ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1968

Seria: MECHANIKA z. 36 Nr kol. 233

ANDRZEJ TYLIKOWSKI, ERNEST CZOGAŁA
Katedra Dynamiki Układów Mechanicznych

PŁYTA PIERŚCIENIOWA OBCIĄŻONA NA BRZEGU MOMENTEM

Streszczenie. W pracy zajęto się wyznaczeniem przemieszczeń sprężystej izotropowej cienkiej płyty pierścieniowej. Przyjęto następujące warunki brzegowe. Na brzegu wewnętrznym płyta jest sztywno utwierdzona, na zewnętrznym zamocowana przegubowo. Zewnętrzny brzeg płyty obciążono momentem. Rozwiązano zagadnienie prowadzące do wyznaczenia funkcji wpływu. Na podstawie zależności wyprowadzonych w części teoretycznej pracy ułożono program obliczeń na elektroniczną maszynę cyfrową GIER w języku GIER-ALGOL. Program ten z racji swej ogólności służyć może do obliczeń wytrzymałościowych płyt pierścieniowych o różnorodnych wymiarach i wykonanych z dowolnego materiału. W przykładzie rozpatrzono przypadek obciążenia konturu płyty momentem skupionym.

1. Zagadnienie ugięcia płyty pod wpływem momentu obciążającego brzeg

Podstawą rozważań jest teoria cienkich płyt izotropowych [1]. Zewnętrzny brzeg płyty pierścieniowej, podparty przegubowo, obciążony jest momentem zginającym, którego wektor jest styczny do konturu. Brzeg wewnętrzny jest sztywno zamocowany. Ze względu na geometrię zagadnienia wprowadzono układ współrzędnych biegunowych r, φ.

Równanie równowagi płyty przyjęto w postaci [1]

$$\Delta\Delta y = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi^2}\right)^2 y = 0. \tag{1}$$

Zamocowanie płyty wymaga spełnienia kilku warunków brzegowych. Na brzegu wewnętrznym (sztywne utwierdzenie)

$$y_{r=b} = 0, \tag{2a}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)_{r=b} = 0; \tag{2b}$$

na brzegu zewnętrznym (zamocowanie przegubowe)

$$y_{r=a} = 0, \tag{2c}$$

$$M_r = -D\left[\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\right)\right]_{r=a} = M(\varphi). \tag{2d}$$

Warunek (2d) reprezentuje równowagę sił wewnętrznych i zewnętrznego obciążenia na zewnętrznym konturze płyty. W równaniach powyższych przyjęto następujące oznaczenia:

y - przemieszczenie poprzeczne płyty,

M - zewnętrzny moment zginający,

M_r - moment zginający w płycie,

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - sztywność płyty na zginanie,

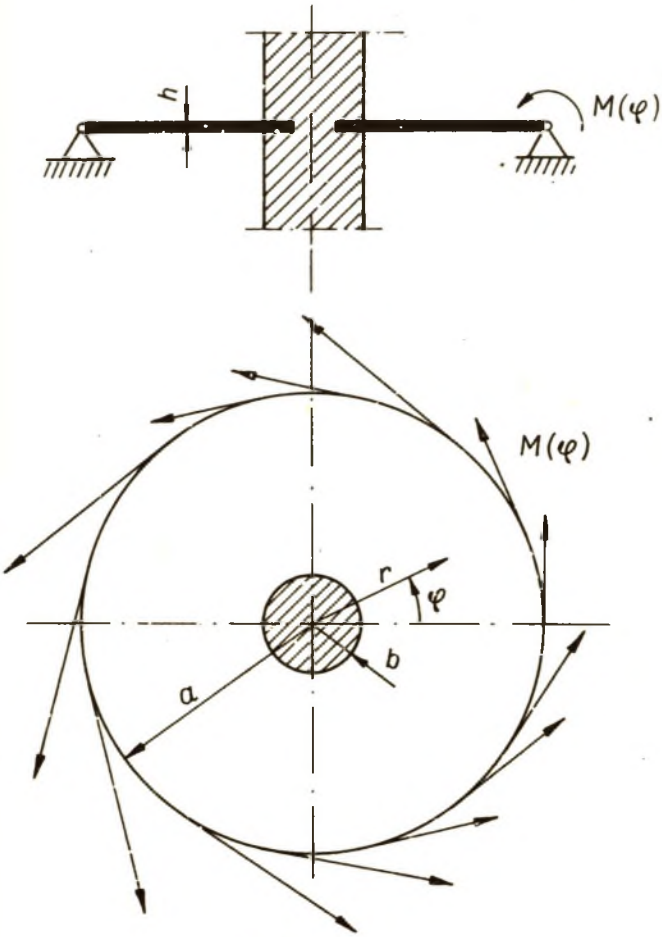
E - moduł Younga,

ν - ułamek Poissona,

a, b, h, - wymiary geometryczne płyty (rys. 1).

Ogólne rozwiązanie równania (1) ma postać [1]

$$y = R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} R_n'(r)\sin n\varphi. \tag{3}$$



Rys. 1

Wstępnie założono, że moment zewnętrzny jest funkcją parzystą względem kąta φ. W dalszej części pracy uwolniono się od tego założenia obliczając funkcję wpływu. Ze względu na parzystość obciążenia można je rozwinąć w szereg kosinusów

$$M(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n M_n \cos n\varphi, \tag{4}$$

gdzie:

$$\lambda_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 0 \\ 1 & n \geqslant 1 \end{cases}$$

oraz

$$M_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} M(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi. \tag{5}$$

Rozwiązanie będzie również funkcją parzystą względem kąta φ, czyli

$$y = \frac{1}{2} R_o(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cos n\varphi, \tag{3a}$$

gdzie:

$$R_o(r) = A_o + B_o r^2 + C_o \ln r \quad D_o r^2 \ln r \tag{6}$$

$$R_1(r) = A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r \tag{7}$$

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n} + C_n r^{n+2} + D_n r^{-n+2}, \quad n > 1 \tag{8}$$

Stałe A_n, B_n, C_n, D_n ($n=0, 1, 2, 3, \ldots n$) określamy na podstawie warunków brzegowych (2). Każdy z warunków 2a ÷ 2d rozpada się na nieskończenie wiele równań, przez porównanie współczynników odpowiednich wyrazów szeregów. Otrzymujemy w ten sposób 3 układy równań ($n=0$, $n=1$, $n > 1$) o czterech niewiadomych każdy. Poniżej przytaczamy jedynie ostateczne rozwiązania.

$$R_o(r) = \frac{M_o}{DW_o} \left\{ 2 \ln \frac{a}{b} \ln \frac{r}{b}(a^2 - r^2) + \left(\frac{a^2 - b^2}{b^2}\right) \ln \frac{r}{a}(r^2 - b^2) \right\}, \tag{6a}$$

gdzie:

$$W_o = \left\{ \ln\frac{a}{b}\left[(1+\nu)\ln\frac{a}{b} + 2\right] - (a^2-b^2)\left(\frac{1-\nu}{a^2} + \frac{3+\nu}{b^2}\right)\right\},$$

$$R_1(r) = \frac{M_1}{DW_1}\left\{\frac{r}{a}\left[\left(\frac{2a^2}{b}(a^2-3b^2) + 3b(a^2+b^2)\right)\ln\frac{r}{b} + \frac{a^2}{b}\left(b^2(8\ln\frac{a}{b} - 5) - a^2\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{r}\,b\left[a^2-b^2(5-2\ln\frac{a}{b})\right] - \left(\frac{r}{a}\right)^3\left[b^2 + \frac{a^2}{4}(2\ln\frac{a}{b} - 1)\right]\frac{a^2}{b}\right\}, \qquad (7a)$$

gdzie:

$$W_1 = 4b\left\{\ln\frac{a}{b}\left[\frac{a^2}{b^2}(3+\nu) + \frac{b^2}{a^2}(1-\nu)\right] + 2(1+\nu) - \nu\frac{b^2}{a^2} - \frac{a^2}{b^2}(2+\nu)\right\},$$

$$R_n(r) = \frac{M_n}{W_n D}\left\{r^n\left[(n+1)b^{-n+1}(a^{-2n+2}-b^{-2n+2}) - (a^2-b^2)b^{-3n+1} - \right.\right.$$

$$\left. - n(a^{-2n} - b^{-2n})b^{-n+3}\right] - r^{-n}\left[b^{n+1}(a^{-2n+2} - b^{-2n+2}) + \right.$$

$$\left. + (n-1)b^{-n+1}(a^2-b^2)\right] - r^{n+2}\left[nb^{-n-1}(a^{-2n+2} - b^{-2n+2}) + \right.$$

$$\left. + (a^{-2n} - b^{-2n})(1-n)b^{-n+1}\right] + r^{-n-2}\left[nb^{-n-1}(a^2-b^2) + \right.$$

$$\left.\left. + b^{n+1}(a^{-2n} - b^{-2n})\right]\right\}, \qquad (8a)$$

gdzie:

$$W_n = \begin{vmatrix} -nb^{-n-1} & b^{n+1} & (1-n)b^{-n+1} \\ a^{-2n}-b^{-2n} & a^2-b^2 & a^{-2n+2}-b^{-2n+2} \\ n(1-\nu)a^{-n-2} & (2n+1+\nu)a^n & -(n-1)(1-\nu)a^{-n} \end{vmatrix}$$

Wprowadzając funkcje $K_o(r)$, $K_1(r)$, $K_n(r)$ przy pomocy związków

$$R_o(r) = M_o K_o(r), \tag{6b}$$

$$R_1(r) = M_1 K_1(r), \tag{7b}$$

$$R_n(r) = M_n K_n(r), \quad n > 1, \tag{8b}$$

równanie (3a) przyjmie postać

$$y(r,\varphi) = \sum_{n=o}^{\infty} \lambda_n K_n(r) M_n \cos n\varphi. \tag{9}$$

Rozważania przeprowadzone powyżej są ważne dla parzystego momentu obciążającego. Dla wyznaczenia przemieszczeń przy dowolnej postaci momentu $M(\varphi)$ należy wyznaczyć funkcję wpływu. W tym celu obciążamy płytę momentem skupionym w punkcie $\varphi = \pi$, czyli

$$M^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{2a}\delta(\varphi-\pi), \tag{10}$$

(δ - dystrybucja Diraca). Korzystając z równ. (5) wyznaczamy współczynniki rozwinięcia w szereg

$$M_n^{(1)} = \frac{1}{\pi a}\cos n\pi = \frac{(-1)^n}{\pi a}. \tag{11}$$

Wstawiając (11) do (9) otrzymujemy przemieszczenie płyty pod wpływem momentu jednostkowego

$$y^{(1)} = \frac{1}{\pi a}\sum_{n=o}^{\infty} \lambda_n (-1)^n K_n(r) \cos n\varphi. \tag{12}$$

Przenieśmy moment $M = 1$ z położenia $\varphi = \pi$ do położenia określonego współrzędną ψ. Zauważmy przy tym, że

$$\cos n(\pi + \varphi - \psi) = (-1)^n \cos n(\varphi - \pi). \tag{13}$$

Uwzględniając (13) i (12) wyznaczamy funkcję wpływu

$$y^{(1)}(r,\psi,\varphi) = \frac{1}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n K_n(r) \cos n(\varphi - \psi). \tag{14}$$

Przemieszczenie płyty pod wpływem dowolnego momentu $M(\psi)$ przyłożonego na brzegu płyty obliczamy za pomocą zależności

$$y(r,\varphi) = a \int_l y^{(1)}(r,\psi,\varphi)\, M(\psi) d\psi, \tag{15}$$

lub

$$y(r,\varphi) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n K_n(r) \int_0^{\psi_0} \cos n(\varphi - \psi)\, M(\psi) d\psi. \tag{15a}$$

Ze względu na fakt, że $M(\psi)$ jest zadana analitycznie lub tabelarycznie, obliczenie całki w (15a) jest możliwe przez kwadratury lub numerycznie. Korzystając z oznaczenia

$$F_n(\varphi) = \int_0^{\psi_0} \cos n(\varphi - \psi)\, M(\psi) d\psi, \tag{16}$$

wyrażenie (15a) przyjmie postać

$$y(r,\varphi) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n K_n(r) F_n(\varphi). \tag{17}$$

2. Program obliczeniowy

Wzór (17) stanowi punkt wyjścia dla ułożenia algorytmu i programu obliczeniowego na maszynę cyfrową GIER w języku GIER Algol III [3] rozwiązującego numerycznie postawione zagadnienie.

Dane wejściowe należy wprowadzić do maszyny w następującej kolejności: a, b, h, ν, E, ψ_0, S (liczba punktów obliczeniowych na obwodzie płyty), T (liczba punktów obliczeniowych na promieniu), v (liczba wskazująca wg jakiej metody oblicza się $F_n(\varphi)$, jeżeli v = 0 to użytkownik programu winien na podstawie znanego mu wzoru ułożyć odpowiedni fragment programu, jeżeli v = 1 to całkowanie odbywa się 10 punktową metodą Gaussa [2], a wartości momentu M[1] w odpowiednich punktach x obwodu płyty również należy umieścić na taśmie danych wejściowych).

begin comment Programme for computation of the displacements of the elastic isotropic thin ring-shaped plate loaded on the outline with a moment. On the data tape must be next numbers in the subsequent succesion:

a external radius of the plate,

b internal radius of the plate,

h thickness of the plate,

ni Poissons ratio,

E Youngs modulus,

psi angle of loading with an external moment,

S number of calculation points on the edge of the plate,

T number of calculation points on the radius.
Upper limit SxT following from the execution speed is equal 200;

v number choosing method of calculation Fn[j],
if v=0 then special block of the program evaluate Fn[j] on the basic of known theoretical formula, if v=1 necessary integration is done by a 10-points Gaussian

```
        quadrature in the interval 0-psi. In this case external
        moment must be known in 10-points of the external edge;
   M[1] Values of the moment in the points x=fi(psi = 0.01304673,
        0.06746831, 0.16029521, 0.28330230, 0.42556283, 0.57443716,
        0.71669769, 0.83970478, 0.93253168, 0.98695326;
real a, b, h, ni, E, R, k0, k1, k2, k3, k4, k5, k6, k7, k8, k9,
k10, k11, k12, r, psi, eps, w0, w1, w2, w3, w4;
integer i, j, l, m, n, p, S, T, v, w;
P: input (a, b, h, ni, E, psi, S, T, v);
begin
array y[1:S, 1:T], Fn[1:S], M[1:10], x,A[1:5];
integer array  Er[1:S, 1:T];
if v=1 then
  begin input (M); x[1]: = 0.01304673 x psi; x[2]: = 0.06746831 x
  x psi; x[3]: = 0.16029521 x psi; x[4]: = 0.28330230 x psi;
  x[5]: = 0.42556283 x psi; A[1]: = 0.03333567; A[2]: = 0.07472567;
  A[3]: = 0.10954318; A[4]: = 0.13463335; A[5]: = 0.14776211
  end;
for i=1 step 1 until S do
for j=1 step 1 until T do
  begin y[i,j]: = 0;
  Er[i,j]: = 1
  end;
k10 = ln(a/b); k9 = axa; k11 = bxb; k12 = k9 - k11; k4 = k9/k11;
k7 = 3 + ni; k6 = 1+ni; k5 = 1-ni; h = Exh 3/(12xk6xk5);
E = 6.2831854/S;  R = (a-b)/(T+1);
w0 = (k10x(k6xk10+2)-k12x(k5/k9+k7/k11))x2xh;
w1 = 4xbx(k10x(k4xk7+k5/k4)+2xk6-ni/k4-k4x(k6+1))xh;
k0 = 2xk9x(k9-3xk11)/b+3xbx(k9+k11);
k1 = k9x(k11x(8xk10-5)-k9)/b; k2 = bx(k9-k11x(5-2xk10));
k3 = (k11+k9x(2xk10-1)/4)xk9/b; ni=k5;
```

```
for n = 0, 1 do
  begin
  if v=0 then begin comment Block computing Fn[j] composed
                            by the user; ...
              end
  else
    begin
    for j=1 step 1 until S do
      begin r = 0; k5 = Exj;
      for l =1 step 1 until 5 do
    r = r+(cos(mx(k5-x[l]))xM[l]+ cos(mx(k5-psi+x[l]))
        xM[11-l])xA[l]; Fn[j] = r
     end
   end;
for i = 1 step 1 until T do
  begin r=b+Hxi; k5=r/b; k7=ln(k5); k8=rxr;
  k5=(2xk10xk7x(k9-k8)+k12xln(r/a)x(k5xk5-1))/w0;
  k8=r/a;
  if n=1 then k5=(k8x(k0xk7+k1)+k2/k8-k8↑3xk3)/w1;
  for j=1 step 1 until S do
  y[j,i]= y[j,i]+ k5xFn[j]
      end
   end;
k4=b; k6=a;
En: n=n+1; w=0; k4=k4xb; k6=k6xa; k5=b/k4; k7=a/k6;
    m=n+1; p=1-n; w0=-mxk5/k11; w1=bxk4; w2=pxk5;
    w3=1(k6xk6)-1/(k4xk4); w4=k7xk7-k6xk5;
    k1=w1xw4-k12xw2; k3=w0xk12-w3xw1; k2=w0xw4-w3xw2;
    k0=mxk5xw4-k12xk5↑3/k11-nxw3xk7xk11;
    w0=(mxnixk1/(k6xk9)-(2xm-ni)xk6xk2+pxnixk3/k6)xh;
```

```
if v=0 then begin comment Block computing Fn[j] composed
                                  by the user;
            end
else
for j=1 step 1 until S do
  begin r=0; k5=Exj;
  for l=1 step 1 until 5 do
  r=r+(cos(nx(k5-x[l]))xM[l]+cos(nx(k5-psi+x[l]))
        xM[11-l])xA[l]; Fn[j]=r
  end;
for i=1 step 1 until T do
  begin r=b+Rxi; k8=rxr; k7=rxn;
  k5=(k7xk0-k1/k7+k2xk8xk7+k3/(k8xk7))/w0;
  for j=1 step 1 until S do
    begin
    if Er[j,i] = 1 then
      begin eps=k5xFn[j]; y[j,i]=y[j,i]+eps;
      if eps <0.001 then Er[j,i]=0 else w=1
      end
    end
  end;
if w=1 then go to En;
for j=1 step 1 until S do
  begin r=exj; outtext(outcr, ‹‹fi =›› , output(‹n.ddd›,r),
  outcr); l=0;
  for i=1 step 1 until T do
    begin l=l+1; if l=7 then begin l=0; outcr end;
    output(‹-d.ddd10+d› ,y[j,i]/3.1415927, outsp(3))
    end
  end
end array;
```

```
  if kbon then go to P
end programme;
```

3. Przykład

Rozpatrzmy przypadek momentu skupionego na obwodzie płyty. Przyjmując początek układu współrzędnych w punkcie działania momentu, obciążenie zapisujemy w postaci

$$M(\psi) = \frac{1}{a} M_o \delta(\psi).$$

Korzystając z równania (15a) i wykonując całkowanie, uzyskujemy wynik dla tej szczególnej postaci obciążenia

$$y(r,\varphi) = \frac{1}{\pi a} \sum_{n=o} \lambda_n K_n(r) \cos n\varphi.$$

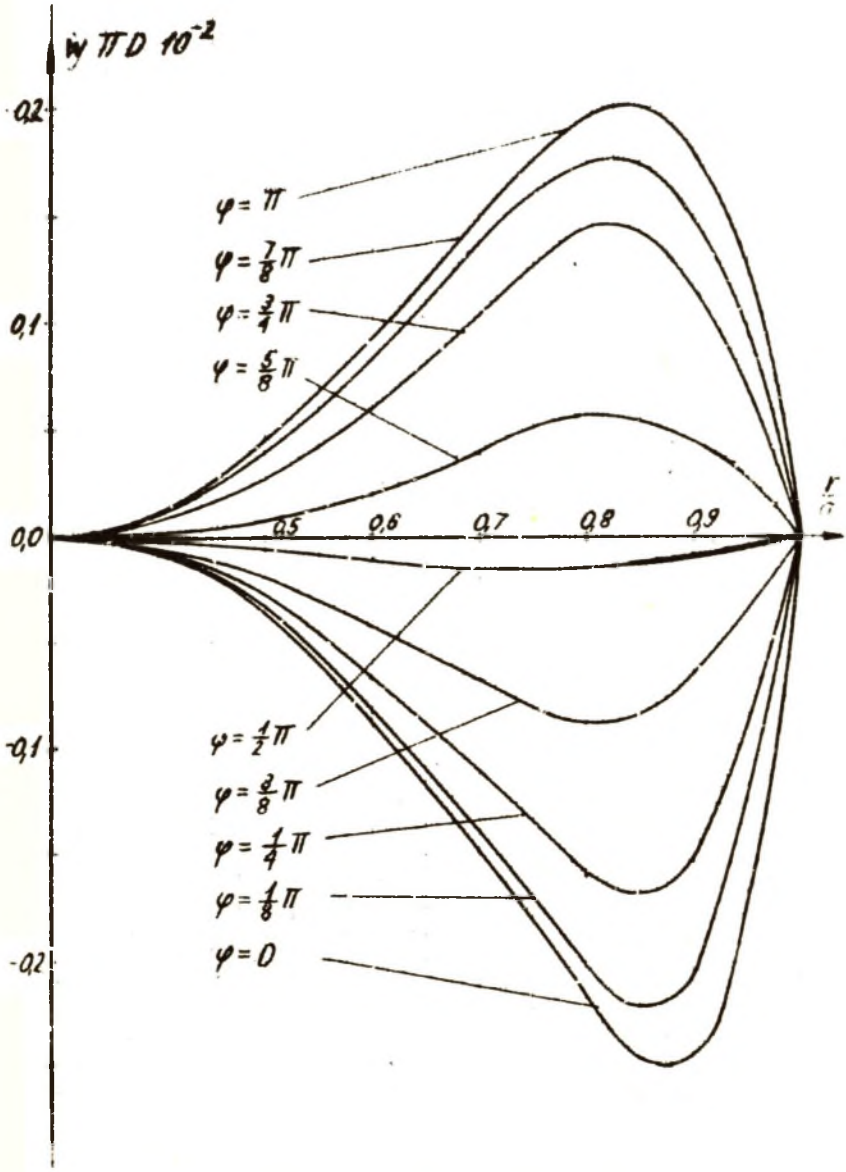
Porównując powyższe wyrażenie z (17) stwierdzamy, że $F_n(\varphi) = \cos n\varphi$, a zatem $v=0$ i część programu obliczająca $F_n(\varphi)$ ma następującą postać

```
begin for j=1 step 1 until S dc
Fn[j]=cos(nxjxE)
end;
```

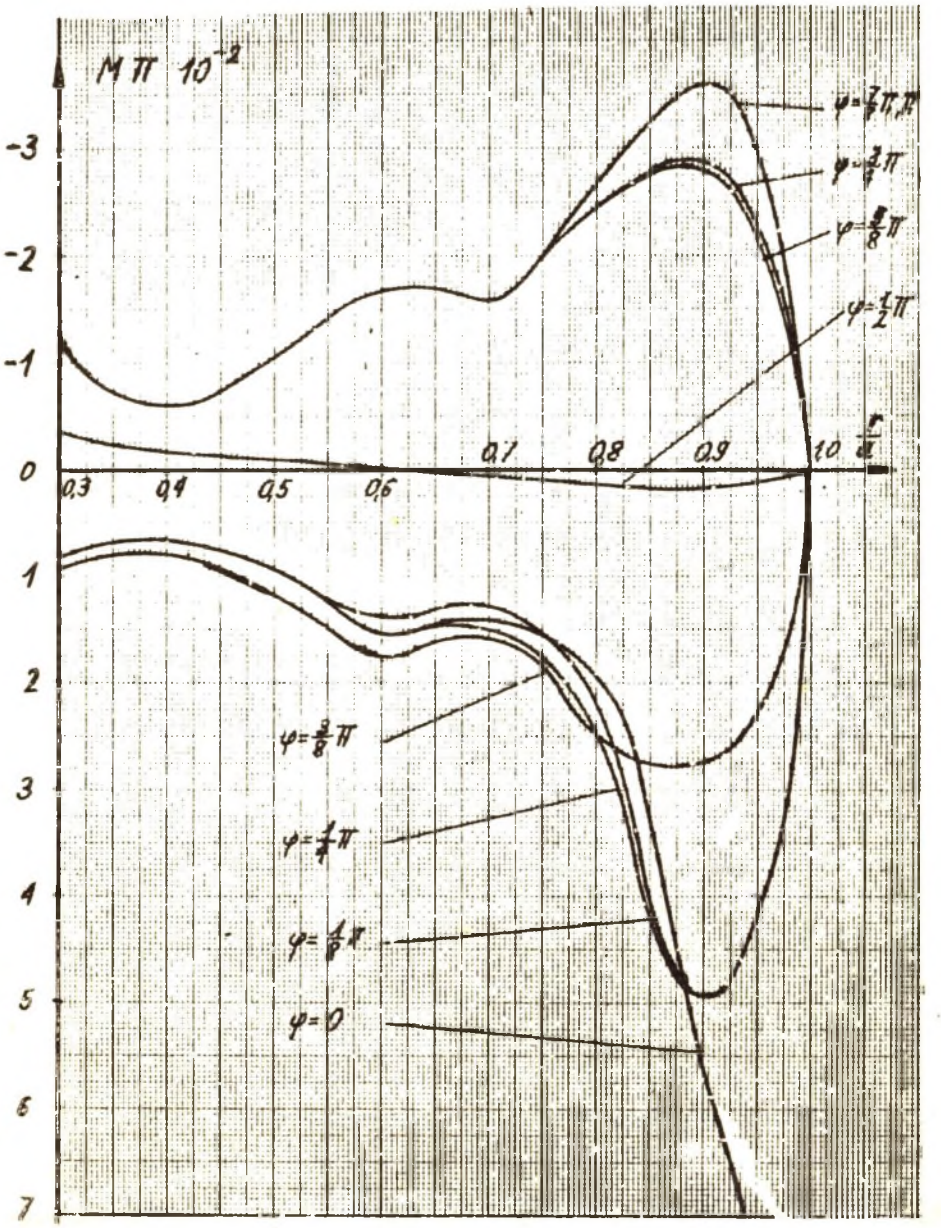
Do obliczeń przyjęto następujące wartości liczbowe $a=1$, $b=0.3$, $\nu=0.3$, $S=16$, $T=6$, h oraz E tak dobrano aby $D=1$. Przebieg odkształceń poprzecznych płaszczyzny środkowej płyty pokazuje rysunek 2.

Z punktu widzenia zastosowań inżynierskich bardziej interesujące są rozkłady sił i momentów wewnętrznych. Uzyskanie przebiegu tych wielkości na drodze czysto analitycznej jest bardzo trudne, np. momentu gnącego ze wzoru

$$M_r = -D\left[\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\right)\right],$$



Rys. 2. Wykres odkształceń poprzecznych płaszczyzny środkowej płyty $y(r,\varphi)$



Rys. 3. Rozkład momentu gnącego $M_p(r,\varphi)$

gdy różniczkowanie osłabia i tak już wolną zbieżność szeregów. W celu ominięcia tych trudności posłużono się graficznym różniczkowanie wykresu funkcji $y = y(r,\varphi)$. Wynik omówionego postępowania przedstawia rys. 3.

LITERATURA

[1] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger: Teoria płyt i powłok, Arkady, Warszawa 1966.

[2] Кронрод А.С.: Узлы и веса квадратурных формул, Наука Москва 1964.

[3] Naur P.(editor): Revised raport on the algorythmic language ALGOL 60 and a manual of GIER ALGOL III, Regnecentralen, Coperhagen, 1964.

КОЛЦЕОБРАЗНАЯ ПЛАСТИНКА НАХОДЯЩАЯСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МОМЕНТОВ РАЗПРЕДЕЛЕННЫХ ПО КОНТУРУ

Р е з ю м е

В работе обсуждено проблему перемещений упругой изотропной тонкой кольцеобразной пластинки. На внутреннем крае пластинка защемленная неподвижно, на внешнем свободно оперта. На внешний контур действуют распределенные моменты. Формулы полученные в теоретической части работы запрограммированы в языке GIER ALGOL на электроническую цифровую вычислительную машину GIER. Программа эта на основе своей общности полезна для расчета прочности кольцеобразных пластинок с произвольными размерами, сделаных из различных материалов.

RING - SHAPED PLATE LOADED ON THE OUTLINE WITH A MOMENT

S u m m a r y

The paper sets about doing calculations of the displacements of the elastic isotropic thin, ring shaped plate. On the internal edge the plate is rigidly fixed. On the external edge the plate is fixed jointly. The external edge is loaded with the distributed moment. On the basic of thecretical relations a program for electronic numerical computer GIER in GIER ALGOL is composed. This program can be used for strength calculations of different ring shaped plates. In the particular case a solution for an outline loading of plate with a moment is obtained.