb rzeczywistych z przestrzeni zmiennych fizycznych, R_y jest skończonym zbiorem relacji wielocłonowych. Zbiór relacji R_y jest podzbiorem zbioru relacji tworzonych jako:

- 1^o Podzbiory skończonych produktów kartezjańskich: $Y \times Y \times \dots \times Y$ skończoną ilość razy. Relacją A_n jest zbiór (także nieskończony) n -tek $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y \times \dots \times Y$ n razy. Zachodzi przy tym $A_n \subset Y \times \dots \times Y$ n razy.
- 2^o Podzbiory skończonych produktów kartezjańskich pomiędzy relacjami jak w 1^o, a więc np. $B_h \subset A_n \times A_m \times \dots \times A_p$ 1 razy.
- 3^o Podzbiory skończonych produktów kartezjańskich pomiędzy relacjami jak w 2^o.
- 4^o Operację jak wyżej powtarzany skończoną, potrzebną ilość razy.

Rozpatrywany zbiór relacji R_y jest z założenia skończonym, zatem relacje można w nim ponumerować wskaźnikiem $i \in I$, zapisując $R_y = \{R_{n_i}^y \mid i \in I\}$, gdzie n oznacza ile członową jest i -ta relacja. Będziemy dalej stosowali notację $(y_1, y_2, \dots, y_{n_i}) \in R_{n_i}^y$, natomiast dziedziny relacji $R_{n_i}^y$ oznaczymy $Y_{1_i}, Y_{2_i}, \dots, Y_{n_i}$.

Tak utworzony system relacyjny S_y będący formą modelu matematycznego będziemy dalej nazywali **s y s t e m e m i d e a l n y m**.

Ilustracją wprowadzonych pojęć niechaj będzie model matematyczny wibromłota, którego model fenomenologiczny przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Badany obiekt i jego model fenomenologiczny
Fig. 1. Examined object and phenomenological model

Równanie ruchu wibromiota ma postać

$$m \ddot{x} + k x = m_0 e p^2 \cos(pt + \varphi),$$

które oznaczmy jako relację $R_9^y \ni (\ddot{x}, x, k, m, m_0, e, p, t, \varphi)$, jego zaś odpowiednie rozwiązanie [78]

$$\dot{x}_0 = \frac{2\eta p}{(1 - \delta)(1 + d^2)} \left[S d \pm \sqrt{\frac{1 + d^2}{(1 - \xi^2)^2} - S^2} \right],$$

jako relację $R_2^y \ni (\dot{x}_0, \delta, d, \xi, p, \delta, \eta)$. Zbiór relacji R_y ma zatem postać: $R_y = \{R_9^y, R_2^y\}$.

2.3. Zauważmy, że często dane liczbowe uzyskane za pomocą modelu matematycznego są czymś innym niż faktyczne, "idealne" dane, które "reprezentuje" model matematyczny. Ma to miejsce między innymi przy stosowaniu komputerowej techniki obliczeniowej, gdzie obliczenia prowadzone są w sposób dyskretny z pewnym błędem powiększającym w kolejnych krokach iteracyjnych. Uzysadnionym jest zatem rozróżnienie pomiędzy systemem idealnym S_y i jego numerycznym reprezentantem $S_{\bar{y}} = \langle \bar{y}, R_{\bar{y}} \rangle$ o tej samej strukturze. System $S_{\bar{y}}$ będziemy nazywali systemem z a s t ę p c z y m dla systemu S_y .

2.4. Działalność pomiarowa na modelowanym obiekcie materialnym jest planowana (programowana) na podstawie modelu matematycznego. Prowadzi ona do przyporządkowania obiektom materialnym liczb \bar{x} z przestrzeni zmiennych fizycznych, a raczej relacji pomiędzy zbiorami \bar{x} tych liczb. Przedstawmy zatem wyniki pomiaru w formie systemu relacyjnego $S_{\bar{x}} = \langle \bar{x}, R_{\bar{x}} \rangle$.

Każdy pomiar jest prowadzony za pomocą środków, które w większym lub mniejszym stopniu zmieniają obiekt badań i nie jest możliwe empiryczne wyznaczenie badanej wielkości z nieskończoną dokładnością. Każdy odczyt pomiarowy zawiera w sobie błąd systematyczny i przypadkowy. Zatem dane empiryczne $\bar{x} \in \bar{x}$ nie są tym samym, co wartości "prawdziwe" $x \in X$. Poza tym, pomiar realizowany jest w skończonej ilości miejsc zlokalizowanych na badanym obiekcie i ilość odczytów pomiarowych jest skończona. Sensowne zatem wydaje się odróżnienie od systemu $S_{\bar{x}}$ systemu relacyjnego $S_x = \langle X, R_x \rangle$, o którym będziemy mówili, że jest idealizacją systemu empirycznego $S_{\bar{x}}$, idealizacją ze względu na: błędy w pomiarze, skończoną ilość punktów pomiarowych i skończoną ilość odczytów albo że system $S_{\bar{x}}$ jest aproksymacją systemu S_x . System S_x ("rzeczywistość istniejąca poza bezpośrednim empirycznym zasięgiem") będziemy dalej nazywali s y s t e m e m r z e c z y w i s t y m. W odniesieniu do zbioru relacji R_x

będziemy stosowali notację $R_x = \{R_{m_k}^x \mid k \in K\}$, $(x_1, \dots, x_{m_k}) \in R_{m_k}^x$, dziedzi-
ny relacji $R_{m_k}^x$ będziemy oznaczali: $X_{1_k}, X_{2_k}, \dots, X_{m_k}$.

W tabelicy 1 przedstawiono zestawienie wprowadzonej wyżej rodziny sy-
stemów relacyjnych.

Tabela 1

Rodzina systemów relacyjnych

	S y s t e m	Charakterystyka
Abstrakcyjne	idealny $S_Y = \langle Y, R_Y \rangle$	forma modelu matematycznego
	rzeczywisty $S_X = \langle X, R_X \rangle$	model eksperymentu
Empiryczne	zastępczy $S_{\bar{Y}} = \langle \bar{Y}, R_{\bar{Y}} \rangle$	numeryczna reprezentacja systemu idealnego
	zastępczy $S_{\bar{X}} = \langle \bar{X}, R_{\bar{X}} \rangle$	wyznaczony bezpośrednio w pomiarach

3. "TOLERANCYJNA" ADEKWATNOŚĆ MODELU MATEMATYCZNEGO

3.1. Zauważmy, że niektóre z relacji $R_{n_i}^Y$ systemu idealnego S_Y mogą być utworzone na zmiennych fizycznych, których "sens fizyczny" jest trudny do zrozumienia i eksperymentalnej interpretacji. Jako przykład niechaj posłużą znane w teorii drgań falowe równanie Thimoshenki dla pręta:

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - \frac{I}{S} \left(1 + \frac{E}{\eta^{*G}}\right) \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\rho I}{\eta^{*SG}} \cdot \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} = 0$$

Możemy je uważać za jedną z relacji systemu S_Y będącą modelem matematycznym zjawiska, które nazywamy drganiem poprzecznym pręta.

W fizycznej interpretacji nie jest zrozumiałe co reprezentuje np. człon $\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4}$, aczkolwiek ma on wymiar fizyczny $\left[\frac{m}{s^4}\right]$ i pomnożony przez $\frac{\rho I}{\eta^{*SG}}$ daje fizyczną wielkość o wymiarze przyspieszenia. Trudno jest więc wskazać w systemie S_X relację będącą odpowiednikiem równania Thimoshenki. Rozwiązując jednak równanie Thimoshenki możemy utworzyć nowe relacje, dla których wskazanie odpowiedników w systemie S_X nie następuje trudności. Zatem ze zbioru relacji $\{R_{n_i}^Y \mid i \in I\}$ można wybrać podzbiór $\{R_{n_i}^Y \mid i \in I'\}$, $I' \subset I$ taki, że dla każdej relacji z tego podzbioru można wskazać relację "odpowiednią" w $\{R_{n_k}^X \mid k \in K\}$.

Stwierdzenie, że S_Y jest modelem matematycznym dla S_X oznacza, że można wskazać "podzbiory odpowiedniości" $\Gamma_u \subset X_u \times Y_u$, $u = 1, 2, \dots, n_i$, dla których elementami są pary $(x_u, y_u) \in \Gamma_u$ utworzone z elementów dziedzin relacji "odpowiednich" $R_{n_i}^X, R_{n_i}^Y$. Oznaczmy dalej $\Gamma = \bigcup_{u=1, 2, \dots, n_i} \Gamma_u, \Gamma \subset X \times Y$.

3.2. Przyjmijmy w dalszych rozważaniach, że zmienne fizyczne, na których utworzono wyżej rodzinę systemów relacyjnych, należą do zbioru w przestrzeni zmiennych fizycznych, na którym utworzono system tolerancyjny $\langle X, \underline{\square} \rangle$ tj. zbiór relacji zwrotnych, symetrycznych i spełniających warunki: $(\forall \delta_1, \delta_2 \in \underline{\square}) [\delta_1 \wedge \delta_2 \in \underline{\square}, \delta_1 \cup \delta_2 \in \underline{\square}]$ oraz takich, że $(x_1, x_2) \in \delta$ jeśli $d(x_1, x_2) < r$; $r \in \mathbb{R}$, $d \in \{\rho \mid \rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+\}$.

Celem formalnego określenia adekwatności modelu matematycznego wprowadźmy następujące pojęcia pomocnicze:

Propozycja 1

System S_y nazwiemy zgodnym z S_x w tolerancji $\delta_s \in \bar{M}$, jeśli dla wszystkich relacji "odpowiednich" $R_{n_1}^y, R_{n_1}^x, i \in I'$, każdego $f_u = (x_u, y_u) \in \Gamma_u$, każdego $u = 1, 2, \dots, n_1$, zachodzi $(x_u, y_u) \in \delta_s$. Zgodność tę oznaczymy $[[S_y, S_x]]_s$.

Propozycja 2

System S_y nazwiemy słabo zgodnym z S_x w tolerancji $\delta'_s \in \bar{M}$, jeśli dla relacji "odpowiednich" $R_{n_1}^y, R_{n_1}^x$ można wybrać z "podzbiorów odpowiedniości" $\Gamma_u, u = 1, 2, \dots, n_1$ takie $f'_u = (x'_u, y'_u) \in \Gamma_u$, że zachodzi $(x'_u, y'_u) \in \delta'_s$.

Słabą zgodność oznaczymy $[S_y, S_x]_s$.

Oczywiste są następujące własności: $[[S_y, S_x]]_s \iff [[S_x, S_y]]_s$,

$[S_y, S_x]_s \iff [S_x, S_y]_s, [[S_y, S_x]]_s \implies [S_y, S_x]_s$.

W analogiczny sposób można utworzyć: $[[S_y, S_{\bar{x}}]]_s, [[S_{\bar{y}}, S_y]]_s, [[S_{\bar{x}}, S_x]]_s$.

3.3. Jako wyjściową dla dalszych rozważań przyjmijmy następującą definicję adekwatności modelu matematycznego:

Definicja 1

Model matematyczny będziemy nazywali adekwatnym w odniesieniu do modelowanego obiektu (S_y w odniesieniu do S_x), jeśli dla przyjętego (stosownie do celu modelu) $\varepsilon > 0$ i $\delta_\varepsilon \in \bar{M}$ zachodzi $[[S_y, S_x]]_\varepsilon$.

Zgodnie z powyższą definicją adekwatność jest własnością pary (S_y, S_x) , a dla jej wyznaczenia konieczny jest dobór $\varepsilon, \delta_\varepsilon$. Dobór ε i δ_ε jest luźno związany z celem modelu matematycznego (celem dla którego model jest tworzony) i brak jest tutaj wyraźnych reguł jego doboru [47, 48]. W wyborze tolerancji δ_ε można wykorzystać znane metryki, jak: Minkowskiego

$(\rho_r(x, y) = \left[\sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^r \right]^{\frac{1}{r}}, r \geq 1)$, Hamminga $(\rho(x, y) = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|)$, Czebyszewa $(\rho(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|)$. Przy dobranej tolerancji wyznaczenie poszukiwanej własności pary (S_y, S_x) nie jest sprawą prostą. Jak pokazano w tabelicy 2, empirycznie i bezpośrednio wyznaczamy bowiem $S_{\bar{y}}, S_{\bar{x}}$ oraz $p \in R_+$, dla którego zachodzi $[[S_{\bar{y}}, S_{\bar{x}}]]_p$. Następnie uwzględniając błędy pomiaru, błędy obliczeń, skończoną ilość odczytów w pomiarze, skończoną ilość punktów pomiaru na badanym obiekcie, oceniamy systemy $(S_{\bar{x}}, S_x), (S_{\bar{y}}, S_y)$ jako słabo zgodne w tolerancjach δ'_r, δ'_s , tj. $[S_{\bar{x}}, S_x]_r, [S_{\bar{y}}, S_y]_s$ - tabl.2.

W kolejnym kroku wyznaczania adekwatności modelu matematycznego, ze słabej zgodności $[S_{\bar{x}}, S_x]_r, [S_{\bar{y}}, S_y]_s$ wnioskujemy empirycznie o zgodności $[[S_y, S_x]]_\varepsilon$.

Procedura tolerancyjnego wyznaczania adekwatności

0		wyznaczone bezpośrednio empirycznie
1		ustalone empirycznie
2		wnioskowane empirycznie: 1) indukcja niezupełna 2) redukcja 3) analogia 4) wnioskowanie statystyczne
3	<p>$\epsilon = \min [(r+p), (s+p)]$</p>	

Zauważmy, że bazą odniesienia (przyjętą za "pewną") dla oceny adekwatności modelu matematycznego jest system rzeczywisty S_x , który nie jest jednak "tożsamy z prawdziwymi warunkami pracy obiektu". Zauważmy również, że wnioskowanie nazywane wnioskowaniem empirycznym jest operacją niepewną, chociaż powszechną w naukach empirycznych [63-65]. Metody i mechanizm wnioskowania empirycznego przedstawiono w pracy [15].

Podsumowując powyższe stwierdzenia i uwagi o pewnej dowolności w doborze ϵ , δ_ϵ , jak i niepewności wnioskowania empirycznego, można stwierdzić, że problem wyznaczania adekwatności modelu matematycznego jest generalnie nieostry. Jednym z możliwych sposobów jego analizy może być proponowane niżej ujęcie z zastosowaniem teorii zbiorów rozmytych.

3.4. Przedstawiony niżej sposób wyznaczania adekwatności modeli matematycznych polega na wprowadzeniu w miejsce danych empirycznych \bar{x}, \bar{y} liczb rozmytych \tilde{x}, \tilde{y} (poziom 2, tabl. 2) takich, które "wyznaczają" wartości "prawdziwe" x, y , a następnie "relacji adekwatności" jako rozmytej relacji indukowanej pomiędzy zbiorami liczb rozmytych i zastąpienie zgodności systemów $|[S_y, S_x]|$ inkluzją odpowiednich zbiorów rozmytych. Zauważmy jeszcze, że przy tolerancyjnym ujęciu adekwatności wszystkie modele matematyczne, dla których zachodzi $|[S_y, S_x]|_\epsilon$ (tzn. odpowiednio $(x, y) \in \delta_\epsilon$) są sobie równoważne. Przy podejściu opartym na teorii zbiorów rozmytych ma miejsce podczas dokonywania ich oceny rozróżnienie tych modeli.

4. "NIEOSTRA" ADEKWATNOŚĆ MODELU MATEMATYCZNEGO

Idea traktowania wyników pomiaru jako zbiorów rozmytych rozważana była w pracach [65-67]. Formalny sposób wprowadzenia liczb rozmytych do teorii pomiaru przy wykorzystaniu rozmytej relacji równoważności przedstawiono w pracach [68-70]. Podejście prezentowane niżej oparto na zastosowaniu relacji tolerancji.

3.1. Przyjmijmy zatem, że dany jest multioperator $M: \bar{X} \rightarrow 2^X$, taki że dla $\forall \bar{x}_0 \in \bar{X}$ przyporządkowuje w X otoczenie $M_{\bar{x}_0} = \{x \mid (x, \bar{x}_0) \in \delta_r, \delta_r \in \bar{M}\}$ gdzie \bar{X} - zbiór zmiennych fizycznych empirycznych, X - zbiór zmiennych fizycznych "prawdziwych", \bar{M} - zbiór metrycznych tolerancji.

Niechaj dane będzie chwilowo ustalone $x_0 \in X$ i jego tolerancyjne otoczenie w X , $K_{x_0} = \{x \mid (x, x_0) \in \delta_r, \delta_r \in \bar{M}\}$. Zakładając, że zbiory $M_{\bar{x}_0}$, K_{x_0} są mierzalne, weźmy funkcję charakterystyczną zbioru rozmytego $h \in (L^X)^{\bar{X}}$.
 $L = [0, 1]$, taką że: $h(x_0)_{\bar{x}_0} = \frac{m(M_{\bar{x}_0} \cap K_{x_0})}{m(M_{\bar{x}_0})}$ dla $\forall x_0 \in X, \forall \bar{x}_0 \in \bar{X}$, gdzie m jest miarą zbioru.

Definicja 2

Rozmytą liczbą \tilde{x} (fuzzy number) nazwiemy wypukły i unormowany zbiór rozmyty (Dodatek p. 1):

$$\tilde{x} = \text{gr } h(x)_{\bar{x}} \ni \{(x, h(x)_{\bar{x}}) \mid x \in X\}$$

Przez zbiór liczb rozmytych \tilde{X} będziemy oznaczali $\tilde{X} = \{\tilde{x} \mid \forall \bar{x} \in \bar{X}\}$.

Powtarzając powyższe dla $\bar{Y} \ni Y$, gdzie \bar{Y} - zmienne fizyczne otrzymane podczas przybliżonych obliczeń dla modelu matematycznego, Y - zmienne fizyczne "prawdziwe" dla modelu matematycznego, otrzymujemy analogicznie liczby rozmyte $\tilde{y} = \text{gr } z(y)_{\bar{y}} \ni \{(y, z(y)) \mid y \in Y\}$ i zbiór liczb rozmytych $\tilde{Y} = \{\tilde{y} \mid \forall \bar{y} \in \bar{Y}\}$.

4.2. W interpretacji fizycznej rozpatrywanego zagadnienia, funkcja charakterystyczna liczby rozmytej opisuje stopień wiarygodności tego, że przy wyniku pomiaru \bar{x} , zmienna fizyczna x jest "prawdziwą" wartością mierzoną. Dla pomiaru "idealnego" wynik pomiaru jest nieskończenie dok-

ładny i funkcja charakterystyczna zbioru rozmytego $h(x)_{\bar{x}}$ degeneruje się do delty Diraca $\delta(\bar{x}-x)$. Dla pomiaru "realnego" liczbowa wartość odczytu pomiaru \bar{x} nie musi być "prawdziwą" wartością mierzoną, a liczby x z otoczenia \bar{x} mają pewien stopień wiarygodności jako wartości "prawdziwe". Funkcja charakterystyczna liczby rozmytej pozwala w sposób subiektywny przyporządkować dla każdej liczby x (przy wyniku pomiaru \bar{x}) różny stopień wiarygodności jako wartości "prawdziwej".

W pracy [67] postuluje się aby jako funkcje wiarygodności pomiaru (funkcje charakterystyczne liczb rozmytych) przyjmować gaussowskie krzywe błędów. Ciekawą metodę wyznaczania funkcji charakterystycznej z danych statystycznych, a w tym aproksymacji gaussowskiej funkcji błędów, przedstawiono w pracy [71]. W przypadku pomiarów jednorazowych, niepowtarzalnych możliwe jest na ogół obiektywne ustalenie przedziału dokładności pomiaru [72, 73]. Wartość "prawdziwa" mierzonej wielkości leży wówczas wewnątrz przedziału dokładności i jeśli przyjmiemy $h(x)_{\bar{x}} = 1$ w całym przedziale dokładności pomiaru, to każda liczba x z tego przedziału jest jednakowo wiarygodna jako wartość "prawdziwa". W przypadku pomiarów powtarzalnych, kilkakrotnych, liczba rozmyta reprezentująca wyniki pomiarów może być "trójkątna", jak to zaproponowano niżej, bądź też może posiadać bardziej złożoną postać [71].

Dobór funkcji wiarygodności w przypadku błędów przybliżonych obliczeń numerycznych przedstawia się analogicznie jak dla pojedynczych pomiarów, gdy znany jest przedział dokładności pomiaru.

4.3. W celu formalnego określenia adekwatności modelu matematycznego jako rozmytej relacji pomiędzy zbiorami liczb rozmytych [77, 78], wprowadźmy pomocniczo rozmytą relację pomiędzy "zwykłymi" zbiorami zmiennych fizycznych (Dodatek p. 3), a mianowicie:

$$\varphi \in L^{X \times Y},$$

gdzie X, Y - zbiory zmiennych fizycznych o znaczeniu jak wcześniej, $L = [0, 1]$. Niechaj funkcja charakterystyczna φ rozmytej relacji spełnia warunki:

$$1^{\circ} [\varphi(x, y) = 1] \iff [(x, y) \in \delta_q, q = 0]$$

$$2^{\circ} \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

$$3^{\circ} [\varphi(x_1, y_1) \leq \varphi(x_2, y_2)] \iff [(x_1, y_1) \in \delta_{q_1}, (x_2, y_2) \in \delta_{q_2}, \\ (x_1, y_1) \notin \delta_{q_2}, q_1 \geq q_2]$$

$$4^{\circ} (\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+) [(x, y) \notin \delta_{\varepsilon}] \iff [\varphi(x, y) = 0]$$

Oznaczmy przez A_{φ} zbiór rozmyty (relację rozmytą):

$$A_{\varphi} = \text{gr} \varphi \ni \{(\mathcal{F}, \mathcal{F}(\mathcal{F})) \mid \mathcal{F} \in \Gamma\},$$

gdzie $\varphi(f)$ - funkcja charakterystyczna (uczestnictwa) zbioru rozmytego A_φ , $f = (x, y)$.

Z warunku 3^o wynika, że im "bliżej siebie" (ze względu na tolerancję δ_q) są x i y , tym większe wartości przyjmuje φ , osiągając w przypadku $q = 0$ wartość równą jedności. Stopień uczestnictwa w zbiorze rozmytym A_φ (rozmytej relacji) oznacza stopień zbliżenia "prawdziwych" danych liczbowych x - dotyczących modelowanego obiektu i y - dotyczących modelu matematycznego. Tak utworzona rozmyta relacja A_φ wyznacza adekwatność modelu matematycznego na poziomie "prawdziwych" wartości zmiennych fizycznych i była stosowana w pracach [15, 29, 30]. Uwzględnianie niedokładności pomiaru wymagało dodatkowych zabiegów [15]. Celem jednoczesnego uwzględniania niedokładności danych empirycznych i obliczeniowych, utworzmy relację indukowaną wg schematu:

$$\begin{array}{ccc} x, y & \longrightarrow & \varphi(x, y) \\ & & \downarrow \\ x, y & \longrightarrow & \bar{x}, \bar{y} \\ & & \downarrow \\ & & \tilde{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}) \end{array}$$

Funkcja uczestnictwa relacji indukowanej $f : \bar{X} \times \bar{Y} \rightarrow L(L^X \times L^Y)$ niechaj ma postać: $f(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_{x, y} \min [h(x)_{\bar{x}}, z(y)_{\bar{y}}, \varphi(x, y)]$. Przez A_f oznaczmy relację indukowaną:

$$A_f = \text{gr } f \ni \{(\bar{f}, f(\bar{f})) \mid \bar{f} \in \bar{\Gamma}\}$$

gdzie: $\bar{f} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{\Gamma}$, natomiast $\bar{\Gamma}$ określamy: $[\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{\Gamma}] \Leftrightarrow [\exists (x, y) \in \Gamma, (x, x) \in \delta_r, (y, y) \in \delta_r]$.

Rozmyty zbiór (rozmyta relacja) A_f wyznacza adekwatność modelu matematycznego z uwzględnieniem niedokładności pomiaru i obliczeń, wyrażonych w formie liczb rozmytych. Funkcja charakterystyczna $f(\bar{x}, \bar{y})$ posiada własność monotoniczności.

Lemat 1

Funkcja charakterystyczna $f(\bar{x}, \bar{y})$ jest monotonicza, tzn. $f(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \geq f(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, gdy $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in \delta_{q_1}$, $(x_2, y_2) \in \delta_{q_2}$, $q_2 \leq q_1$.

Dowód:

Weźmy $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in \delta_{q_1}$ i $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \in \delta_{q_2}$, $q_1 > q_2$. (\bar{x}, \bar{y} - średnie wartości liczb rozmytych). Istnieje $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, że zachodzi: $\bar{x}_1 + c_1 = \bar{x}_2$, $\bar{y}_1 + c_2 = \bar{y}_2$, $h(x + c_1)_{\bar{x}_1 + c_1} = h(x)_{\bar{x}_2}$, $z(y + c_2)_{\bar{y}_1 + c_2} = z(y)_{\bar{y}_2}$. Wobec własności 3^o p. 4.3 dla funkcji $\varphi(x, y)$ możemy napisać

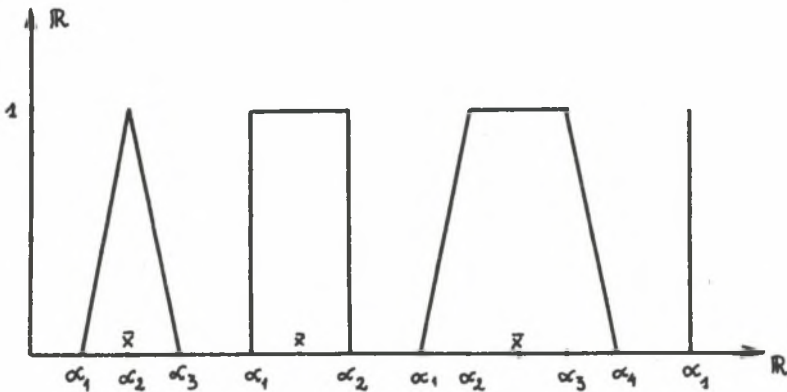
$$\varphi(x, y)_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1)} \leq \varphi(x, y)_{(\bar{x}_2, \bar{y}_2)}$$

a zatem:

$$\sup_{x,y} \min [h(x)_{\bar{x}_1}, z(y)_{\bar{y}_1}, \varphi(x,y)] \leq \sup_{x,y} \min [h(x+c_1)_{\bar{x}+c_1}, z(y+c_2)_{\bar{y}+c_2}, \varphi(x,y)],$$

co kończy dowód.

4.4. Wyznaczanie $\sup_{x,y} \min [h(x)_{\bar{x}}, z(y)_{\bar{y}}, \varphi(x,y)]$ jest w ogólnym przypadku operacją złożoną i kłopotliwą. Ograniczając liczby rozmyte do przedstawionych na rys. 2 i przyjmując $\varphi(x,y) = \frac{\wedge(x,y)}{\vee(x,y)}$, [15], można skorzystać ze wzorów szybkich obliczeń, zamieszczonych w p. 4.5. Rys. 2 przedstawia liczby rozmyte: "trójkątną", "trapezową" i liczby zwykle "prostokątną" i "ostrą".



Rys. 2. Liczby rozmyte i ostre
Fig. 2. Fuzzy and crisp numbers

kątną" i "ostrą". Należy zauważyć, że liczby "prostokątna" i "ostra" nie są liczbami rozmytymi w sensie definicji liczby rozmytej [38, 74-76], a liczba "prostokątna" bywa także nazywana przedziałem, bowiem dla niej $f(x)_x = 1$ dla $\forall x \in [\alpha_1, \alpha_2]$, co oznacza zwykły przedział $[\alpha_1, \alpha_2]$. Zwykle przedziały (liczby zwykle) można jednak zawsze przedstawić jako granicę ciągu przedziałów rozmytych (liczb rozmytych) [40] i w tym znaczeniu będziemy rozumieli dalej liczby i przedziały rozmyte.

Fizyczna interpretacja liczb rozmytych, przedziałów i liczb zwykłych, wiąże się z uwagami zawartymi w p. 4.3. W uzupełnieniu należy dodać, że przypisanie danym pomiarowym czy obliczeniowym liczb rozmytych, przedziałów czy liczb zwykłych o funkcjach charakterystycznych jak na rys. 2 jest procedurą heurystyczną. Ciekawe propozycje można znaleźć w pracy [71], w której przedstawiono próbę formalnego doboru funkcji uczestnictwa zbiorów rozmytych.

4.5. Przyjmijmy dalej dla nośników funkcji charakterystycznych (funkcji uczestnictwa) jak na rys. 2 następującą notację:

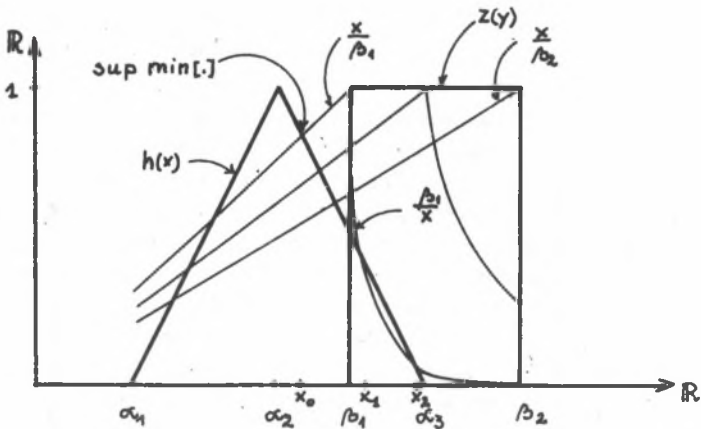
- dla "trójkątnej" - $\text{supp } h(x)_{\bar{x}} = (\alpha_1/\alpha_2, \alpha_2/\alpha_3)$
- dla "prostokątnej" - $\text{supp } h(x)_{\bar{x}} = (\alpha_1/\alpha_1, \alpha_2/\alpha_2)$
- dla "trapezowej" - $\text{supp } h(x)_{\bar{x}} = (\alpha_1/\alpha_2, \alpha_3/\alpha_4)$
- dla "ostrej" - $\text{supp } h(x)_{\bar{x}} = (\alpha_1/\alpha_1, \alpha_1/\alpha_1)$.

Dowody poniższych lematów dotyczących wyznaczania $\text{sup } \min [..]$ przedstawiono w Dodatku pp. 5-9.

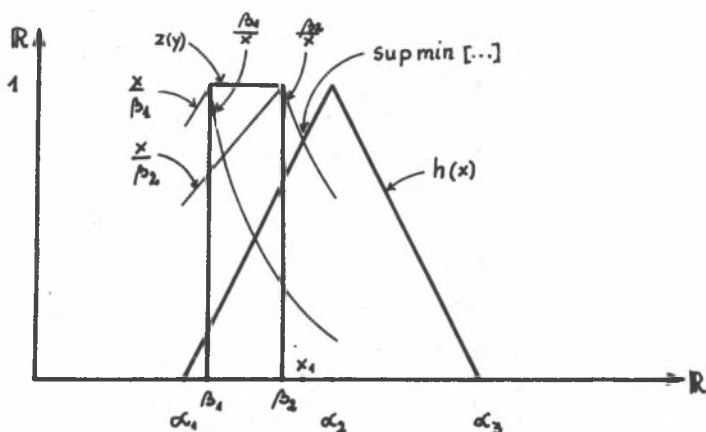
Lemat 2

Dla "trójkątnej" liczby rozmytej \bar{x} , $\text{supp } \bar{x} = (\alpha_1/\alpha_2, \alpha_2/\alpha_3)$, liczby "prostokątnej" \bar{y} , $\text{supp } \bar{y} = (\beta_1/\beta_1, \beta_2/\beta_2)$ i $\varphi(x,y) = \frac{\wedge(x,y)}{v(x,y)}$, $\varphi(0,0) = 1$ zachodzi:

$$\text{sup } \min_{x,y} [..] = \begin{cases} \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2 + \beta_1}, & \alpha_2 \leq \beta_1, \alpha_1 > 0 \\ 1, & \beta_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_2 \\ \frac{2\beta_2}{\alpha_1 + [\alpha_1^2 + 4\beta_2(\alpha_2 - \alpha_1)]^{1/2}}, & \beta_2 \leq \alpha_2, \alpha_1 \geq 0 \end{cases}$$



Rys. 3. Liczba rozmyta "trójkątna" \bar{x} i "prostokątna" \bar{y} , $\bar{y} \geq \bar{x}$
 Fig. 3. "Triangular" fuzzy number \bar{x} and "rectangular" \bar{y} , $\bar{y} \geq \bar{x}$

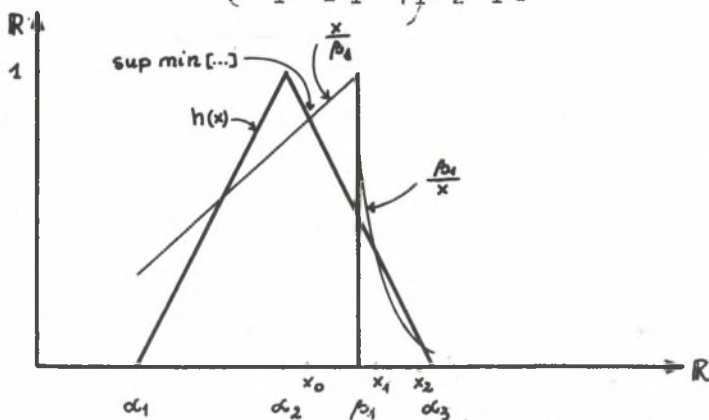


Rys. 4. Liczba "prostokątna" \tilde{y} i "trójkątna" \tilde{x} , $\tilde{y} < \tilde{x}$
 Fig. 4. "Rectangular" number \tilde{y} , "triangular" \tilde{x} , $\tilde{y} < \tilde{x}$

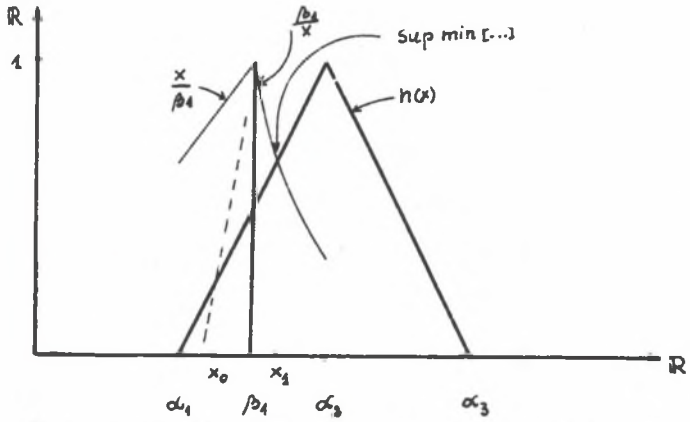
Lemat 3

Dla "trójkątnej" liczby rozmytej \tilde{x} , $\text{supp } \tilde{x} = (\alpha_1/\alpha_2, \alpha_2/\alpha_3)$, "ostrej" liczby \tilde{y} , $\text{supp } \tilde{y} = (\beta_1/\beta_1, \beta_1/\beta_1)$ i $\varphi(x, y) = \frac{\wedge(x, y)}{\vee(x, y)}$, $\varphi(0, 0) = 1$ zachodzi:

$$\sup_{x, y} \min [\dots] = \begin{cases} \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2 + \beta_1}, & \alpha_2 \leq \beta_1, \alpha_1 > 0 \\ \frac{2\beta_1}{\alpha_1 + [\alpha_1^2 + 4\beta_1(\alpha_2 - \alpha_1)]^{1/2}}, & \beta_1 < \alpha_2, \alpha_1 > 0 \end{cases}$$



Rys. 5. Liczba "trójkątna" \tilde{x} i "ostra" \tilde{y} , $\tilde{y} > \tilde{x}$
 Fig. 5. "Triangular" number \tilde{x} , crisp number \tilde{y} , $\tilde{x} < \tilde{y}$

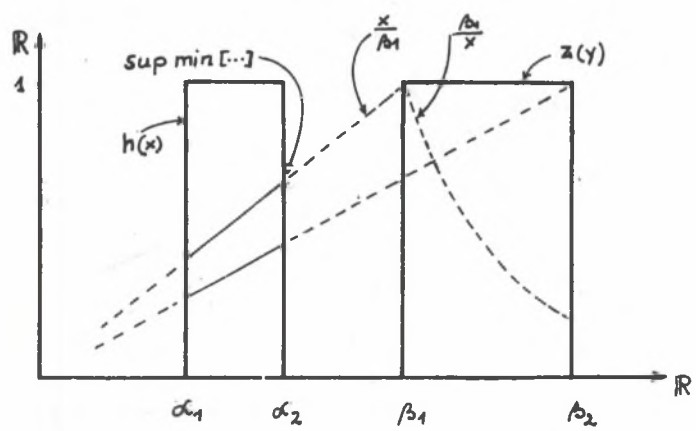


Rys. 6. Liczba "trójkątna" \tilde{x} i "ostra" \tilde{y} , $\tilde{y} < \tilde{x}$
 Fig. 6. "Triangular" number \tilde{x} , crisp number \tilde{y} , $\tilde{y} < \tilde{x}$

Lemat 4

Dla liczb "prostokątnych" \tilde{x} , $\text{supp } \tilde{x} = (\alpha_1/\alpha_1, \alpha_2/\alpha_2)$, \tilde{y} , $\text{supp } \tilde{y} = (\beta_1/\beta_1, \beta_2/\beta_2)$ i $\varphi(x, y) = \frac{\wedge(x, y)}{\vee(x, y)}$, $\varphi(0, 0) = 1$ zachodzi:

$$\text{sup min}_{x, y} [\dots] = \begin{cases} \frac{\alpha_2}{\beta_1}, & \beta_1 \geq \alpha_2 \\ 1, & \beta_1 \leq \alpha_2, \alpha_1 \leq \beta_2 \end{cases}$$

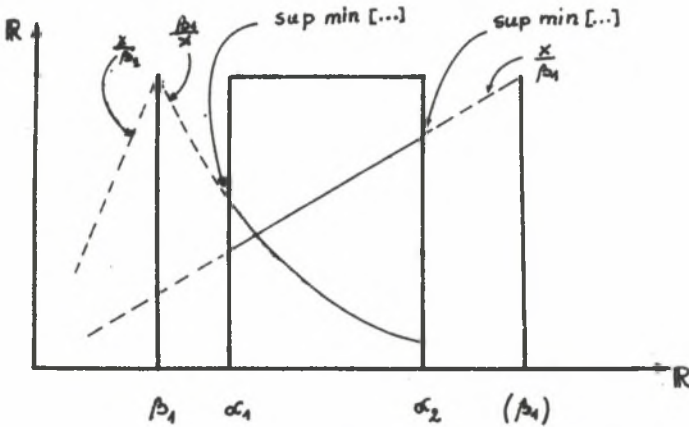


Rys. 7. Liczby "prostokątne" \tilde{x}, \tilde{y}
 Fig. 7. "Rectangular" numbers \tilde{x}, \tilde{y}

Lemat 5

Dla liczby "prostokątnej" \tilde{x} , $\text{supp } \tilde{x} = (\alpha_1/\alpha_1, \alpha_2/\alpha_2)$, "ostrej" \tilde{y} , $\text{supp } \tilde{y} = (\beta_1/\beta_1, \beta_1/\beta_1)$ i $\varphi(x,y) = \frac{\wedge(x,y)}{\vee(x,y)}$, $\varphi(0,0) = 1$ zachodzi:

$$\sup_{x,y} \min [\dots] = \begin{cases} \frac{\alpha_2}{\beta_1}, & \beta_1 > \alpha_2 \\ 1, & \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 \\ \frac{\beta_1}{\alpha_1}, & \beta_1 \leq \alpha_1 \end{cases}$$



Rys. 3. Liczba "prostokątna" \tilde{x} i "ostra" \tilde{y}
Fig. 3. "Rectangular" number \tilde{x} , crisp number \tilde{y}

Lemat 6

Dla liczb "ostrych" \tilde{x} , $\text{supp } \tilde{x} = (\alpha_1/\alpha_1, \alpha_1/\alpha_1)$, \tilde{y} , $\text{supp } \tilde{y} = (\beta_1/\beta_1, \beta_1/\beta_1)$ i $\varphi(x,y) = \frac{\wedge(x,y)}{\vee(x,y)}$, $\varphi(0,0) = 1$ zachodzi:

$$\sup_{x,p} \min [\dots] = \varphi(\alpha_1, \beta_1) = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y})$$

W przypadku gdy nośnik jednej z rozpatrywanych liczb jest ujemny np. dla \tilde{x} , $\varphi(x,y)$, należy zmodyfikować do $\varphi(x,y) = \frac{\wedge(|x|, y)}{\vee(|x|, y)}$, natomiast $\text{supp } \tilde{x} = (\alpha_1/\alpha_2, \alpha_2/\alpha_3)$ do $\text{supp } x_T = (|\alpha_3|/|\alpha_2|, |\alpha_2|/|\alpha_1|)$. Operacje wyznaczenia $\sup_{x,y} \min [h(x)_T, z(y), \varphi(x,y)]$ można teraz łatwo przeprowadzić w oparciu o Lematy 2-5.

Jeśli "trójkątna" liczba rozmyta jest symetryczna ($|\alpha_3 - \alpha_2| = |\alpha_2 - \alpha_1|$) oraz $\varphi(x,y) = \frac{\wedge(|x|, y)}{\vee(|x|, y)}$ w uzupełnieniu do powyższych wzorów łatwo wyliczyć:

1° Jeśli $\alpha_2 \leq 0, \alpha_3 > 0, \beta_1 \geq |\alpha_2|$, to

$$\sup_{x,y} \min [\dots] = \frac{|\alpha_1|}{\alpha_3 - \alpha_2 + \beta_1}$$

2° Jeśli $\alpha_2 < 0, 0 < \beta_1 \leq |\alpha_2| \leq \beta_2$, to

$$\sup_{x,y} \min [\dots] = 1$$

3° Jeśli $\alpha_2 < 0, \alpha_3 \geq 0, 0 < \beta_2 \leq |\alpha_2|, \beta_1 > \alpha_2$, to

$$\sup_{x,y} \min [\dots] = \frac{2\beta_2}{\alpha_3 + [\alpha_3^2 + 4\beta_2(\alpha_2 - \alpha_1)]^{1/2}}$$

4° Jeśli $\beta_1 < 0, |\beta_1| \geq \beta_2 > 0, 0 < \alpha_1 \leq |\beta_1| < \alpha_2$, to

$$\sup_{x,y} \min [\dots] = \frac{2|\beta_1|}{\alpha_1 + [\alpha_1^2 + 4|\beta_1|(\alpha_2 - \alpha_1)]^{1/2}}$$

5° Jeśli $\beta_1 < 0, |\beta_1| \leq \beta_2 \leq \alpha_2$, to

$$\sup_{x,y} \min [\dots] = \frac{2\beta_2}{\alpha_1 + [\alpha_1^2 + 4\beta_2(\alpha_2 - \alpha_1)]^{1/2}}$$

6° Jeśli $\beta_1 < 0, \alpha_2 > |\beta_1| \geq \beta_2$, to

$$\sup_{x,y} \min [\dots] = \frac{2|\beta_1|}{\alpha_1 + [\alpha_1^2 + 4|\beta_1|(\alpha_2 - \alpha_1)]^{1/2}}$$

7° Jeśli $\beta_1 < 0, |\beta_1| < \alpha_2 \leq \beta_2$ lub $\beta_2 \leq \alpha_2 \leq |\beta_1|$, to

$$\sup_{x,y} \min [\dots] = 1$$

Ad L 3:

1° Jeśli $\alpha_2 < 0, \alpha_3 \geq 0, \beta_1 \geq |\alpha_2|$, to

$$\sup_{x,y} \min [\dots] = \frac{|\alpha_1|}{\alpha_3 - \alpha_2 + \beta_1}$$

2° Jeśli $\alpha_2 < 0, \alpha_3 > 0, 0 < \beta_1 \leq |\alpha_2|$, to

$$\sup_{x,p} \min [\dots] = \frac{2\beta_1}{-\alpha_3 + [\alpha_3^2 + 4\beta_1(\alpha_2 - \alpha_1)]^{1/2}}$$

3° Jeśli $\beta_1 < 0, |\beta_1| < \alpha_2$, to

$$\sup_{x,y} \min [\dots] = \frac{2|\beta_1|}{\alpha_1 + [\alpha_1^2 + 4\beta_2(\alpha_2 - \alpha_1)]^{1/2}}$$

4° Jeśli $\beta_1 < 0, \alpha_2 \leq |\beta_1|$, to

$$\sup_{x,y} \min [\dots] = \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2 + |\beta_1|}$$

5° Jeśli $\beta_1 = 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1 < 0$, to

$$\sup_{x,p} \min [\dots] = \frac{|\alpha_1|}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

6° Jeśli $\beta_1 = 0, \alpha_1 \geq 0$, to $\sup_{x,p} \min [\dots] = 0$

Ad L 4:

1° Jeśli $\alpha_1 < 0, \alpha_2 \geq 0, \beta_1 \leq |\alpha_1|, \alpha_2 < \beta_2$, to

$$\sup_{x,y} \min [\dots] = 1$$

2° Jeśli $\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0, |\alpha_1| < \beta_1$, to

$$\sup_{x,y} \min [\dots] = \frac{|\alpha_1|}{|\beta_1|}$$

Ad L 5:

1° Jeśli $\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0, 0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$, to

$$\sup_{x,y} \min [\dots] = 1$$

2° Jeśli $\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0, \beta_1 \geq |\alpha_1|$, to

$$\sup_{x,y} \min [\dots] = \left| \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right|$$

3° Jeśli $\beta_1 < 0, \alpha_1 > 0, \alpha_1 \leq |\beta_1| \leq \alpha_2$, to

$$\sup_{x,y} \min [..] = 1$$

4° Jeśli $\beta_1 < 0, \alpha_1 > 0, \alpha_1 \geq |\beta_1|$, to

$$\sup_{x,y} \min [..] = \frac{\alpha_1}{|\beta_1|}$$

5° Jeśli $\beta_1 = 0, \alpha_1 > 0$, to $\sup_{x,y} \min [..] = 0$

W zakończeniu rozważań pp. 4.3-4.5 zauważmy, że z L 6 wynika, że rozmyta relacja A_f wprowadzona dla wyznaczania adekwatności modeli matematycznych jest uogólnieniem relacji A_{φ} stosowanej w pracach [15, 29, 30]. W przypadku gdy dane pomiaru i dane obliczeń przedstawione są jako liczby ostre relacja A_f przechodzi w A_{φ} .

W Dodatku p.10 przedstawiono komputerowy program obliczeń $f(x,y)$ dla wyżej rozpatrywanych liczb rozmytych.

5. SEKWENCYJNA PROCEDURA WYZNACZANIA "NIEOSTREJ" ADEKWATNOŚCI MODELI MATEMATYCZNYCH

Algorytm sekwencyjnego wyznaczania adekwatności modeli matematycznych przedstawiono na rys. 9. Metodę tę analizowano w pracy [30].

5.1. Poziom zmiennych fizycznych

Przyjmijmy, że cel modelu można opisać za pomocą zbioru rozmytego:

$$G_f = \text{gr } f_G \ni \left\{ (\bar{x}, f_G(\bar{x})) \mid \bar{x} \in \bar{\Gamma} \right\}$$

Funkcję uczestnictwa (charakterystyczną) f_G będziemy dobierali w myśl zasady (patrz L 6):

$$f_G(\bar{x}, \bar{y}) = \tilde{f}_G(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(x, y),$$

tzn. przy określaniu a priori celu modelu nie występuje nieostrość jak dla pomiaru i obliczeń, funkcje charakterystyczne $h(x)_{\bar{x}}$, $z(y)_{\bar{y}}$ są typu delta Diraca. Na przykład przy wymaganej zgodności modelu matematycznego i "rzeczywistości" fizycznej na poziomie 80% dokładności, dla przyjętej $\varphi(x, y) = \frac{\wedge(x, y)}{\vee(x, y)}$ mamy $f_G(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(x, y) = 0,8$.

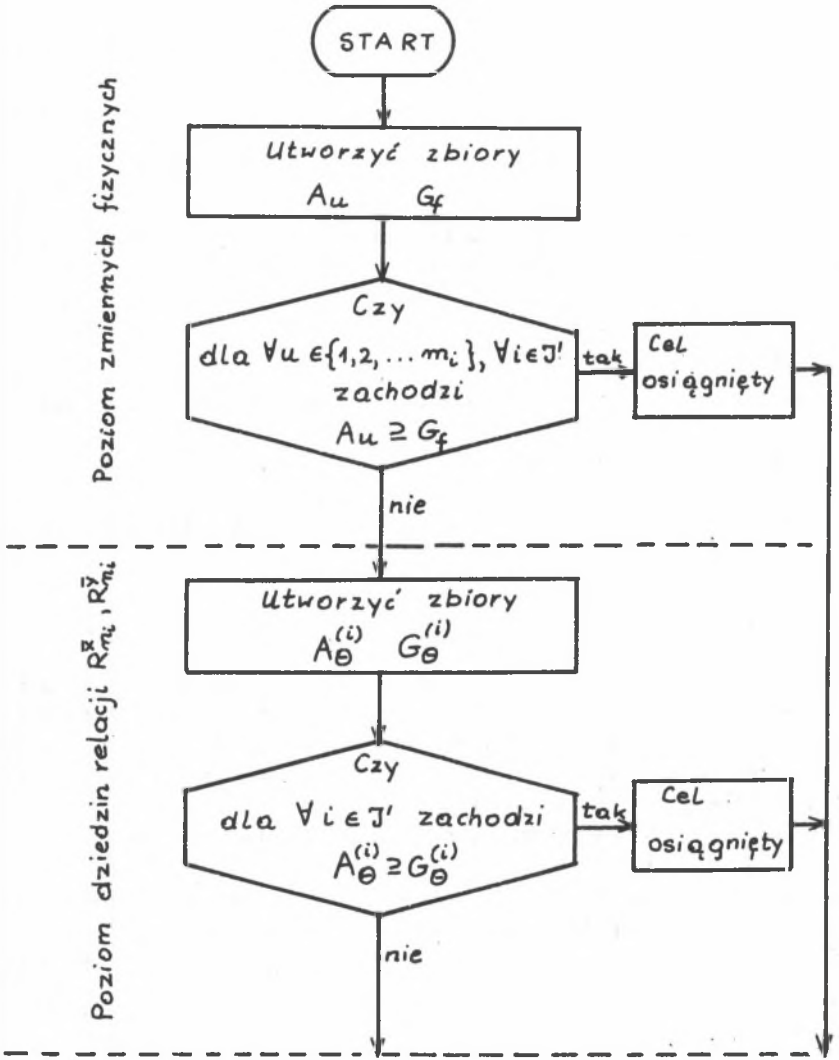
Realizację celu modelu będziemy rozumieli jako zachodzenie inkluzji zbiorów (Dodatek p. 2): $G_f \subseteq A_f$, tzn. $f_G(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$ dla $\forall \bar{x} \in \bar{\Gamma}$.

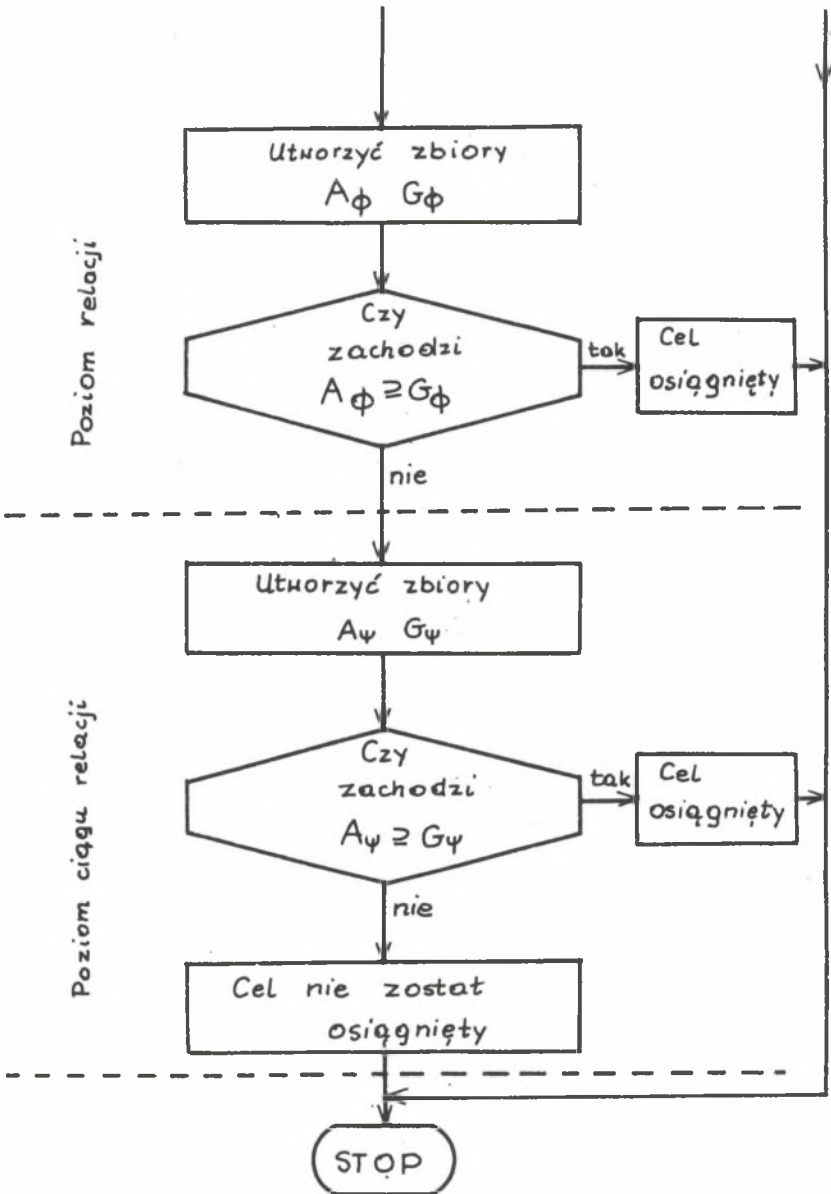
Dla dalszej analizy dogodnie będzie przedstawić realizację celu modelu (adekwatności) w następującej postaci: $G_f \subseteq A_u$, dla $u = 1, 2, \dots, n_1$, $\forall i \in I'$, gdzie $A_u = \text{gr } f \ni \left\{ (\bar{x}, f(\bar{x})) \mid \bar{x} \in \bar{\Gamma}_u \right\}$, $\bar{\Gamma}_u \subset \bar{X}_u \times \bar{Y}_u$, \bar{X}_u , \bar{Y}_u są dziedzinami relacji $R_{n_1}^{\bar{x}}$, $R_{n_1}^{\bar{y}}$. Jeśli warunek inkluzji celu modelu nie jest spełniony, badanie adekwatności przenosimy na poziom zbiorów zmiennych fizycznych - dziedzin badanych relacji włączając explicite informację dotyczącą "zakresu" dziedzin relacji.

5.2. Poziom dziedzin relacji $R_{n_1}^{\bar{x}}$, $R_{n_1}^{\bar{y}}$

Utwórzmy obcięcie zbioru $\bar{\Gamma}_u$:

$$\bar{\Gamma}_{u\alpha} = \left\{ \bar{x} \in \bar{\Gamma}_u \mid f(\bar{x}) \geq \alpha, \quad \alpha \in [0, 1] \right\}$$





Rys. 9. Sekwencyjna procedura wyznaczania adkwatności modelu matematycznego

Fig. 9. Sequence procedure of adequacy estimation of mathematical models

Zbiór $\bar{\Gamma}_{u\alpha}$ w interpretacji geometrycznej jest obszarem na płaszczyźnie xy . Średnicę rzutu $\bar{\Gamma}_{u\alpha}$ na oś oy oznaczymy $D_{u\alpha}$. $D_{u\alpha}$ jest zatem średnicą takiego $\bar{Y}_{u\alpha}$, że dla $\forall \bar{y} \in \bar{Y}_{u\alpha}$ i $\bar{x} \in \bar{X}_{u\alpha}$ i $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{\Gamma}_{u\alpha}$ zachodzi $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq \alpha$. Utwórzmy miarę zbioru $\bar{\Gamma}_{u\alpha}$:

$$g(\bar{\Gamma}_{u\alpha}) = \frac{\max\{D_{u\alpha}\}}{D_u}$$

gdzie $D_{u\alpha} = D_u$ dla $\alpha = 0$.

Lemat 6

Miara $g(\bar{\Gamma}_{u\alpha})$ jest miarą rozmytą.

Dowód:

1° Jeśli $\bar{\Gamma}_{u\alpha} = \emptyset$, to $g(\bar{\Gamma}_{u\alpha}) = 0$. Jeśli $\bar{\Gamma}_{u\alpha} = \bar{\Gamma}_u$, to $D_{u\alpha} = D_u$, $g(\bar{\Gamma}_{u\alpha}) = 1$

2° Monotoniczność

Jeśli $\bar{\Gamma}_{u\alpha_1} \supseteq \bar{\Gamma}_{u\alpha_2} \supseteq \dots \supseteq \bar{\Gamma}_{u\alpha_n} \dots$ i $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots$ i

$$\frac{\max\{D_{u\alpha_1}\}}{D_u} \geq \frac{\max\{D_{u\alpha_2}\}}{D_u} \geq \dots \geq \frac{\max\{D_{u\alpha_n}\}}{D_u} \geq \dots$$

to $g(\bar{\Gamma}_{u\alpha_1}) \geq g(\bar{\Gamma}_{u\alpha_2}) \geq \dots \geq g(\bar{\Gamma}_{u\alpha_n}) \geq \dots$

3° Nieaddytywność

$$g(\bar{\Gamma}_{u\alpha_1} \cup \bar{\Gamma}_{u\alpha_2}) = \begin{cases} g(\bar{\Gamma}_{u\alpha_1}) & \text{dla } \alpha_1 \leq \alpha_2 \\ g(\bar{\Gamma}_{u\alpha_2}) & \text{dla } \alpha_1 \geq \alpha_2 \end{cases} \quad \text{cnd.}$$

Utwórzmy rozmytą całkę $[80, 81]$:

$$\Theta_u = \int_{\bar{\Gamma}_u} f(\bar{f}) \circ g(\bar{\Gamma}_{u\alpha}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(\bar{\Gamma}_{u\alpha})]$$

Całka ta indukuje w $\bar{\Gamma}$ funkcję:

$$\Theta : \bar{\Gamma} \rightarrow \Theta(\bar{\Gamma}_u) \in [0,1], \quad \Theta(\bar{\Gamma}_u) = \Theta_u$$

Lemat 7

Θ jest monotoniczna ze względu na $\bar{\Gamma}_u$, $f(\bar{f})$ i $g(\bar{\Gamma}_{u\alpha})$, lecz nieaddytywna.

Dowód:

Oczywisty - wynika z własności całki rozmytej [80, 81].
Utwórzmy zbiór rozmyty:

$$A_{\Theta} = \text{gr } \Theta \ni \{(\Gamma_u, \Theta(\Gamma_u)) \mid \Gamma_u \subset 2^{\Gamma}\}$$

Tak utworzony zbiór rozmyty będziemy interpretowali jako "obraz adekwatności" modelu matematycznego na poziomie dziedzin relacji $R_{n_1}^{\bar{x}}, R_{n_1}^{\bar{y}}$.

Funkcja uczestnictwa Θ przyporządkowuje każdej parze (\bar{X}_u, \bar{Y}_u) - dziedzin relacji $R_{n_1}^{\bar{x}}, R_{n_1}^{\bar{y}}$ liczbę z przedziału $[0,1]$ tym bardziej bliższą jedności, im większe wartości przyjmuje $f(\bar{y})$ i im większa jest średnica zbioru \bar{Y}_u , dla którego $f(\bar{y})$ te wartości osiąga.

Rozmyty zbiór A_{Θ} dogodnie jest zastąpić rodziną zbiorów $A_{\Theta}^{(i)}$, $\forall i \in I'$, gdzie $A_{\Theta}^{(i)}$ jest zbiorem rozmytym A_{Θ} zredukowanym do i -tej dziedziny relacji $R_{n_1}^{\bar{y}}$ i $R_{n_1}^{\bar{x}}$. Oznaczając przez G_{Θ} odpowiedni zbiór rozmyty dla celu modelu, osiągnięcie celu modelu zanotujemy jako: $A_{\Theta}^{(i)} \supseteq G_{\Theta}$ dla $\forall i \in I'$. Funkcję uczestnictwa Θ_G w rozmytym zbiorze G_{Θ} wyznaczamy dokonując rozmytego całkowania $f_G(\bar{y})$, a mianowicie: $\Theta_G(\Gamma_u) = \int_{\Gamma_u} f_G(\bar{y}) \circ g(\Gamma_{u\alpha})$.

5.3. Poziom relacji $R_{n_1}^{\bar{y}}, R_{n_1}^{\bar{x}}$

Jeśli $A_{\Theta}^{(i)} \supseteq G_{\Theta}$ nie zachodzi dla $\forall i \in I'$, analizę adekwatności modelu przenosimy na poziom relacji uwzględniając explicite znaczenie poszczególnych zmiennych fizycznych. Przyjmijmy zatem, że dla każdej z badanych relacji $R_{n_1}^{\bar{y}}$ dane są $\Theta(\Gamma_u) = \Theta_u$, $u = 1, 2, \dots, n_1$. Przypiszmy dla każdej n_1 -tki $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{n_1}$ wagi $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_1}$ takie, że $0 \leq \mu_u < 1$ dla $u = 1, 2, \dots, n_1$. Utwórzmy ciągi $\bar{\Theta}_1 = (\mu_u \Theta_u)$ oraz zbiór $\bar{\Theta} = \{\bar{\Theta}_1 \mid i \in I'\}$. Weźmy funkcję $\phi: \bar{\Theta} \ni \bar{\Theta}_1 \rightarrow \phi(\bar{\Theta}_1) \in [0,1]$, która niechaj spełnia warunki:

- 1° $[\phi(\bar{\Theta}_1) = 1] \iff [\Theta_u = 1, u = 1, 2, \dots, n_1]$
- 2° $[\phi(\bar{\Theta}_1) = 0] \iff [\mu_u \Theta_u = 0, u = 1, 2, \dots, n_1]$
- 3° $[\phi(\bar{\Theta}_1') > \phi(\bar{\Theta}_1'')] \iff [\mu_u \Theta_u' > \mu_u \Theta_u'', u = 1, 2, \dots, n_1]$

Rozmyty zbiór A_{ϕ} generowany przez ϕ przyjmuje postać:

$$A_{\phi} = \text{gr } \phi \ni \{(\bar{\Theta}_1, \phi(\bar{\Theta}_1)) \mid \bar{\Theta}_1 \in 2^{\bar{\Theta}}\}$$

Przykładem funkcji ϕ spełniającej powyższe wymagania może być $\phi(\bar{\Theta}_1) = \mu_1 \Theta_1 + \dots + \mu_{n_1} \Theta_{n_1}$, gdzie $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n_1} = 1$. Funkcja uczestnictwa ϕ w zbiorze A_{ϕ} przyporządkowuje każdej z relacji $R_{n_1}^{\bar{y}}$ liczbę z przedziału $[0,1]$ będącą wskaźnikiem adekwatności relacji. Warunek 3°

zapewnia dla funkcji monotoniczność. W doborze wag μ_U można kierować się wrażliwością modelu matematycznego ze względu na poszczególne zmienne fizyczne, przypisując w przypadku małej wrażliwości małe wartości μ_U . Rozmyty zbiór A_G będziemy interpretowali jako "obraz adekwatności" modelu matematycznego na poziomie relacji. Jeśli przez G_Φ oznaczymy odpowiedni zbiór celu modelu, osiągnięcie celu modelu zanotujemy jako $A_\Phi \supseteq G_\Phi$. Funkcję uczestnictwa zbioru celu modelu wyznaczamy analogicznie jak wyżej: $\Phi_G : \bar{\Theta}_G \rightarrow \Phi(\bar{\Theta}_G) \in [0,1]$.

5.4. Poziom ciągu relacji

Jeśli inkluzja $A_\Phi \supseteq G_\Phi$ nie jest spełniona wprowadzmy explicite informację dotyczącą znaczenia poszczególnych relacji w badanym modelu matematycznym. W tym celu przyporządkujemy każdej z relacji $R_{n_i}^Y$ wagę "ważności" $\bar{\mu}_i$, $0 \leq \bar{\mu}_i \leq 1$. Utwórzmy ciąg $\bar{\Phi} = (\bar{\mu}_i \Phi_i)$, $i \in I'$ oraz zbiór $\bar{\Phi} = \{\bar{\Phi}\}$. Weźmy funkcję $\psi : \bar{\Phi} \rightarrow \psi(\bar{\Phi}) \in [0,1]$ spełniającą warunki:

- 1° $[\psi(\bar{\Phi}) = 1] \Leftrightarrow [\Phi_i = 1, \forall i \in I']$
- 2° $[\psi(\bar{\Phi}) = 0] \Leftrightarrow [\bar{\mu}_i \Phi_i = 0, \forall i \in I']$
- 3° $[\psi(\bar{\Phi}') \geq \psi(\bar{\Phi}'')] \Leftrightarrow [\bar{\mu}_i \Phi_i' \geq \bar{\mu}_i \Phi_i'', \forall i \in I']$

Utwórzmy rozmyty zbiór A_ψ jako:

$$A_\psi = \text{gr } \psi \ni \{(\bar{\Phi}, \psi(\bar{\Phi})) \mid \bar{\Phi} \in \bar{\Phi}\}$$

Funkcja uczestnictwa w zbiorze rozmytym A_ψ przyporządkowuje dla wszystkich relacji wchodzących w skład modelu matematycznego jedną liczbę z przedziału $[0,1]$ będącą wskaźnikiem adekwatności modelu matematycznego. Jako przykład funkcji ψ spełniającej powyższe wymagania weźmy $\psi(\bar{\Phi}) = \bar{\mu}_1 \Phi_1 + \bar{\mu}_2 \Phi_2 + \dots + \bar{\mu}_{i_0} \Phi_{i_0}$, gdzie i_0 jest wskaźnikiem ze zbioru I' , a wagi $\bar{\mu}_i$ spełniają warunek $\bar{\mu}_1 + \dots + \bar{\mu}_{i_0} = 1$. Jeśli odpowiedni zbiór celu modelu oznaczymy przez G_ψ , to osiągnięcie celu modelu oznacza zachodzenie inkluzji $A_\psi \supseteq G_\psi$. Funkcję uczestnictwa w zbiorze G_ψ dobieramy analogicznie jak wyżej: $\psi_G(\bar{\Phi}) = \psi(\bar{\Phi}_G)$.

5.5. Własności sekwencyjnej procedury wyznaczania adekwatności modeli matematycznych

Lemat 8

Sekwencyjna procedura wyznaczania adekwatności prowadzi do ocen dychotomicznych.

Dowód: Oczywisty

Lemat 9

Sekwencyjna procedura wyznaczania adekwatności posiada własność absorpcji, tzn. jeśli model jest adekwatny na danym poziomie szczegółowości, to jest adekwatny na każdym wyższym poziomie szczegółowości.

Dowód:

Dla poziomu zmiennych fizycznych zachodzi, $G_f \subseteq A_u$, $u = 1, 2, \dots, n_i$, $\forall i \in I'$, tzn. $f_G(\vec{f}) \leq f(\vec{f})$, $\vec{f} \in \Gamma_u$.

Poziom zbiorów zmiennych fizycznych:

$$\Theta_u = \int_{\Gamma_u} f(\vec{f}) \circ g(\Gamma_{u\alpha}), \quad \Theta_{uG} = \int_{\Gamma_u} f_G(\vec{f}) \circ g(\Gamma_{u\alpha})$$

Wobec tego, że $f_G(\vec{f}) \leq f(\vec{f})$ zachodzi $\Theta_u > \Theta_{uG}$, $u = 1, 2, \dots, n_i$, $i \in I'$, zatem $A_{\Theta}^{(i)} \supseteq G_{\Theta}$ dla $\forall i \in I'$.

Poziom relacji:

$$\Phi(\bar{\Theta}_1) = \Phi(\mu_1^{\Theta_1}, \mu_2^{\Theta_2}, \dots, \mu_{n_1}^{\Theta_{n_1}})$$

$$\Phi_G(\bar{\Theta}_1) = \Phi(\mu_1^{\Theta_{1G}}, \mu_2^{\Theta_{2G}}, \dots, \mu_{n_1}^{\Theta_{n_1G}})$$

Wobec tego, że $\Theta_1 \geq \Theta_{1G}$, $\Theta_2 \geq \Theta_{2G}$, \dots , $\Theta_{n_1} \geq \Theta_{n_1G}$ oraz warunku 3^o, jaki spełnia funkcja Φ (p. 5.3), zachodzi $\Phi(\bar{\Theta}_1) \geq \Phi_G(\bar{\Theta}_{1G})$ dla $\forall i \in I'$, a więc $A_{\Phi} \supseteq G_{\Phi}$.

Poziom ciągu relacji:

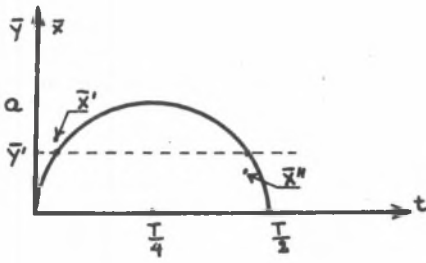
$$\Psi(\bar{\Phi}) = \Psi(\bar{\mu}_1 \Phi_1, \bar{\mu}_2 \Phi_2, \dots, \bar{\mu}_{i_0} \Phi_{i_0})$$

$$\Psi_G(\bar{\Phi}) = \Psi(\bar{\mu}_1 \Phi_{1G}, \bar{\mu}_2 \Phi_{2G}, \dots, \bar{\mu}_{i_0} \Phi_{i_0G})$$

Wobec $\Phi_1 > \Phi_{1G}$, $\Phi_2 > \Phi_{2G}$, \dots , $\Phi_{i_0} \geq \Phi_{i_0G}$ oraz warunku 3^o dla funkcji Ψ (p. 5.4) zachodzi $\Psi(\bar{\Phi}) > \Psi_G(\bar{\Phi})$, zatem $A_{\Psi} \supseteq G_{\Psi}$ c.d.o.

5.6. "Wieloznaczność" funkcji charakterystycznej (uczestnictwa)

Przy obliczaniu rozmytej całki Θ (p. 5.2) korzysta się z rozmytej miary $g(\Gamma_{u\alpha})$. Zauważmy, że możliwe jest, że do zbioru $\Gamma_{u\alpha}$ (czy odpowiednio $\Gamma_{u\alpha}$) należą pary elementów (x, y) , które różnią się tylko jednym elementem: $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma_{u\alpha}$, $(\bar{x}', \bar{y}') \in \Gamma_{u\alpha}$. Jako przykład niechaj posłuży następujący model matematyczny ruchu punktu materialnego $\bar{y} = y = a \sin \omega t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$, czyli relacja $R_{4_1}^y \ni (y, a, \omega, t)$ - rys. 10. Funkcja charakterystyczna $f(\bar{x}, \bar{y})$ przy-



Rys. 10. Relacja $R_{4,1}^y$
Fig. 10. Relation $R_{4,1}^y$

muje dla tych par różne wartości $f(\bar{x}, \bar{y}) \neq f(\bar{x}'', \bar{y})$. Rzutując $f(\bar{x}, \bar{y})$ na oś oy otrzymamy $f(\bar{x}, \bar{y})_1$ dla rosnącej części $y = a \sin \omega t$, dla malejącej $f(\bar{x}, \bar{y})_2$. Inna może być zatem średnica $D_{u\alpha}$ (p. 5.2) wyznaczona dla $f(\dots)_1$, inna dla $f(\dots)_2$. Przy wyznaczaniu $\max \{D_{u\alpha}\}$ przeszukiwanie powinno objąć także rodzinę $f(\dots)_1, f(\dots)_2$. Inna propozycja w przypadku "niejednoznaczności" funkcji $f(\bar{x}, \bar{y})$ jest

opisana w pracy [79]. Według niej, dla rozpatrywanego ruchu punktu materialnego przy "rozmytym" całkowaniu $f(\bar{x}, \bar{y})$ należy rozmytą miarę $g(\Gamma_{u\alpha})$ utworzyć dla zmiennej fizycznej czasu - t .

6. PODSUMOWANIE

Powyższe rozważania przedstawiają jeden z możliwych modeli dla opisu wzajemnego odniesienia modelowanych układów mechanicznych i ich modeli matematycznych. Przy jego tworzeniu uwzględniono czynniki nieostre, które ujawniają się podczas badania adekwatności. Zastosowano teoriomnogościowe ujęcie rozpatrywanego problemu wykorzystując metody i pojęcia teorii zbiorów rozmytych. Przyjęto, że wynik pomiaru na badanym obiekcie fizycznym jest liczbą rozmytą, podobnie także dane numeryczne uzyskane podczas obliczeń a będące reprezentacją modelu matematycznego. Rozmyta relacja pomiędzy zbiorami tak wprowadzonych liczb rozmytych jest podstawową dla wyznaczania adekwatności modeli matematycznych.

Utworzono czteropoziomowy, hierarchiczny układ zbiorów rozmytych A_f , A_{\odot} , A_{ϕ} , A_{ψ} , których funkcje charakterystyczne były dobierane oddzielnie dla każdego z poziomów szczegółowości rozważań przy stopniowym wprowadzaniu explicite dodatkowej informacji, jak: "zakresu" odwzorowania, subiektywnej oceny ważności zmiennych fizycznych oraz relacji. Dzięki nieaddytywności funkcji charakterystycznych f, \odot, ϕ, ψ , zaproponowana metoda wyznaczania i oceny adekwatności modeli matematycznych jest "naturalna", tj. bliska intuicyjnemu sposobowi dokonywania ocen, który jest nieaddytywny. Zaproponowana sekwencyjna procedura ustalania adekwatności modeli matematycznych prowadzi do ocen dychotomicznych, przy czym osiągnięcie adekwatności na danym poziomie szczegółowości oznacza osiągnięcie jej na każdym poziomie hierarchicznie wyższym. Wyprowadzone wzory szybkich obliczeń $\sup \min [\dots]$ znacznie ułatwiają obliczanie wartości funkcji uczestnictwa w zbiorze A_f .

Celowość stosowania proponowanej metody w praktyce jest zasadna dla modeli matematycznych złożonych układów mechanicznych, gdzie ujęcie niesformalizowane jest trudne. Przedstawione rozważania wskazują również na przydatność metod teorii zbiorów rozmytych w badaniu adekwatności modeli matematycznych.

Zaproponowana metoda dzięki swej ogólności może być z powodzeniem stosowana także dla innych układów fizycznych, których modele matematyczne są systemami relacyjnymi.

Postawione w pracy tezy analizowano w następujących rozdziałach: tezę 1 w rozdziałach 2 i 3, tezę 2 w rozdziale 4, tezę 3 w rozdziale 5.

Zdaniem autora do głównych i oryginalnych osiągnięć w prezentowanej pracy należy zaliczyć:

- w dziedzinie modelowania układów mechanicznych: opracowanie formalnego sposobu hierarchicznego wyznaczania adekwatności ze stopniowym uwzględnianiem czynników subiektywnych, nieostrych na różnych poziomach szczegółowości analizy;
- w dziedzinie teorii i zastosowań zbiorów rozmytych: wypracowanie wzorów szybkich obliczeń operacji $\sup \min$ [..], które zwiększają użyteczność ww. metody w praktyce oraz zwiększają możliwości zastosowań teorii zbiorów rozmytych.

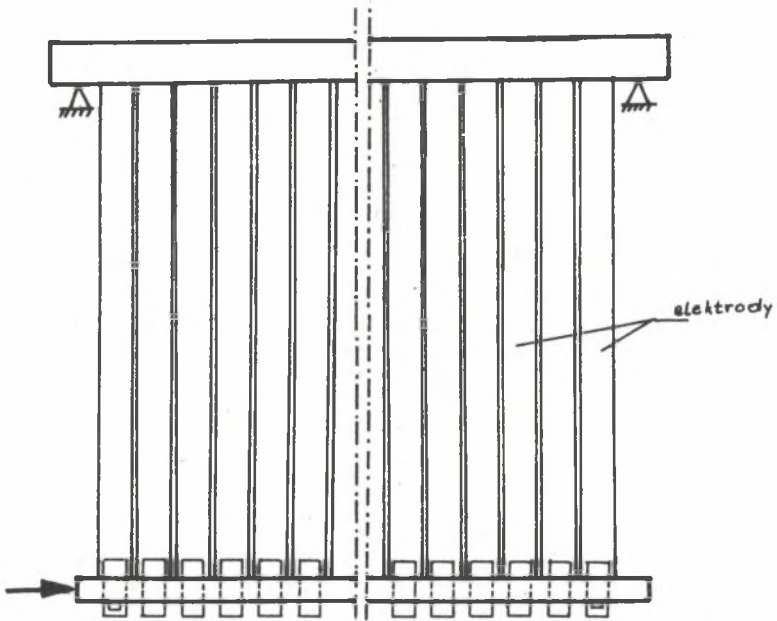
W dalszych badaniach aplikacyjnych proponowanej metody wyznaczania i opisu adekwatności za interesujące zdaniem autora należałoby uznać:

1. Daleszą analizę identyfikacji liczb i przedziałów rozmytych jako danych pomiarów i obliczeń.
2. Przeprowadzenie dla celów inżynierskich "komputeryzacji" procedury zawartej w p. 5 rozprawy.

Ciekawym, zdaniem autora, problemem badawczym byłaby dalsza analiza "odpowiedniości" modelu matematycznego i modelowanego obiektu na poziomie struktur systemu.

7. PRZYKŁAD

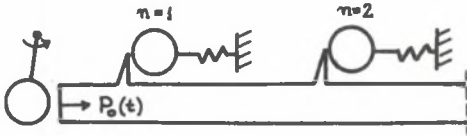
7.1. Powyższą metodę wyznaczania adekwatności modeli matematycznych zastosujemy dla układu konstrukcyjnego przedstawionego na rys. 11, jakim są elektrody zbiorcze elektrofiltrów [82]. Układ elektrod zbiorczych stanowi



Rys. 11. Układ elektrod elektrofiltru

Fig. 11. Arrangement of collecting electrodes of electrostatic precipitator

szereg cienkościennych prętów o profilu otwartym, zawieszonych wahadłowo w płaszczyźnie układu. Wzbudzenie drgań elektrod dla usunięcia zgromadzonego na nich pyłu następuje przez osiowe uderzenie młotka przerzutowego w pręt spinający elektrody w dolnej ich części. Rozpatrywany układ składa się z sześciu elektrod zbiorczych. Fizyczny model wzbudzania w nim drgań przedstawiono na rys. 12. W pracach [82-84] wyznaczono analitycznie siłę uderzenia młotka w pręt $P_0(t)$ oraz siły oddziaływania pręta $P_1(t), P_2(t), \dots$



Rys. 12. Model fizyczny układu elektrod

Fig. 12. Physical model of collecting electrodes

na poszczególne elektrody. Siłę oddziaływania młotka przetrzutowego, przy uwzględnieniu sprężystych lokalnych odkształceń w miejscu styku, opisano zależnością:

$$P_0(t) = \frac{v}{\mu m} \exp(-\kappa t) \sin(nt), \quad (1)$$

gdzie:

v - prędkość uderzenia młotka,

m - masa zredukowana młotka

$$n^2 = \frac{1}{\mu m} - \frac{a^2}{4\mu^2 (ES)^2}, \quad \kappa = \frac{a}{2\mu ES},$$

gdzie:

E - moduł Younga,

S - pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta,

a - prędkość propagacji fali podłużnej w pręcie,

μ - współczynnik linearyzacji siły uderzenia młotka.

Wyrażenie (1) opisuje związek pomiędzy P_0 , v , m , t , S , E , a , μ , a więc relację 8-członową. Przyjmując v , m , S , E , a , μ jako stałe parametry, zależność (1) można interpretować jako relację:

$$R_{2_1} \text{ a } (p_0, t) \quad (2)$$

W przypadku gdy $v = 3 \frac{m}{s}$, $m = 4 \text{ kg}$, $E = 20,601 \frac{MN}{cm^2}$, $a = 5000 \frac{m}{s}$, $\mu = 1,459 \cdot 10^{-7} \frac{cm}{N}$, $S = 21,4 \text{ cm}^2$ relacja R_{2_1} oznacza spełnienie związku:

$$P_0(t) = 17,563 \exp(-3887,5t) \cdot \sin(1,25 \cdot 10^4 t) \quad [N] \quad (3)$$

W badaniach przedstawionych w pracy [82] prędkość młotka v jak i jego masę zredukowaną m wyznaczono metodami analitycznymi. Przyjmujemy dalej, że tak wyznaczone wartości v i m są "dokładne". Dla innych wartości v i m otrzymamy inną zależność typu (3), co można interpretować jako inną relację jak (2).

W pracach [83, 84] wyznaczono również siłę oddziaływania pręta na n -tą elektrodę w postaci:

$$P_n(t) = 2P_{n-1}(t) - 4h \int_0^t P_{n-1}(s) \cdot \exp(-2h(t-s)) ds \quad (4)$$

gdzie:

$$h = \rho a \frac{S}{M},$$

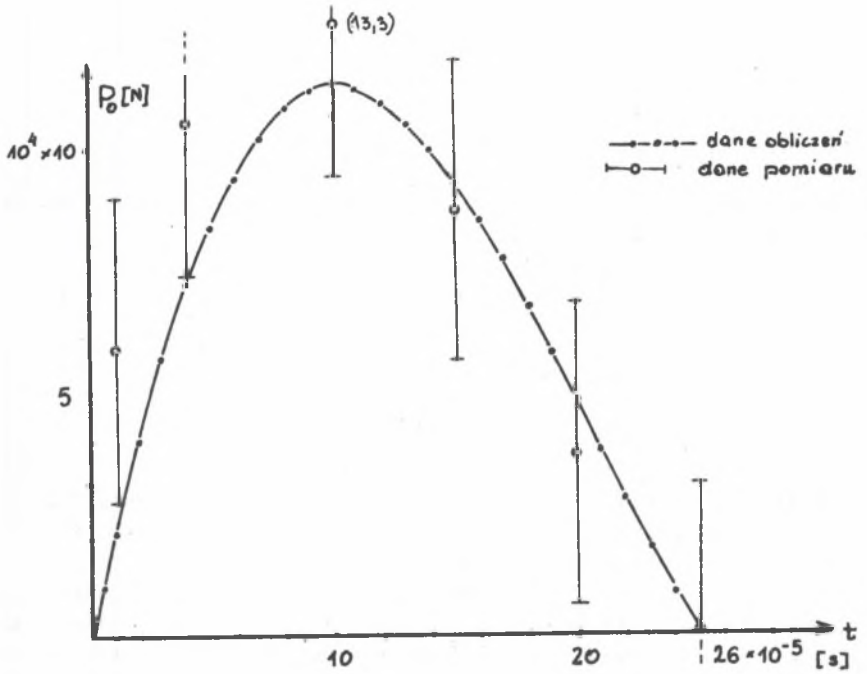
ρ - gęstość materiału pręta,
 M - masa zredukowana elektrody.

Dla $\rho = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $M = 16 \text{ kg}$, $h = 5230 \frac{1}{\text{s}}$ i przy wartościach pozostałych parametrów jak wyżej, zależność (4) dla $n = 1, 2, \dots, 6$ będziemy interpretowali jako ciąg relacji:

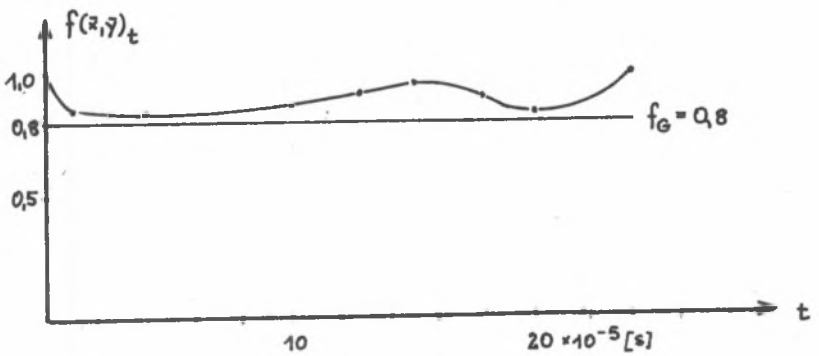
$$R_{2_2} \ni (P_1, t), R_{2_3} \ni (P_2, t), R_{2_4} \ni (P_3, t), R_{2_5} \ni (P_4, t), R_{2_6} \ni (P_5, t), \\ R_{2_7} \ni (P_6, t).$$

7.2. Zbadajmy zatem adekwatność relacji $R_{2_1}, R_{2_2}, \dots, R_{2_7}$

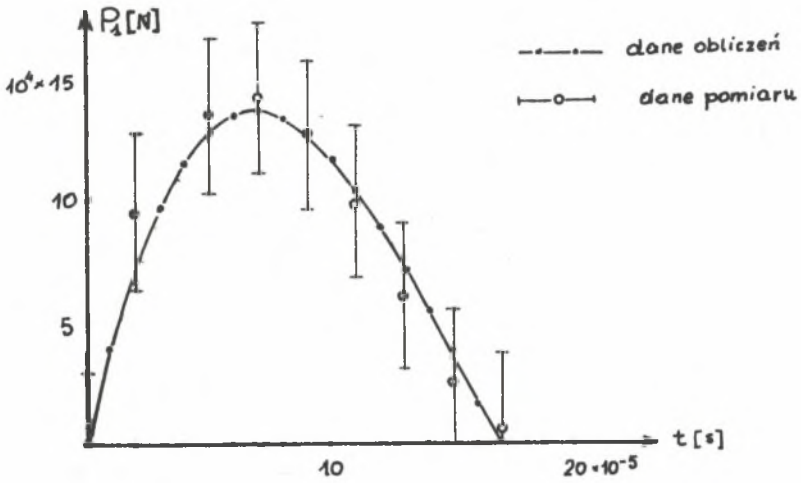
W tym celu korzystając z zależności (3) i (4) obliczono wartości sił P_0, P_1, \dots, P_6 w funkcji czasu. Obliczenia przeprowadzono z wykorzystaniem ETO na maszynie IBMPC/XT, program obliczeń napisano w języku XBASIC. Obliczenia P_0 i P_1 były "dokładne" - korzystano z funkcji analitycznych, natomiast dla P_2 i kolejno do P_6 korzystano z zależności (4). Całkę w zależności (4) obliczano metodą trapezów. Wyznaczono również błędy obliczenia $P_n(t)$. Błędy te były znikome, dopiero dla $P_4(t)$ przy $t \geq 7,71 \cdot 10^{-5} \text{ s}$, dla $P_5(t)$ przy $t \geq 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ oraz dla $P_6(t)$ przekraczały 1% wyliczonej wartości i zostały uwzględnione w poniższej analizie. Wykonane pomiary wartości siły $P_0(t)$ [82] były obarczone niedokładnością o przedziale $\pm 310,3 \cdot 10^2 \text{ N}$, co przyjęto także dla założonych danych pomiarowych $P_1(t), \dots, P_6(t)$. Wyniki pomiarów kilkakrotnie powtórzonych zastąpiono liczbami rozmytymi "trójkątnymi", gdzie α_2 odpowiadało wartości liczbowej pomiaru, natomiast α_1 i α_3 wartości pomiaru skorygowanej o przedział dokładności (odpowiednio dolna i górna granica). Wyniki obliczeń numerycznych przyjmowano za liczby "ostre" dopóki błędy obliczeń nie przekraczały 1%. Przy uwzględnianiu błędów obliczeń, dane numeryczne zastępowano przedziałami o "prostokątnych" funkcjach charakterystycznych. Wszystkie wyniki obliczeń i pomiarów przedstawiono na rys. 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25 zaznaczając przedziały dokładności pomiarów i obliczeń. Dla wyznaczenia adekwatności analitycznych opisów sił w układzie wykorzystano procedurę zamieszczoną w p. 5 przyjmując, że dla celu modelu funkcja uczestnictwa w zbiorze rozmytym powinna przyjmować wartości nie mniejsze niż 0,8.



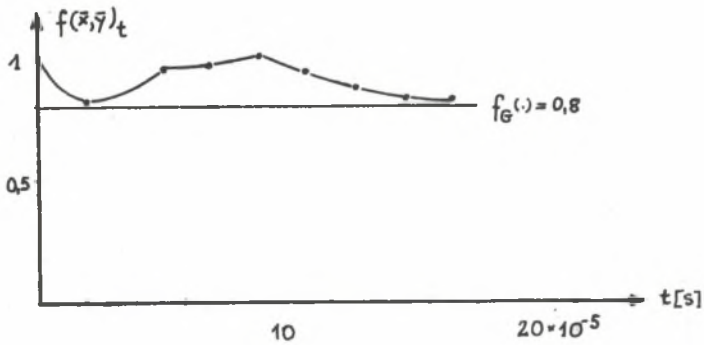
Rys. 13. Siła uderzenia $P_0(t)$
Fig. 13. Impact force $P_0(t)$



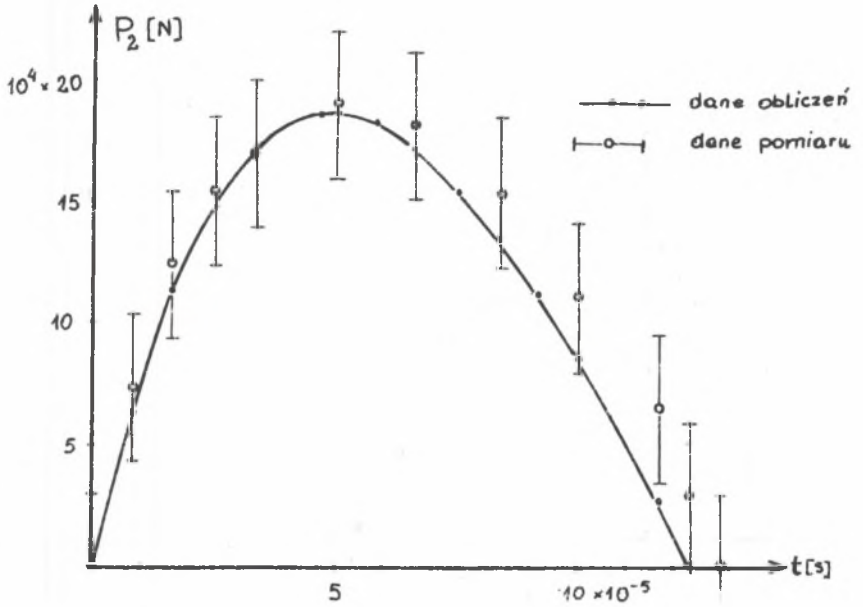
Rys. 14. Funkcja uczestnictwa dla $P_0(t)$
Fig. 14. Membership function for $P_0(t)$



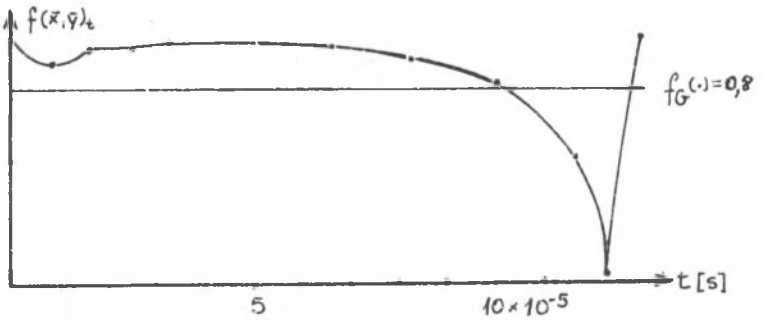
Rys. 15. Siła oddziaływania $P_1(t)$
Fig. 15. Loading force $P_1(t)$



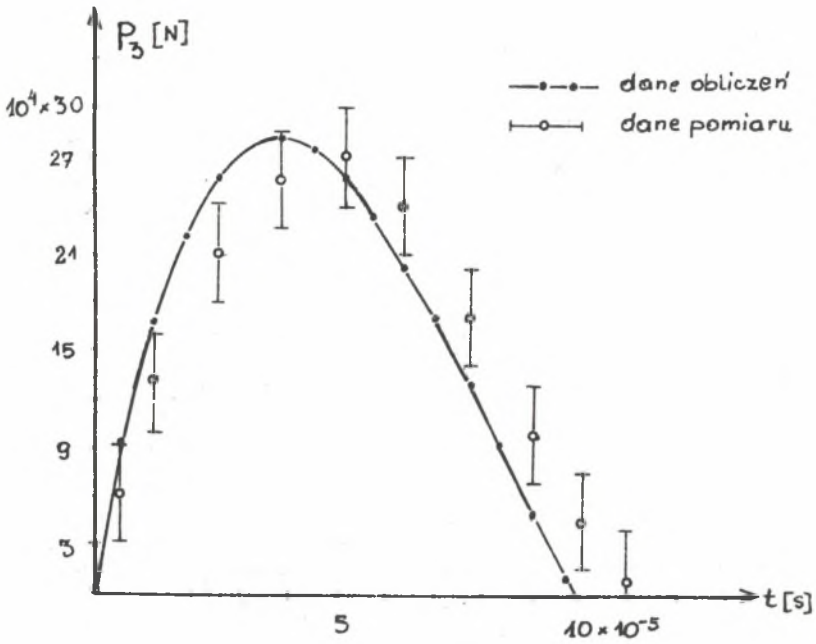
Rys. 16. Funkcja uczestnictwa dla $P_1(t)$
Fig. 16. Membership function for $P_1(t)$



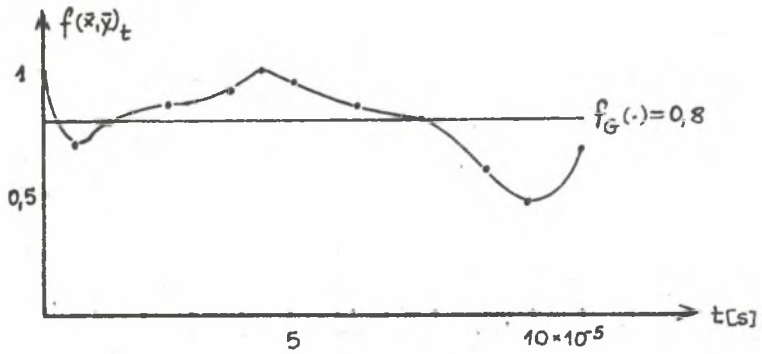
Rys. 17. Siła oddziaływania $P_2(t)$
Fig. 17. Loading force $P_2(t)$



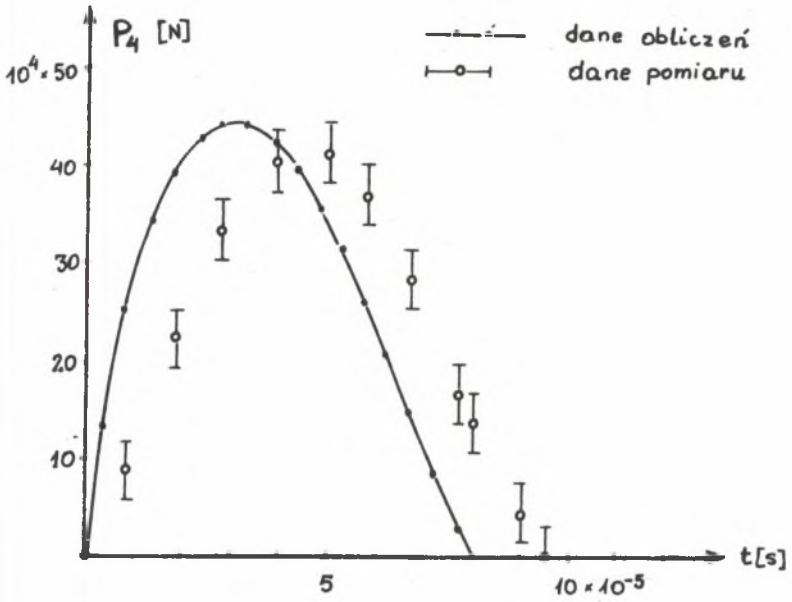
Rys. 18. Funkcja uczestnictwa dla $P_2(t)$
Fig. 18. Membership function for $P_2(t)$



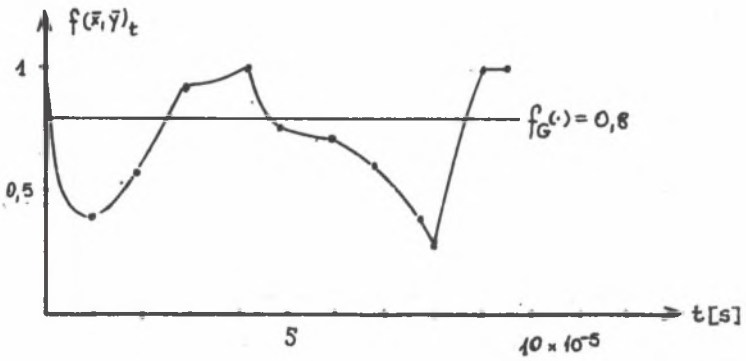
Rys. 19. Siła oddziaływania $P_3(t)$
Fig. 19. Loading force $P_3(t)$



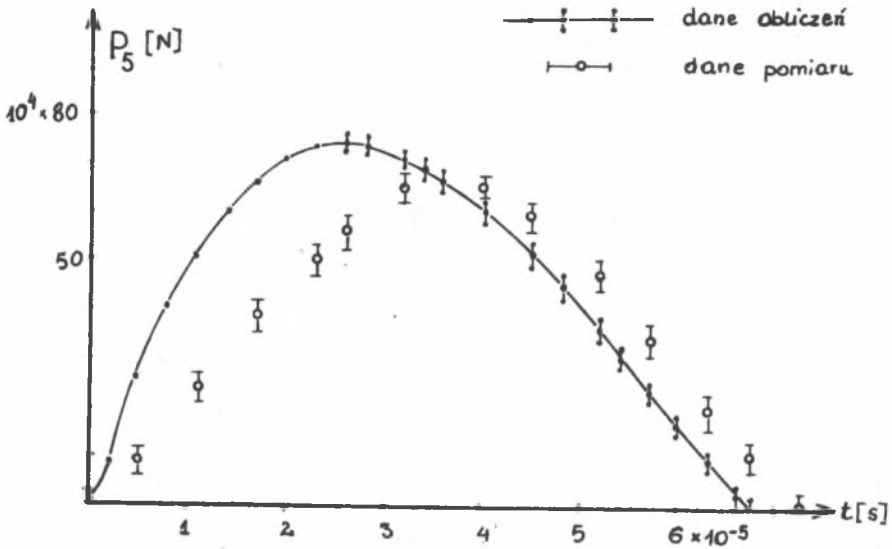
Rys. 20. Funkcja uczestnictwa dla $P_3(t)$
Fig. 20. Membership function for $P_3(t)$



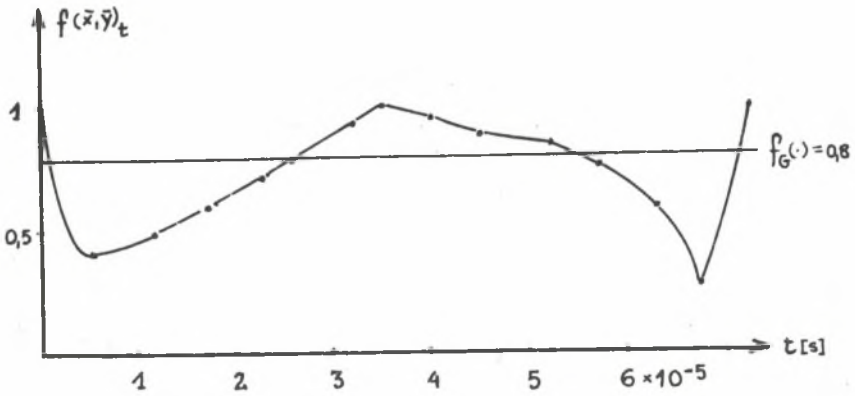
Rys. 21. Siła oddziaływania $P_4(t)$
Fig. 21. Loading force $P_4(t)$



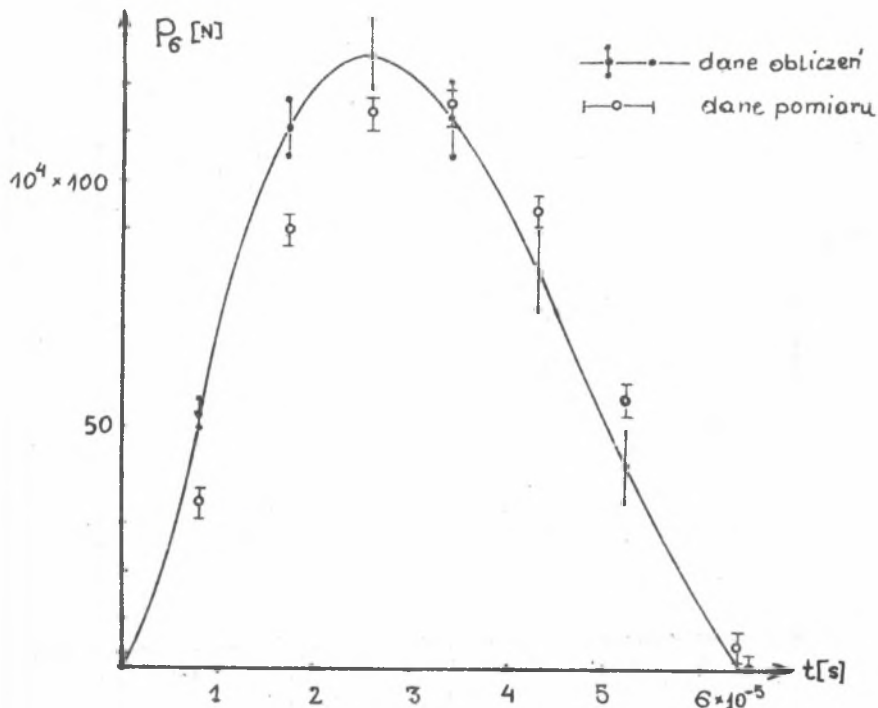
Rys. 22. Funkcja uczestnictwa dla $P_4(t)$
Fig. 22. Membership function for $P_4(t)$



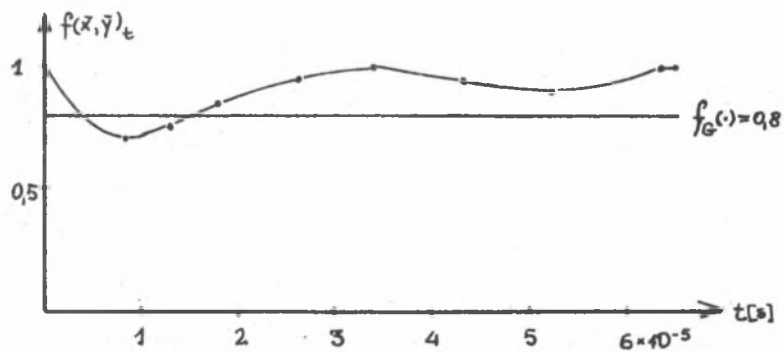
Rys. 23. Siła oddziaływania $P_5(t)$
Fig. 23. Loading force $P_5(t)$



Rys. 24. Funkcja uczestnictwa dla $P_5(t)$
Fig. 24. Membership function for $P_5(t)$



Rys. 25. Siła oddziaływania $P_6(t)$
Fig. 25. Loading force $P_6(t)$



Rys. 26. Funkcja uczestnictwa dla $P_6(t)$
Fig. 26. Membership function for $P_6(t)$

7.3. Poziom zmiennych fizycznych

Wartości funkcji uczestnictwa $f(\bar{x}_{P_0}, \bar{y}_{P_0}), \dots, f(\bar{x}_{P_6}, \bar{y}_{P_6})$ obliczono korzystając z lematów 2 i 3, (x - oznacza dane odczytów pomiarowych, y - dane obliczeń).

Wyniki obliczeń funkcji uczestnictwa w zbiorach rozmytych dla P_0, P_1, \dots, P_6 przedstawione zostały odpowiednio na rys. 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, na których zaznaczono również wartości funkcji celu modelu, która przyjmuje wartość $f_G(\cdot) = 0,8$ przy 20% odchyłce pomiędzy x i y . Funkcja uczestnictwa $f(x_t, y_t)$ dla zmiennej czasowej przyjmuje wartość $f(x_t, y_t) = 1$ dla każdej z badanych relacji. Rozmyte zbiory A_u (p. 5.1) można zapisać formalnie w postaci:

$$A_u = \{(\bar{x}_u, f(\bar{x}_u)) \mid \bar{x}_u = (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{\Gamma}_u\},$$

gdzie $u = P_0, P_1, \dots, P_6$; t_0, t_1, \dots, t_6 ; przy czym t_0, t_1, \dots oznaczają indeksy chwil czasowych przy opisie odpowiednio $P_0(t), P_1(t), \dots$. Z danych zamieszczonych na rys. 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26 wynika, że zachodzą inkluzje: $A_{P_0} \supseteq A_{fG}$, $A_{P_1} \supseteq A_{fG}$, $A_{P_2} \not\supseteq A_{fG}$, $A_{P_3} \not\supseteq A_{fG}$, $A_{P_4} \not\supseteq A_{fG}$, $A_{P_5} \not\supseteq A_{fG}$, $A_{P_6} \not\supseteq A_{fG}$ oraz $A_{t_0} \supseteq A_{fG}$, $A_{t_1} \supseteq A_{fG}, \dots, A_{t_6} \supseteq A_{fG}$, co oznacza, że na poziomie zmiennych fizycznych nie można rozstrzygnąć o adekwatności modelu matematycznego i ocenę należy przenieść na poziom dziedzin relacji (rys. 9).

7.4. Poziom dziedzin relacji R_{2_1}, \dots, R_{2_7}

Dla funkcji uczestnictwa $f(\bar{x}_u)$, $u = P_0, \dots, P_6$ przedstawionych na rys. 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26 obliczono zgodnie z p. 5.2 całki rozmyte, które przyjmują wartości: $\Theta_{P_0} = \Theta(\bar{\Gamma}_{P_0}) = 0,81$; $\Theta_{P_1} = 0,81$; $\Theta_{P_2} = 0,78$; $\Theta_{P_3} = 0,70$; $\Theta_{P_4} = 0,54$; $\Theta_{P_5} = 0,6$; $\Theta_{P_6} = 0,78$. W obliczeniu tych całek miarę $g(\bar{\Gamma}_{u\alpha})$ utworzono na zbiorze zmiennej czasowej (wg sposobu przedstawionego w pracy [79]). Dla zmiennej czasowej łatwo sprawdzić, że $\Theta_{t_0} = \Theta(\bar{\Gamma}_{t_0}) = 1$, $\Theta_{t_1} = 1, \dots, \Theta_{t_6} = 1$. Odpowiednie zbiory rozmyte $A_{\Theta}^{(i)}$ (p. 5.2 i rys. 9) przyjmują postać:

$$\text{dla } R_{2_1} : A_{\Theta}^{(1)} = \{(\bar{\Gamma}_{P_0}; 0,81), (\bar{\Gamma}_{t_0}; 1)\}$$

$$\text{dla } R_{2_2} : A_{\Theta}^{(2)} = \{(\bar{\Gamma}_{P_1}; 0,81), (\bar{\Gamma}_{t_1}; 1)\}$$

$$\text{dla } R_{2_3} : A_{\Theta}^{(3)} = \{(\Theta_{P_2}; 0,78), (\bar{\Gamma}_{t_2}; 1)\}$$

$$\text{dla } R_{2_4} : A_{\ominus}^{(4)} = \{(\bar{\Gamma}_{P_3}; 0,70), (\bar{\Gamma}_{t_3}; 1)\}$$

$$\text{dla } R_{2_5} : A_{\ominus}^{(5)} = \{(\bar{\Gamma}_{P_4}; 0,54), (\bar{\Gamma}_{t_4}; 1)\}$$

$$\text{dla } R_{2_6} : A_{\ominus}^{(6)} = \{(\bar{\Gamma}_{P_5}; 0,60), (\bar{\Gamma}_{t_5}; 1)\}$$

$$\text{dla } R_{2_7} : A_{\ominus}^{(7)} = \{(\bar{\Gamma}_{P_6}; 0,78), (\bar{\Gamma}_{t_6}; 1)\}$$

Dla celu modelu łatwo zauważyć, że $\Theta_{UG} = \Theta(\bar{\Gamma}_U) = \int_U f_G(\bar{\Gamma}_U) \circ g(\bar{\Gamma}_{U\alpha}) = 0,8$

i odpowiednie zbiory rozmyte celu mają postać: $G_{\ominus}^{(1)} = \{(\bar{\Gamma}_{\cdot}; 0,8), (\bar{\Gamma}_{\cdot}; 0,8)\}$
 dla $i = 1, 2, \dots, 7$. Zachodzą przy tym inkluzje: $A_{\ominus}^{(1)} \supseteq G_{\ominus}^{(1)}$, $A_{\ominus}^{(2)} \supseteq G_{\ominus}^{(2)}$,
 $A_{\ominus}^{(3)} \not\supseteq G_{\ominus}^{(3)}$, $A_{\ominus}^{(4)} \not\supseteq G_{\ominus}^{(4)}$, $A_{\ominus}^{(5)} \not\supseteq G_{\ominus}^{(5)}$, $A_{\ominus}^{(6)} \not\supseteq G_{\ominus}^{(6)}$, $A_{\ominus}^{(7)} \not\supseteq G_{\ominus}^{(7)}$, z których wynika, że nie można ocenić adekwatności badanego modelu matematycznego na poziomie dziedzin relacji, ocenę należy przenieść na poziom relacji.

7.5. Poziom relacji R_2

Zgodnie z rozważaniami w p. 5.3 przypiszmy poszczególnym zmiennym w poszczególnych relacjach wagi μ_{P_i} , μ_{t_i} , dla których $\mu_{P_i} + \mu_{t_i} = 1$. Przyjmijmy, że takie samo znaczenie mają dla nas "dobre" modelowanie czasu jak i siły oddziaływań, zatem $\mu_{P_i} = 0,5$, $\mu_{t_i} = 0,5$. Utwórzmy ciągi dwu-elementowe:

$$\bar{\Theta}_1 = (\mu_U \Theta_U) = (\mu_{P_0} \Theta_{P_0}, \mu_{t_0} \Theta_{t_0}) = (0,5 \cdot 0,81; 0,5 \cdot 1),$$

$$\Theta_2 = (\mu_{P_1} \Theta_{P_1}, \mu_{t_1} \Theta_{t_1}) = (0,5 \cdot 0,81; 0,5 \cdot 1),$$

$$\Theta_3 = (\mu_{P_2} \Theta_{P_2}, \mu_{t_2} \Theta_{t_2}) = (0,5 \cdot 0,78; 0,5 \cdot 1),$$

$$\Theta_4 = (\mu_{P_3} \Theta_{P_3}, \mu_{t_3} \Theta_{t_3}) = (0,5 \cdot 0,70; 0,5 \cdot 1),$$

$$\Theta_5 = (\mu_{P_4} \Theta_{P_4}, \mu_{t_4} \Theta_{t_4}) = (0,5 \cdot 0,54; 0,5 \cdot 1),$$

$$\Theta_6 = (\mu_{P_5} \Theta_{P_5}, \mu_{t_5} \Theta_{t_5}) = (0,5 \cdot 0,6; 0,5 \cdot 1),$$

$$\Theta_7 = (\mu_{P_6} \Theta_{P_6}, \mu_{t_6} \Theta_{t_6}) = (0,5 \cdot 0,78; 0,5 \cdot 1).$$

Utwórzmy $\bar{\Theta} = \{\bar{\Theta}_i | i = 1, 2, \dots, 7\}$ i weźmy funkcję uczestnictwa $\phi: \bar{\Theta} \rightarrow [0, 1]$, która przyjmuje wartości: $\phi(\bar{\Theta}_1) = \mu_{P_0} \Theta_{P_0} + \mu_{t_0} \Theta_{t_0} = 0,90$,
 $\phi(\bar{\Theta}_2) = 0,90$, $\phi(\bar{\Theta}_3) = 0,89$, $\phi(\bar{\Theta}_4) = 0,85$, $\phi(\bar{\Theta}_5) = 0,77$, $\phi(\bar{\Theta}_6) = 0,8$,

$\Phi(\bar{\Theta}_7) = 0,89$. Zatem rozmyty zbiór A_Φ ma postać: $A_\Phi = \{(\bar{\Theta}_1; 0,9), (\bar{\Theta}_2; 0,9), (\bar{\Theta}_3; 0,89), (\bar{\Theta}_4; 0,85), (\bar{\Theta}_5; 0,77), (\bar{\Theta}_6; 0,8), (\bar{\Theta}_7; 0,89)\}$.

Funkcja uczestnictwa dla celu modelu (p. 5.3) $\Phi_G(\bar{\Theta}_i) = \Phi(\bar{\Theta}_{iG})$ przyjmuje wartości: $\Phi_G(\bar{\Theta}_i) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,8 = 0,8$ dla $i = 1, 2, \dots, 7$. Odpowiedni zbiór rozmyty dla celu modelu ma zatem postać: $G_\Phi = \{(\bar{\Theta}_1; 0,8), (\bar{\Theta}_2; 0,8), (\bar{\Theta}_3; 0,8), (\bar{\Theta}_4; 0,8), (\bar{\Theta}_5; 0,8), (\bar{\Theta}_6; 0,8), (\bar{\Theta}_7; 0,8)\}$.

Łatwo zauważyć, że ze względu na $\bar{\Theta}_5$ ocenę adekwatności modelu należy przenieść na poziom ciągu relacji (rys. 9).

7.6. Poziom ciągu relacji

Każdej z badanych relacji R_{z_i} , $i = 1, 2, \dots, 7$ przyporządkujemy wagę $\bar{\mu}_i = \frac{1}{7}$, gdyż każdą z relacji będziemy uważali za jednakowo "ważną" w badaniu wzbudzenia drgań elektrod elektrofiltru.

Utwórzmy ciąg $\bar{\Phi} = (\bar{\mu}_1\Phi_1)$, gdzie $\Phi_i = \Phi(\bar{\Theta}_i)$, $i = 1, 2, \dots, 7$.

$$\bar{\Phi} = (\bar{\mu}_1\Phi_1, \bar{\mu}_2\Phi_2, \dots, \bar{\mu}_7\Phi_7) = (\frac{1}{7} \cdot 0,9, \frac{1}{7} \cdot 0,9, \frac{1}{7} \cdot 0,89, \frac{1}{7} \cdot 0,85, \frac{1}{7} \cdot 0,77, \frac{1}{7} \cdot 0,8, \frac{1}{7} \cdot 0,89).$$

Funkcja uczestnictwa $\psi(\bar{\Phi})$, przyjmuje wartość:

$$\psi(\bar{\Phi}) = \frac{1}{7} \cdot 0,9 + \frac{1}{7} \cdot 0,9 + \frac{1}{7} \cdot 0,89 + \frac{1}{7} \cdot 0,85 + \frac{1}{7} \cdot 0,77 + \frac{1}{7} \cdot 0,8 + \frac{1}{7} \cdot 0,89 = 0,87$$

Rozmyty zbiór A_ψ ma zatem postać: $A_\psi = \{(\bar{\Phi}; 0,87)\}$. Dla celu modelu łatwo zauważyć, że: $\psi_G(\bar{\Phi}) = \psi(\bar{\Phi}_G) = 0,8$ oraz $G_\psi = \{(\bar{\Phi}; 0,8)\}$. Zachodzenie inkluzji $A_\psi \supseteq G_\psi$ oznacza, że badany model matematyczny jest adekwatny w aspekcie postawionego celu badań.

DODATEK

PODSTAWOWE POJĘCIA DOTYCZĄCE ZBIORÓW ROZMYTYCH.

1. Zbiór rozmyty wypukły

Zbiorem rozmytym nazywamy:

$$A = \text{gr } f \ni \{(x, f(x)) \mid x \in X, f(x) \in [0, 1]\}$$

Zbiór rozmyty jest wypukły, jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ i $\lambda \in [0, 1]$ zachodzi $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq f(x_1) \wedge f(x_2)$, gdzie \wedge oznacza wybór elementu mniejszego.

2. Inkluzja zbiorów

Dla zbiorów rozmytych $A = \text{gr } f_A \ni \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$,

$$B = \text{gr } f_B \ni \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

inkluzja $A \subseteq B$ oznacza, że $f_A(x) \leq f_B(x)$ dla $\forall x \in X$.

3. Rozmyta relacja

Rozmytą relację pomiędzy dwoma niepustymi zbiorami X i Y nazywamy

$$R = \text{gr } f \ni \{(x, y), f(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y, f(x, y) \in [0, 1]\}$$

4. Rozmyta miara i rozmyta całka

Niech X oznacza zbiór a β klasę jego podzbiorów taką, że $\emptyset \in \beta$, $X \in \beta$. Funkcję $g : \beta \rightarrow [0, 1]$ nazywamy miarą rozmytą, gdy spełnione są warunki:

$$1^\circ g(\emptyset) = 0, g(X) = 1$$

$$2^\circ \text{ Jeśli } A, B \in \beta \text{ i } A \subseteq B, \text{ to } g(A) \leq g(B)$$

$$3^\circ \text{ Jeśli } \{A_n\} \text{ jest monotonicznym ciągiem zbiorów w } \beta \text{ i jeśli } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \beta, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)$$

Jeśli dany jest zbiór rozmyty A i jego przekrój $\alpha, F_\alpha = \{x \mid f(x) \geq \alpha \in [0, 1]\}$, $F_\alpha \in \beta$, to rozmytą całkę funkcji $f(x)$ po zbiorze $E \subset X$, ze względu na rozmytą miarę $g(\cdot)$ nazywamy $\int_E f(x) \circ g(\cdot) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \wedge g(E \cap F_\alpha)]$.

Dowody lematów 2-6

5. Dowód Lematu 2, (rys. 3 i 4)

1° $\alpha_2 \leq \beta_1, \alpha_3 \leq \beta_2$. Funkcja charakterystyczna $z(y) = 1$ w całym przedziale $[\beta_1, \beta_2]$, stąd $\min_{x,y} [h(x), z(y), \varphi(x,y)] = \min_{x,y} [h(x), \varphi(x,y)]$. Funkcja $h(x)$ przyjmuje takie same wartości dla pewnych $x \leq \alpha_2$ i $x \geq \alpha_2$, podczas gdy $\varphi(x,y)$ przyjmuje większe wartości dla $x \geq \alpha_2$ niż dla $x \leq \alpha_2$. Zatem obszar naszych poszukiwań ograniczymy do $x \in [\alpha_2, \alpha_3]$ i $y \in [\beta_1, \alpha_3]$. Przeprowadźmy poszukiwanie $\sup_{x,y} \min [h(x), \varphi(x,y)]$, gdy $y \in [\beta_1, \alpha_3]$ jest chwilowo ustalone, podczas gdy x zmienia się w przedziale $[\alpha_2, \alpha_3]$. Dla $y = \beta_1$ i $x \in [\alpha_2, \beta_1]$; funkcja $\varphi(x, \beta_1) = \frac{x}{\beta_1}$ jest liniowa, natomiast dla $x > \beta_1$ hiperboliczna $= \frac{\beta_1}{x}$.

Zmieniając y od β_1 do α_3 otrzymamy rodzinę prostych pomiędzy $\frac{x}{\beta_1}$ i $\frac{x}{\beta_2}$ oraz jako ich kontynuację rodzinę funkcji hiperbolicznych z graniczną $\varphi(x, \beta_1) = \frac{\beta_1}{x}$, (rys. 3). Zatem $\sup_{x,y} \min [..]$ jest punktem przecięcia $h(x)$ z liniową częścią $\varphi(x, \beta_1)$ albo hiperboliczną $\varphi(x, \beta_1)$. W pierwszym przypadku mamy:

$$h(x) = \frac{-x + \alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2}, \varphi(x, \beta_1) = \frac{x}{\beta_1} \text{ i } h(x) = \varphi(x, \beta_1) \Rightarrow x_0 = \frac{\alpha_3 \beta_1}{\alpha_3 - \alpha_2 + \beta_1}$$

$$\text{i } \sup_{x,y} \min [..] = \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2 + \beta_1}$$

W drugim rozwiązujemy równanie $\frac{-x + \alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2} = \frac{\beta_1}{x}$ wyznaczając punkty przecięcia x_1, x_2 (rys. 3). Ponieważ dla $\beta_1 \leq x \leq \alpha_3$, $h(x)$ i $\varphi(x, \beta_1)$ są malejące, zatem mamy $\varphi(x_1, \beta_1) < h(\beta_1)$, $\varphi(x_2, \beta_1) < h(\beta_1)$, $\beta_1 \leq \beta \leq \alpha_3$,

$$h(\beta_1) < \varphi(x_0, \beta_1) \text{ i } \sup_{x,y} \min [..] = \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2 + \beta_1}$$

2° $0 < \alpha_2 \leq \beta_1, \alpha_3 \geq \beta_2$. Dla $\alpha_2 \leq x \leq \beta_2$ można wyznaczyć $\sup_{x,y} \min [..]$ analogicznie jak w 1°, a mianowicie $\frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2 + \beta_1}$. Dla $\beta_2 \leq x \leq \alpha_3$ mamy

$$\sup_{x,y} \min [..] \leq h(\beta_2) = \frac{\alpha_3 - \beta_2}{\alpha_3 - \alpha_2} \Rightarrow \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2 + \beta_1} = \frac{\alpha_3 - \beta_1}{\alpha_3 - \alpha_2} \geq \frac{\alpha_3 - \beta_2}{\alpha_3 - \alpha_2},$$

$$\text{a więc } \sup_{x,y} \min [..] = \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2 + \beta_1}$$

3° $\beta_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_2$. Oczywiście jest $\sup_{x,y} \min [..] = 1$

4° $\beta_2 \leq \alpha_2, 0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1$. Przeszukiwanie $\sup_{x,y} \min [..]$ przeprowadzimy dla $x \in [\alpha_1, \alpha_2]$ i $y \in [\beta_1, \beta_2]$ - rys. 4. Analogicznie jak w 1° rozpatrzmy

rodzinę zależności liniowych $\varphi_{\beta}(x, \beta) = \frac{x}{\beta}$ zawartych pomiędzy $\frac{x}{\beta_1}$ i $\frac{x}{\beta_2}$ oraz hiperbolicznych zawartych pomiędzy $\frac{\beta_1}{x}$, $\frac{\beta_2}{x}$. Ponieważ dla $a > 0$ zachodzi $\frac{\beta-a}{\beta} < \frac{\beta}{\beta+a}$ a funkcja $h(x)$ jest rosnąca, zatem $\sup_{x,y} \min [..]$ wyznacza punkt przecięcia $h(x)$ i hiperbolicznej $\varphi(x, \beta_2)$. Rozwiązując zatem równanie $h(x) = \varphi(x, \beta_2)$, tzn. $\frac{x - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\beta_2}{x}$ otrzymujemy $x_{1/2} = 0,5(\alpha_1 \pm (\alpha_1^2 + 4\beta_2(\alpha_2 - \alpha_1)))^{\frac{1}{2}}$ oraz $\sup_{x,y} \min [..] = \frac{2\beta_2}{\alpha_1 + (\alpha_1^2 + 4\beta_2(\alpha_2 - \alpha_1))^{\frac{1}{2}}}$ cbdo.

6. Dowód lematu 3 (rys. 5, 6)

1° $\alpha_2 < \beta_1$. Podobnie jak w dowodzie L 2 będziemy przeszukiwali przedział $[\alpha_2, \alpha_3]$ - rys. 5. Dla $\alpha_2 < x < \beta_1$ rozwiązujemy równanie $h(x) = \varphi(x, \beta_1)$, tj. $\frac{-x + \alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2} = \frac{x}{\beta_1} \Rightarrow x_0 = \frac{\beta_1 \alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2 + \beta_1}$ i znajdujemy $h(x_0) = \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2 + \beta_1}$. Dla $\alpha_3 < x < \beta_1$ możliwe jest przecięcie $h(x)$ i hiperbolicznej $\varphi(x, y)$. Ponieważ obie zależności, tj. $h(x)$ i hiperboliczna $\varphi(x, y)$ są malejące, zatem dla każdego punktu przecięcia x_1 zachodzi $h(x_1) < h(\beta_1) < \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2 + \beta_1}$, a więc $\sup_{x,y} \min [..] = \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2 + \beta_1}$.

2° $\beta_1 < \alpha_2$. Analogicznie jak wyżej przeszukujemy obszar $[\alpha_1, \alpha_2]$ - rys. 6. Rozwiązując równanie $h(x) = \varphi(x, \beta_1)$, tj. $\frac{x - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\beta_1}{x} \Rightarrow x_{1/2} = 0,5(\alpha_1 \pm (\alpha_1^2 + 4\beta_1(\alpha_2 - \alpha_1)))^{\frac{1}{2}}$ otrzymujemy $\sup_{x,y} \min [..] = \varphi(x_{1/2}, \beta_1) = \frac{2\beta_1}{\alpha_1 + (\alpha_1^2 + 4\beta_1(\alpha_2 - \alpha_1))^{\frac{1}{2}}}$.

W przypadku $\alpha_1 < 0$ i $\beta_1 > 0$ pojawia się punkt przecięcia x_0 "na lewo" od β_1 - rys. 6. Ponieważ $h(x)$ jest rosnąca, zatem

$$h(x_0) < h(\beta_1) \text{ i } \sup_{x,y} \min [..] = \frac{2\beta_1}{\alpha_1 + (\alpha_1^2 + 4\beta_1(\alpha_2 - \alpha_1))^{\frac{1}{2}}} \text{ cbdo.}$$

7. Dowód lematu 4 (rys. 7)

Dowód przebiega analogicznie jak wyżej, tzn. zmieniamy x przy chwilowo ustalonym y . Otrzymujemy rodzinę prostych pomiędzy $\frac{x}{\beta_1}$ i $\frac{x}{\beta_2}$.

(rys. 7). Punkt przecięcia $\frac{x}{\beta_1}$ i $x = \alpha_2$ wyznacza $\sup_{x,y} \min [..] = \frac{\alpha_2}{\beta_1}$.

Dla $\beta_1 < \alpha_2$, $\alpha_1 < \beta_2$ dowód jest oczywisty, cbdo.

8. Dowód lematu 5 (rys. 8) jest w świetle powyższych rozważań oczywisty

9. Dowód lematu 6 jest także oczywisty

10. Komputerowy program obliczeń $f(\bar{x}, \bar{y})$

Dla ułatwienia obliczeń funkcji uczestnictwa $f(\bar{x}, \bar{y})$, (p. 4.5) napisano program komputerowy w języku BETA BASIC 30 Spectrum obejmujący wszystkie przedstawione przypadki jak w L 2-5. Program został napisany przez mgr inż. M. Rabiej - Zespół ETO Instytutu Włókienniczego PŁ Filia w Bielsku-Białej, za co autor wyraża podziękowanie.

```

5 CLOSE #3
  OPEN #3;"t"
10 REM FAST COMPUTATION FORMULAS
20 CLS
25 LPRINT " FAST COMPUTATION FORMULAS"
26 LPRINT ""
30 PRINT AT 10,0;710,20;"FAST COMPUTATION FORMULAS"
40 INPUT "Podaj wariant obliczen(1-4) ";a$
45 LET c$=" "
46 LPRINT "" ; " D R A N E ";'';
50 LET n=VAL a$
55 LET d$="#####.##"
  LET sup=0
  LET ii=0
60 IF n>4 OR n<1 THEN GO TO 40
70 INPUT "Czy dane sa wartosci srednie i Przedzialy dokladnosci(T/N) ";c$
75 IF c$="t" OR c$="T" THEN LPRINT "      x      bi      dx      y      dy"
  ? LPRINT "      a1      a2      a3      b1      b2"
76 LPRINT ""
80 INPUT "Ilosc danych ";m
85 CLS
90 DIM s(m)
110 GO TO 120+n
121 GO TO 200
122 GO TO 500
123 GO TO 1000
124 GO TO 1500
125 GO TO 2000
200 REM TROJKATNA,PROSTOKATNA
205 FOR i=1 TO m
210 LET sup=0
  LET ii=0
220 IF c$="t" OR c$="T" THEN alfa
    beta
    ? alfa1
    beta1
225 IF a2<=0 THEN GO TO 260
226 IF b1<0 THEN GO TO 290
230 IF a1=0 AND a2<=b1 THEN LET sup=a3/(a3-a2+b1)
  LET ii=1
  GO TO 400
240 IF a2>=b1 AND a2<=b2 THEN LET sup=1
  LET ii=2
  GO TO 400
250 IF a1=0 AND a2>=b2 THEN LET sup=2*b2/(a1+SQR (a1*a1+4*b1*(a2-a1)))
  LET ii=3
  GO TO 400
260 IF a2<=0 AND a3>=0 AND b1>=ABS (a2) THEN LET sup=ABS (a1)/(a2-a1+b1)
  LET ii=4
  GO TO 400
270 IF a2<0 AND b1>0 AND b1<=ABS (a2) AND ABS (a2)>=b2 THEN LET sup=1
  LET ii=5
  GO TO 400
280 IF a2<0 AND a3>=0 AND b2>0 AND b2<=ABS (a2) AND b1>=a2 THEN LET sup=2*b1/(a
3+SQR (ABS (a3*a3+4*b2*(a2-a1)))
  LET ii=6
  GO TO 400
290 IF b1<0 AND ABS (b1)>=b2 AND b2>0 AND a1>=0 AND a1<=ABS (b1) AND ABS (b1)>=
2 THEN LET sup=2*ABS (b1)/(a1+SQR (a1*a1+4*ABS (b1)*(a2-a1)))
  LET ii=7
  GO TO 400
300 IF b1<0 AND ABS (b1)>=b2 AND b2<=a2 THEN LET sup=2*b2/(a1*a1+SQR (a1*a1+4*
b2*(a2-a1)))
  LET ii=8
  GO TO 400

```

```

310 IF b1<0 AND a2>ABS (b1) AND ABS (b1)>=b2 THEN LET P=2*ABS (b1)/(a1*a1+SQ
R (a1*a1+4*ABS (b1)*(a2-a1)))
    LET ii=9
    GO TO 400
320 IF b1<0 AND ((ABS (b1)<=a2 AND a2<=b2) OR (b2<=a2 AND a2<=ABS (b1))) THEN
LET sup=1
    LET ii=10
    GO TO 400
400 IF ii=0 THEN PRINT "Bledne dane"
    GO TO 210
410 LET s(i)=sup
415 PRINT ?"####";i;?d$;sup;" ii=";ii
420 NEXT i
430 GO TO 1900
500 REM TROJKATNA I OSTRA
505 FOR i=1 TO m
508 LET sup=0
    LET ii=0
510 IF c$="t" OR c$="T" THEN alfa
    ? gamma
    ? alfa1
    ? gamma1
515 IF a2<0 OR b1<0 THEN GO TO 540
520 IF a1>=0 AND a2<=b1 THEN LET sup=a3/(a3-a2+b1)
    LET ii=1
    GO TO 900
530 IF a1>=0 AND a2>=b1 THEN LET sup=2*b1/(a1+SQR (a1*a1+4*b1*(a2-a1)))
    LET ii=2
    GO TO 900
540 IF a2<0 AND a3>=0 AND b1>=ABS (a2) THEN LET sup=ABS (a1)/(a3-a2+b1)
    LET ii=3
    GO TO 900
550 IF a2<0 AND a3>=0 AND b1>0 AND b1<=ABS (a2) THEN LET sup=2*b1/(-a3+SQR (AL
S (a3*a3+4*b1*(a2-a1)))
    LET ii=4
    GO TO 900
560 IF b1<0 AND ABS (b1)<=a2 THEN LET sup=2*ABS (b1)/(a1+SQR (ABS (a1*a1+4*b2*
(a2-a1)))
    LET ii=5
    GO TO 900
570 IF b1<0 AND a2<=ABS (b1) THEN LET sup=a3/(a3-a2+ABS (b1))
    LET ii=6
    GO TO 900
580 IF b1=0 AND a2>0 AND a1<0 THEN LET sup=ABS (a1)/(a2-a1)
    LET ii=7
    GO TO 900
590 IF b1=0 AND a1>=0 THEN LET sup=0
    LET ii=8
    GO TO 900
800 IF ii=0 THEN PRINT "Bledne dane"
    GO TO 508
900 LET s(i)=sup
910 PRINT ?"#####";i;?d$;s(i);" ii=";ii
920 NEXT i
930 GO TO 1900
1000 REM PROSTOKATNE X,Y
1010 FOR i=1 TO m
1020 LET sup=0
    LET ii=0
1030 IF c$="t" OR c$="T" THEN beta
    LET a1=b1
    LET a2=b2
    beta
    ? beta12
    beta1
1035 IF a1<0 AND a2>0 THEN GO TO 1060
1040 IF b1>=a2 THEN LET sup=a2/b1
    LET ii=1
    GO TO 1200
1050 IF b1<=a2 AND a1<=b2 THEN LET sup=1
    LET ii=2
    GO TO 1200

```

```
1050 IF a1<0 AND a2>0 AND b1<=ABS (a1) AND a2<=b2 THEN LET sup=1
      LET ii=3
      GO TO 1200
1070 IF a1<0 AND a2>0 AND ABS (a1)<b1 THEN LET sup=ABS (a1/b1)
      LET ii=4
      GO TO 1200
1080 IF ii=0 THEN PRINT "Bledne dane"
      GO TO 1020
1200 LET s(i)=sup
1210 PRINT ?"#####";i;?d$;s(i);"  ii=";ii
1220 NEXT i
1230 GO TO 1900
1500 REM PROSTOKATNA I OSTRZA
1510 FOR i=1 TO m
1520 LET sup=0
      LET ii=0
1530 IF c$="t" OR c$="T" THEN beta
      LET a1=b1
      LET a2=b2
          gamma
      ? beta12
          gamma1
1535 IF (a1<0 AND a2>0) THEN GO TO 1570
1536 IF b1<=0 AND a1>0 THEN GO TO 1590
1540 IF b1>=a2 THEN LET sup=a2/b1
      LET ii=1
      GO TO 1700
1550 IF b1>=a1 AND b1<=a2 THEN LET sup=1
      LET ii=2
      GO TO 1700
1560 IF b1<=a1 THEN LET sup=b1/a1
      LET ii=3
      GO TO 1700
1570 IF a1<0 AND a2>0 AND b1>=0 AND b1<=ABS (a1) THEN LET sup=1
      LET ii=4
      GO TO 1700
1580 IF a1<0 AND a2>0 AND b1>=ABS (a1) THEN LET sup=ABS (a1/b1)
      LET ii=5
      GO TO 1700
1590 IF b1<0 AND a1>0 AND a1<=ABS (b1) AND ABS (b1)<=a2 THEN LET sup=1
      LET ii=5
      GO TO 1700
1600 IF b1<0 AND a1>0 AND a1>=ABS (b1) THEN LET sup=ABS (a1/b1)
      LET ii=6
      GO TO 1700
1610 IF b1=0 AND a1>0 THEN LET sup=0
      LET ii=7
      GO TO 1700
1620 IF ii=0 THEN PRINT "Bledne dane"
      GO TO 1520
1700 LET s(i)=sup
1710 PRINT ?"#####";i;?d$;s(i);"  ii=";ii
1720 NEXT i
1730 GO TO 1900
1900 LPRINT ???;" LP      SUP MINE I";??
1905 FOR i=1 TO m
1910 LPRINT ?"#####";i;"  ";?d$;s(i)
1912 NEXT i
1915 LET ymin=s(1),ymax=s(1)
1920 FOR i=1 TO m
1925 IF s(i)<ymin THEN LET ymin=s(i)
1930 IF s(i)>ymax THEN LET ymax=s(i)
1940 NEXT i
1950 wykres 0,m+1,ymin,ymax,"lp","sup",0,0,1
2000 FOR i=1 TO m
2010 mark i,s(i),6
2020 NEXT i
2021 PAUSE 0
2025 GO TO 40
2500 ?alfa
2510 INPUT "xsr=";xs
2520 INPUT "ysr=";ys
2530 INPUT "dx=";dx
2540 INPUT "dy=";dy
```

```

545 LPRINT ?d$;xs;?d$;ys;?d$;dx;?d$;dy
2550 LET a1=xs-dx
2560 LET a2=xs
570 LET a3=xs+dx
2580 ?
2600 ?alfa1
610 INPUT "alfa1=";a1
2620 INPUT "alfa2=";a2
2630 INPUT "alfa3=";a3
635 LPRINT ?d$;a1;?d$;a2;?d$;a3;
2640 ?
2650 ?beta
670 INPUT "ysr=";ys
2690 INPUT "dy=";dy
2692 LPRINT o$;?d$;ys;o$;?d$;dy
695 LET b1=ys-dy
LET b2=ys+dy
2700 ?
2710 ?beta1
2720 INPUT "beta1=";b1
2730 INPUT "beta2=";b2
2735 LPRINT ?d$;b1;?d$;b2
2740 ?
2750 ?gamma
760 INPUT "xsr=";b1
2761 LET b2=b1
2765 LPRINT ?d$;b1;?d$;b2
2770 ?
2780 ?gamma1
2790 INPUT "beta1=";b1
2791 LET b2=b1
2792 LPRINT ?d$;b1;?d$;b2
2795 ?
2800 ?beta12
2810 INPUT "alfa1=";a1
2820 INPUT "alfa2=";a2
2825 LPRINT ?d$;a1;?d$;a2;o$;
330 ?
2990 STOP
3000 ?w#oPis xmin,xmax,os,oplog,?o$
3010 ?cm1,cm2,dx1,dxo,doo,dx,dxp,ex,l10,lmax,ldxo,lmin,ldx,m0,x
3020 ?oplog=0,o$=""
LET l10=LN 10,ex=1e38,m0=0
3030 IF NOT oplog THEN GO TO 3170
3040 ?3160
3050 DATA 20,10,10,5,3,5,2,0,1
3060 DATA 2,5,0,1,7,1,1,2,0,3
3070 LET lmin=INT (LN xmin/l10)
3080 LET lmax=INT (LN xmax/l10)
LET ldx=lmax-lmin
RESTORE 3050
s_P ldx,dxo
RESTORE 3060
s_P ldx,doo
3090 LET cm2=-INT (-lmin/dxo)*dxo
dexp cm2
LET cm1=-INT (-xmin/cm2)
LET x=0
IF lmax=lmin AND lmin<>(LN xmin/l10) THEN LET o$=o$+" (E"+STR$ INT lmin+"")

```

```

1100 ??x<=xmax
3110 IF cm1>=10 THEN
    LET cm1=dxo
    dexP cm1
    LET cm2=cm1*cm2
    LET cm1=1
    GO TO 3140
    ? IF NOT x THEN GO TO 3140
3120 IF cm1=1 THEN w#mark LN x,os,"E"+STR$ INT (LN cm2/110+.1)
    ? IF (doo=1 AND cm1=4) OR (doo=2 AND (cm1=2 OR cm1=3)) OR (doo=3) THEN w#
mark LN x,os,STR$ cm1
    ?w#mark LN x,os
3130 LET cm1=cm1+1+10*(dxo-1)
3140 LET x=FN v(cm1,10)*cm2
3150 ?
3160 ?0
    GO TO 3340
3170 LET lmax=LEN STR$ INT xmax
    IF LEN STR$ INT xmin>lmax THEN LET lmax=LEN STR$ INT xmin
3180 LET lmax=lmax-1
    LET dx=INT (LN (xmax-xmin)/110)-1
    dexP dx
3190 LET dx1=INT ((xmax-xmin)/dx)
3200 DATA 55,5,25,2,0,1
    210 RESTORE 3200
    s_P dx1,dxP
    LET dx=dxP*dx
    LET x=-INT (-xmin/dx)*dx
3220 LET dx1=INT ((xmax-x)/dx)
3230 DATA 26,10,9,5,5,2,0,1
    240 RESTORE 3230
    s_P dx1,dxP
    LET dxo=dxP*dx
    250 LET ldxo=-INT (-LN dxo/110)
    LET dxP=(-ldxo-2)
    dexP dxP
    LET doo=INT (dxo*dxP)/dxP
    LET doo=-INT (-x/dxo+1e-4*dx)*dxo
3260 IF (ex=1e38) AND ((ldxo<-2 OR lmax>2 OR lmax-ldxo>2)) THEN LET ex=dxP/100
    LET xmin=xmin*ex
    LET xmax=xmax*ex
    GO TO 3030
    270 IF (NOT m0) AND lmax-ldxo>2 THEN LET m0=INT (x*dxP)/dxP
    LET xmax=xmax-m0
    LET xmin=xmin-m0
    GO TO 3030
3280 IF ex=1e38 THEN LET ex=1
3290 IF m0 OR ex=1 THEN LET o$=o$+" (" +STR$ (m0/ex)+"+xE"+STR$ INT (-LN ex/110+
5)+")"
3300 ??x<=xmax+1e-4*dx
3310 IF ABS (x-doo)<1e-4*dx THEN w#mark (m0+x)/ex,os,STR$ doo
    LET doo=x+dxo
    IF ABS doo<1e-6 THEN LET doo=0
    ?
    ?w#mark (m0+x)/ex,os
3320 LET x=x+dx
3330 ?
3340 ?
3350 ?s_P x,?y
    ?xx
    ?
    READ y,x,y
    ??xx<=x

```

```

?
3360 ?dexP rX
3370 ?x$
    IF x>=0 THEN
        LET x$=FN s$(x,"0")
        LET x$="1"+x$
    ?
        LET x$=FN s$(-x-1,"0")
        LET x$="0."+x$+"1"
3380 LET x=VAL x$
3390 ?
3400 ?w#mark x,os,x$
410 ?xx,yy
    ?x$=""
3420 IF os=1 THEN
    LET xx=FN j(x),yy=wyl
    PLOT xx,yy
    DRAW 0,-(1+(x$<>""))
    ?
    LET xx=wx1,yy=FN k(x)
    PLOT xx,yy
    DRAW -(1+(x$<>"")),0
3430 IF x$<>" " THEN
    IF os=1 THEN
        PLOT ?4,7; OVER 2;xx-2*LEN x$,wyl-5;x$
    ?
        PLOT ?4,7; OVER 2;wx1-4*LEN x$,3,yy+3;x$
440 ?
3450 ?wskres xmin,xmax,ymin,ymax,x$,y$,xlo9,ylo9,Pos
3460 ?x$="" ,y$="" ,xlo9=0,ylo9=0,Pos=1
470 CLS
3480 LET wx1=25,wxh=250
    LET wy1=10,wyh=163
490 LET wxmin=xmin,wxmax=xmax
    LET wymin=ymin,wymax=ymax
    LET wxlo9=xlo9,wylo9=ylo9
    LET wfirstp=1
3500 IF xlo9 THEN
    LET wxmin=LN wxmin
    LET wxmax=LN wxmax
3510 IF ylo9 THEN
    LET wymin=LN wymin
    LET wymax=LN wymax
3520 DEF FN j(x)=wx1+(x-wxmin)*(wxh-wx1)/(wxmax-wxmin)
3530 DEF FN k(y)=wy1+(y-wymin)*(wyh-wy1)/(wymax-wymin)
3540 w#oPis xmin,xmax,1,xlo9,x$
    w#oPis ymin,ymax,2,ylo9,y$
3550 PLOT wx1,wyh
    DRAW 0,-(wyh-wy1)
    DRAW (wxh-wx1),0
3560 PLOT ?4,7;0,175,y$
    PLOT ?4,7;4*(32+(29-LEN x$)/2),(175 AND Pos);x$
3570 ?
3580 ?mark x,y,r,l
3590 ?k,x$
    ?r=1,l=0
3600 IF wxlo9 THEN LET x=LN x
3610 IF wylo9 THEN LET y=LN y
3620 IF x<wxmin OR x>wxmax OR y<wymin OR y>wymax THEN GO TO 3730
3630 LET x=FN j(x)
    LET y=FN k(y)
3640 DATA "GG"
3650 DATA "FGGHHGGF"
3660 DATA "FFGHHF"
3670 DATA "FHGFHH"
3680 DATA "FHHHHFFF"
3690 DATA "FHHHHFFFG"
3700

```

```
RESTORE 3640
RESTORE 3650
RESTORE 3660
RESTORE 3670
RESTORE 3680
RESTORE 3690
3710 IF 1 THEN
    IF NOT wfirstp THEN DRAW TO x,y
3720 LET x=x-CODE "G"
    LET y=y-CODE "G"
    READ x$
    FOR k=1 TO LEN x$ STEP 2
        PLOT x+CODE x$(k),y+CODE x$(k+1)
    NEXT k
    LET wfirstp=0
    IF 1 THEN PLOT x+CODE "G",y+CODE "G"
730 "
```


LITERATURA

- [1] Штоф В.: Моделирование и философия, Изд. "Наука", Москва - Ленинград 1966.
- [2] Тарский А.: Введение в логику и методологию дедуктивных наук. И.Л. Москва 1948.
- [3] Wojnarowski J.: Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych, Inst. PKM Pol. Śl., PTMTS Oddział Gliwice, Gliwice 1977.
- [4] Wojnarowski J.: Zastosowanie grafów w analizie drgań układów mechanicznych. PWN, Warszawa-Wrocław 1981.
- [5] Findensein W., Gutenbaum J.: Modele w analizie systemowej, [w:] Analiza systemowa - Podstawy i metodologia. PWN, Warszawa 1985, ss. 292-396.
- [6] Jr. Cannon R.H.: Dynamika układów fizycznych (Dynamics of physical systems). WNT, Warszawa 1973.
- [7] Pr. zbiorowa: Szkoła podstaw inżynierii systemów: Szefostwo Badań i Rozwoju Techniki Wojskowej, Komitet Budowy Maszyn PAN, MON, Orzysz 1976.
- [8] Szucs E.: Modelowanie matematyczne w fizyce i technice. WNT, Warszawa 1977 (tłum. z j. węgierskiego).
- [9] Kochenburger R.J.: Modelowanie układów dynamicznych przy użyciu maszyn matematycznych (Computer simulation of dynamical systems). WNT, Warszawa 1975.
- [10] Zorski H. (red.): Mechanika techniczna - podstawy mechaniki. PWN, Warszawa 1985.
- [11] Jakubowski R., Kasprzak A.: Application of fuzzy programs to design of machining technology, Bull de L'Academie Polonaise des Sciences, Serie des Sciences Technique, Vol XXI, No 1, 1973, ss. 17-22.
- [12] Colin B. Brown.: A fuzzy safety measure; Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol 105, No EM 5, October 1979, ss. 855-872.
- [13] Blocley D.I.: Predicting the likelihood of structural accidents; Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2, Vol 59, London 1975, ss. 659-705.
- [14] Czogała E., Pedrycz W., Wojnarowski J.: Próba wielokryterialnego wyboru sztucznej zastawki, Materiały V Krajowej Konferencji Naukowo-Szkoleniowej PAN, Instytut Biocybernetyki i Inżynierii Biomedycznej, Warszawa 1981, ss. 177-179.
- [15] Sarna M.: Adekwatność modelowania matematycznego technicznych systemów mechanicznych w języku teorii zbiorów rozmytych, ZN Pol. Łódzkiej Nr 412, Rozprawy Naukowe z. 48, 1982.
- [16] Cholęwa W.: Metoda diagnozowania maszyn z zastosowaniem zbiorów rozmytych, ZN Pol. Śląska, Nr 764, Gliwice 1983.
- [17] Sarna M.: Fuzzy relation on fuzzy and non-fuzzy numbers - fast computational formulae, Fuzzy Sets and Systems 1 (1989), pp. 155-163.
- [18] Woźniak Cz.: On the fuzzy form of the balance equations, Bull. of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, Vol. 33, No 1-2, 1985, pp. 7-12.
- [19] Klem P., Woźniak Cz.: On the fuzzy description of the porous capillary materials, Bull. of the Polish Academy of Sciences, Vol 33, No 1-2, 1985, pp. 7-12.

- [20] Woźniak Cz.: Tolerancyjna interpretacja nieklasycznych zagadnień brzegowych liniowej teorii powłok, ZN Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu, II Konferencja Konstrukcja powłokowe, teoria i zastosowania, Opole 1982, ss. 293-296.
- [21] Badower A.: Rozmyte przedziały niezawodności konstrukcji, II Konferencja: Problemy Losowe w Mechanice Konstrukcji, Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, PTMTS - Oddział w Gdańsku, Pol. Gdańska - Wydż. Bud. Lądowego, Gdańsk, 15/16 Listopad 1985, ss. 7-13.
- [22] Dohnal M.: Fuzzy models in mechanical engineering, Strojnický Casopis, 37 (1986), 1, ss. 29-41 (w j. czeskim).
- [23] Kubiński T.: Nazwy nieostre, Studia Logica, T. VII, 1959, ss.115-179.
- [24] Zadeh L.A.: Fuzzy sets, Information and Control, Vol. 8, No 3, June 1965, pp. 338-353.
- [25] Kandel A., Yager R.R.: A bibliography of fuzzy sets, their applications and related topics. In book: Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications, ed. by Madan M. Gupta, North - Holland Publishing Company, Amsterdam - New York - Oxford 1979.
- [26] Heller M., Lubański M., Ślaga S.W.: Zagadnienia filozoficzne współczesnej nauki, Wstęp do filozofii przyrody, Akademia Teologii Katolickiej, Warszawa 1980.
- [27] Czogała E., Pedrycz W., Wojnarowski J.: Multicriterial aspects of optimal choice of alternatives, Reports Department of Mechanical Engineering the University of Alberta, 1981.
- [28] Woźniak Cz.: Tolerance and fuzziness in problems of mechanics, Arch. Mech., Vol. 35, Issue 5-6, 1983, pp. 567-578.
- [29] Sarna M.: Fuzzy sets in adequacy description of mathematical models of mechanical systems, Mech. Teoret. i Stos. 1/2, 22, (1984), ss. 299-311.
- [30] Sarna M.: Evaluations of the adequacy of relational emirical systems, Journal of the Franklin Institute, Vol. 322, No 5/6, Nov/Dec 1986, pp. 325-334.
- [31] Terano T., Teukamoto Y.....: Diagnosis of engine trouble by fuzzy logic, IFAC, Helsinki 1978, pp. 1390-1395.
- [32] Knosala R., Pedrycz W.: Cluster analysis of fuzzy classification in design methods, Proceedings of International Conference on Engineering Design, Hamburg 1985, Edition Heurista, Zurich, 1985, pp. 66-72.
- [33] Knosala R., Pedrycz W.: Multicriteria design problem - fuzzy set approach, Proceedings of International Conference on Engineering Design, Boston 1987, Edition Heurista, Zurich, 1987, pp. 121-129.
- [34] Kaufman A.: Introduction a la theorie des sous - ensembles flows, 1: Elements tehoretiques de base, Masson Et CIE, Paris 1973.
- [35] Kaufman A.: Introduction a la theorie des sous - ensembles flows, 2: Application a la linguistique et a la semantique, Masson Et CIE, Paris 1975.
- [36] Kaufman A.: Introduction a la theorie des sous - ensembles flows 3: Applications a la classification et la reconnaissance des formes, aux automates et aux systems, aix choix des critares, Masson Et CIE, Paris 1975.
- [37] Kaufman A.: Introduction to the theory of fuzzy subsets, Vol. 1, Acad. Press, New York 1975.
- [38] Dubois D., Prade H.: Fuzzy sets and systems, Theory and applications, Academic Press, New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco 1980.

- [39] Negoita C.V., Relescu D.A.: Applications of fuzzy sets to system analysis, Birkhauser Verlag, Bessel und Stuttgart, 1975.
- [40] Drewniak J.: Podstawy teorii zbiorów rozmytych. Skrypty Uniw. Śląskiego nr 347, Katowice 1984.
- [41] Czogała E., Pedrycz W.: Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych. PWN, Warszawa 1985.
- [42] Kacprzyk J.: Zbiory rozmyte w analizie systemowej. PWN, Warszawa 1986.
- [43] Wójcicki R.: Wykłady z metodologii nauk. PWN, Warszawa 1982.
- [44] Немура А. (ред): Идентификация динамических систем, Изд. "Минтис", Вильно 1974.
- [45] Биркман М.Ц., Кристинков Д.Ц.: Аналитическая идентификация динамических систем, Рига 1974.
- [46] Mańczak K.: Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania. WNT, Warszawa 1971.
- [47] Ociessa Z.: O doborze kryteriów identyfikacji, Modele Matematyczne i Identyfikacja Procesów, Ossolineum, Wrocław - Warszawa - Gdańsk 1972, ss. 168-181.
- [48] Kacprzyński B.: Problem doboru kryterium optymalności planowania eksperymentu tworzenia matematycznych modeli obiektów. Modele Matematyczne i Identyfikacja Procesów, Ossolineum, Wrocław - Warszawa - Kraków - Gdańsk 1972, ss. 105-139.
- [49] Wajs K.: Modelowanie i identyfikacja. Niektóre Elementy Podstaw Inżynierii Systemów, Pol. Poznańska 1977
- [50] Eykhoff P.: Identyfikacja w układach dynamicznych. PWN, Warszawa 1974.
- [51] Ziemba S., Skowroński J.M.: Abstract machine applied for physical systems, Bull. Acad. Polon. Sci. Serie Sci. Tech. 15, No 1, 1967, ss. 1-7.
- [52] Kaliski S. (red.): Drgania i fale w ciałach stałych. PWN, Warszawa 1966.
- [53] Osiecki J.: Elementy modelowania w dynamice maszyn, Dynamika Maszyn. Ossolineum 1974, ss. 12-18.
- [54] Osiecki J.: The construction of discrete vibrating model and the existence of weak couplings in the practical analysis of machine dynamics, Nonlinear Vibration Problems 10, 1969, pp. 173-184.
- [55] Skowroński J.M., Ziemba S.: Certain properties of mechanical model of structures, Arch. Mech. Stos., XI, 2, 1959, ss. 193-209.
- [56] Muszyńska A.: O pewnych zagadnieniach związanych z modelowaniem układów mechanicznych, Zagadnienia Drganí Nieliniowych. PWN, Warszawa 1968, ss. 97-109.
- [57] Müller L.: Teoria podobieństwa mechanicznego. PWN, Warszawa 1961.
- [58] Olson H.P.: Dynamical analogies. Princeton 1958.
- [59] Sobczyk K.: Metody dynamiki statystycznej. PWN, Warszawa 1977.
- [60] Karwowski W., Mital A.: Potential applications of fuzzy sets in industrial safety engineering, Fuzzy Sets and Systems 19 (1986), pp. 105-120.
- [61] Gawroński W., Kruszewski J.: Analiza drgań wymuszonych złożonych układów metodą sztywnych elementów skończonych, Arch. Bud. Maszyn T. XIX, 4, 1972, ss. 623-641.
- [62] Popper K.R.: Logika odkrycia naukowego. PWN, Warszawa 1977.
- [63] Marciszewski W.: Metody analizy tekstu naukowego. PWN, Warszawa 1977.
- [64] Pawłowski T.: Tworzenie pojęć i definiowanie w naukach humanistycznych. PWN, Warszawa 1978.

- [65] Prugovecki E.: Fuzzy sets in the theory of measurement of incompatible observables, *Found. Phys.* 4, (1974), pp. 9-16.
- [66] Prugovecki E.: Measurement in quantum mechanics as a stochastic process on space of fuzzy events, *Found. Phys.* 5, (1975), pp.557-571.
- [67] Prugovecki E.: Localizability of relativistic particles in fuzzy phase space, *J. Phys. A. Math. Gen.* 9, No 11, (1976), pp. 1851-1859.
- [68] Domańska A.: Foundations of the theory of measurement in the fuzzy set theory approach, *Proc. of the Polish Symposium on Interval and Fuzzy Mathematics*, Inst. of Math. Tech. Univ. of Poznań, Poznań 1985, pp. 63-70.
- [69] Rozkrut A.: A fuzzy approach to the general measurement theory, *Proc. of the Polish Symposium on Interval and Fuzzy Mathematics*, Inst. of Math. Tech. Univ. of Poznań, Poznań 1985, pp. 203-207.
- [70] Rozkrut A.: Fuzzy relations in the theory of measurement uncertainty, *Polish Symposium of Interval and Fuzzy Mathematics*, Inst. of Math. Tech. Univ. of Poznań, Poznań 1986, (Proc. in print).
- [71] Civanlar M.R., Trussel H.J.: Construction membership functions using statistical data, *Fuzzy Sets and Systems* 18 (1986), pp. 1-13.
- [72] Szydłowski J.: *Teoria pomiarów*. PWN, Warszawa 1981.
- [73] Piotrowski J.: *Teoria pomiarów*. PWN, Warszawa 1986.
- [74] Ostasiewicz W.: O rachunku liczb nieprecyzyjnych, *Mat. Stos.* XV, 1979, ss. 47-60.
- [75] Dubois D., Prade H.: Operations on fuzzy numbers, *Int. J. Syst. Sci.*, Vol. 9, No 6, 1978, pp. 613-626.
- [76] Dubois D., Prade H.: Fuzzy real algebra: some results, *Fuzzy Sets and Systems* 2 (1979), pp. 327-348.
- [77] Chang C.L.: Interpretation and execution of fuzzy programs, in: *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes* (Zadeh L.A., ..., eds, Acad. Press, New York 1975), pp. 191-218.
- [78] Zadeh L.A.: A fuzzy set theoretic interpretation of linguistic hedges, *J. Cybern.*, 2, No 3, 1972, pp. 4-34.
- [79] Sarna M.: Oceny adekwatności modeli matematycznych technicznych systemów mechanicznych w oparciu o rozmytą miarę zbioru rozmytego, *ZN Pol. Łódzkiej*, Nr 472, *Mechanika z.* 71, 1986.
- [80] Sugeno M.: Fuzzy measures and fuzzy integrals, a survey in book: *Fuzzy Automata and Decision Processes*, North-Holland, New York 1977, pp. 89-102.
- [81] Sugeno M.: *Theory of fuzzy integrals and its applications*, Ph. D. Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.
- [82] Sarna M.: *Dynamika elektrod zbiorczych elektrofiltrów*, Praca doktorska, Instytut Podstawowych Problemów Techniki, PAN, Warszawa 1971.
- [83] Sarna M.: Optimization problem of induction to electrostatic precipitator collection electrodes, *Staub - Reinhalt Luft*, No 10, 1975, ss. 369-371.
- [84] Sarna M.: Analiza i synteza dyskretno-ciągłego układu mechanicznego, *Rozprawy Inżynierskie* 24, 1, 1976, ss. 149-160.
- [85] Sarna M., Wojnarowski J.: Fuzzy models in mechanics, *Strojnický časopis*, (in print).
- [86] Sarna M.: Determination of an electrostatic precipitator efficiency - a fuzzy sets theory approach, *Staub - Reinhalt Luft*, 49 (1989).

ZASTOSOWANIE ZBIORÓW ROZMYTYCH
W MODELOWANIU UKŁADÓW MECHANICZNYCH

S t r e s z c z e n i e

W pracy przedstawiono analizę adekwatności modeli matematycznych z zastosowaniem w układach mechanicznych. Model matematyczny jak i modelowany obiekt traktowano jako systemy relacyjne (idealny, rzeczywisty), dla których wyróżniono systemy zastępcze. Na bazie rodziny systemów relacyjnych (idealny, rzeczywisty, zastępcze) wykazano nieostrość problemu adekwatności modelu matematycznego i dla jego formalnego ujęcia zaproponowano metodę wykorzystującą elementy teorii zbiorów rozmytych. Dane pomiaru uzyskane na modelowanym obiekcie jak i dane numeryczne uzyskane z modelu matematycznego interpretowano jako liczby i przedziały rozmyte oraz liczby i przedziały "ostro". "Relacja adekwatności" modelu matematycznego stanowiła binarną rozmytą relację utworzoną na liczbach i przedziałach rozmytych i ostrych. Opracowano sekwencyjną procedurę wyznaczania adekwatności modeli matematycznych jako realizację celu modelu. W metodzie tej w sposób formalny uwzględniono "zakres" modelu matematycznego oraz subiektywne czynniki w jego ocenie. Wykazano zbieżność proponowanej procedury do jednoznacznych ocen modelu. Wyprowadzono wzory szybkich obliczeń, które ułatwiają zastosowanie metody w praktyce. Proponowana metoda posiada znaczenie poznawcze, a w przypadku złożonych układów mechanicznych wyraźną użyteczność praktyczną. Końcowy przykład ilustruje jej zastosowanie.

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗМЫТЫХ МНОЖЕСТВ В МОДЕЛИРОВАНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В работе представлен анализ адекватности математических моделей для применения в механических конструкторских системах. Математическая модель как и моделируемый объект рассмотрено как реляционные системы (идеальная и вещественная), для которых выделены заменяющие системы.

На основании классов реляционных систем (идеальной, вещественной, заменяющей) доказано нечёткость проблемы адекватности математической модели и для её формального представления предложен метод, использующий элементы теории размытых множеств. Данные, полученные из измерений моделируемого объекта, как и числовые данные, полученные при помощи математических моделей представлены как числа и размытые интервалы и как числа и "чёткие" интервалы.

Соотношение адекватности математической модели представляет собой бинарное размытое соотношение, образованное из чисел и размытых и чётких интервалов. Обработана секвенционная процедура определения адекватности математических моделей как реализация цели модели

В этом методе формальным образом учтена "область" математической модели и субъективные факторы для её оценки.

Доказана сходимость предлагаемой процедуры для однозначной оценки модели. Выведены формулы быстрых вычислений, которые облегчают практическое использование метода.

Предлагаемый метод имеет познавательное значение, а в случае сложных механических систем бесспорную практическую полезность. Последний пример иллюстрирует его применение.

A FUZZY SETS THEORY APPLICATIONS IN MATHEMATICAL MODELLING
OF MECHANICAL SYSTEMS

S u m m a r y

The paper presents an analysis of adequacy of mathematical models that is applied for mechanical systems. The mathematical model as well as a modelled physical object are considered as relational systems (ideal and real) for which are introduced a replacement systems. Having as a base the family of relational systems (ideal, real and replacement systems) a fuzziness of the adequacy problem of mathematical models is shown and for description in a formal way of that the method of fuzzy sets theory is proposed. An empirical data - a result of measurement operations on modelled object and a numerical data obtained with mathematical model are represented by fuzzy numbers, fuzzy intervals, crisp numbers and crisp intervals. A binary fuzzy relation on fuzzy, crisp numbers and intervals is constituted as an adequacy relation. There is elaborated a sequence procedure for the mathematical models adequacy estimation in regard as a realization of a goal of the model. In the sequence procedure a "scope" of the mathematical model and a subjective elements in the adequacy estimation are taken into account. It is shown that the sequence procedure is convergent to dichotomous estimations of adequacy. A practical application of this method is simplified owing to proved a fast computation formulas. The proposed method has some cognitive meaning while for complicated mechanical arrangement is markedly advantageous in practical. The final example illustrates a bringing of the method into practice.

**WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
MOŻNA NABYC W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:**

- 44-100 Gliwice — Księgarnia nr 098, ul. Konstytucji 14 b
44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 33
40-098 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
41-900 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
41-500 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 23
41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 081, ul. ZBoWiD-u 2
47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
41-800 Zabrze — Księgarnia nr 230, ul. Wolności 288
00-901 Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN —
Pałac Kultury i Nauki
Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę
Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9. *