ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1968

Seria: MECHANIKA z. 36 Nr kol. 233

ERNEST CZOGAŁA, ANDRZEJ TYLIKOWSKI
Katedra Dynamiki Układów Mechanicznych

ZAGADNIENIE QUASISTATYKI LEPKOSPRĘŻYSTEGO BĘBNA OBCIĄŻONEGO RUCHOMĄ SIŁĄ PROMIENIOWĄ

Streszczenie. W pracy niniejszej rozwiązano w przemieszczeniach problem quasistatyki lepkosprężystego bębna obciążonego ruchomą siłą promieniową. Modelem rozważań jest układ powłoka - tarcze. Rozwiązanie otrzymano ze stanu sprężystego przez analogię sprężysto-lepkosprężystą Lee--Alfrey'a [1], [2]. W obliczeniach uwzględniono wpływ sztywności tarcz na obroty brzegów powłoki. Przyjęto, że tarcze oddziaływują na płaszcz bębna tylko momentem zginającym i nie pozwalają na przemieszczenia promieniowe i styczne brzegu powłoki. Do obliczeń szczegółowych przyjęto model Voigta-Kelvina przy założeniu nieściśliwości. Rozpatrzono przypadek obciążenia bębna w postaci charakterystycznej dla współpracy bębna z liną.

1. Zagadnienie współpracy układu powłoka-tarcza

Pracę oparto na następujących założeniach:

1) Tarcza na obwodzie $\varrho = a$ zamocowana jest przegubowo (rys. 1),

2) Węzeł łączący powłokę z tarczą przyjęto jako sztywny,

3) Na obwodzie $\varrho = b$ tarcza jest sztywno zamocowana.

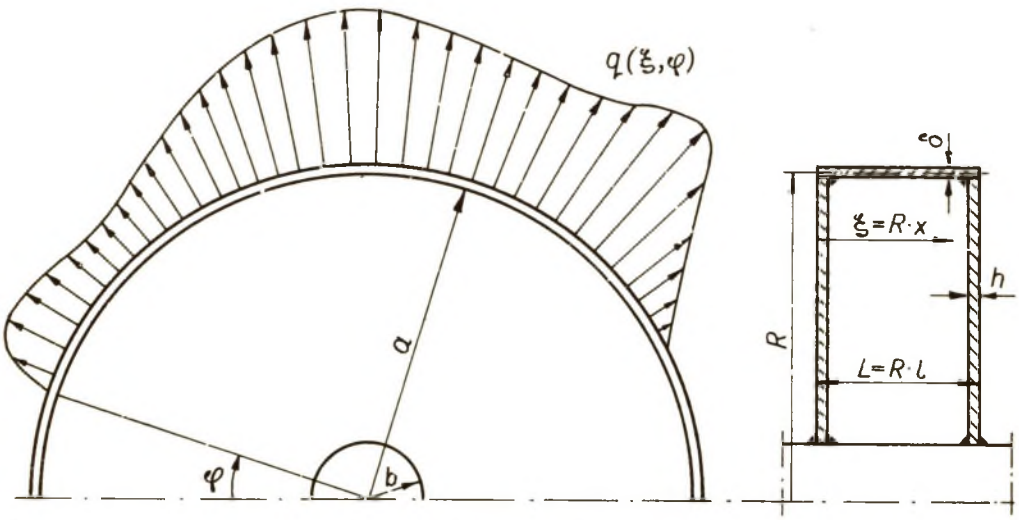
Punktem wyjścia są warunki nierozdzielności. Zgodność przemieszczań wymaga, aby na styku tarczy z powłoką zachodziła nierozdzielność obrotów

$$\frac{1}{R}\frac{\partial w(\xi,\varphi)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=x_j} = \Theta_j(\varphi)_{j=1,2}; \tag{1.1}$$

dla $x_1 = 0$ oraz $x_2 = l$,

gdzie:

$w(\xi,\varphi)$ jest przemieszczeniem promieniowym płaszcza bębna [3].



Rys. 1

Wyraża się ono wzorem

$$w(\xi,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{kn} B_{kn}\left[q_{kn} - \frac{2}{L}\sum_{j=1}^{2} M_{nj}\frac{k\pi}{L}\cos\frac{k\pi x_j}{l}\right]\sin\frac{k\pi\xi}{l}\cos n\varphi, \tag{1.2}$$

gdzie:

$$\lambda_{kn} = \lambda_n = \begin{cases}\frac{1}{2} & n = 0\\ 1 & n \geqslant 1;\end{cases}$$

$$B_{kn} = R^2\frac{1-\nu^2}{E\delta}\cdot\frac{G_{wkn}}{\Omega_{kn}},$$

$$G_{wkn} = \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2\right)^2 + c^2\left(\frac{k^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2}n^2\right) \times \left[2(1-\nu)\frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2\right],$$

$$c^2 = \frac{\delta^2}{12R^2},$$

$$\Omega_{kn} = \nu(1+\nu)\frac{k^2n^2\pi^2}{l^2}\left\{1 + c^2\left[(2-\nu)\frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2\right]\right\} +$$

$$- \left(\frac{k^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2}n^2\right)n^2\left\{1 + c^2\left[(2-\nu)\frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2\right]\right\}^2 +$$

$$+ \left\{\frac{1-\nu}{2}\frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2 + c^2\left[2(1-\nu)\frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2\right]\right\}\nu^2\frac{k^2\pi^2}{l^2} +$$

$$+ \left[1 + c^2\left(\frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2\right)^2\right] x$$

$$x\left\{\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2\right)^2 + c^2\left(\frac{k^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2}n^2\right)\left[2(1-\nu)\frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2\right]\right\}.$$

Kąt obrotu j-tej tarczy $\Theta_j(\varphi)$ można wyznaczyć w oparciu o pracę [4], jest on równy

$$\Theta_j(\varphi) = \frac{\partial v(r,\varphi)}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\Theta_{nj}\cos n\varphi, \tag{1.3}$$

gdzie:

$$\Theta_{nj} = \frac{\partial R_{nj}(r)}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{M_{nj}}{k_n}, \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{k_o} = \frac{1}{DW_o}\left[\frac{(R^2-b^2)^2}{Rb^2} - 4R\ln^2\frac{R}{b}\right],$$

$$W_o = \ln\frac{R}{b}\left[(1+\nu)\ln\frac{R}{b} + 2\right] - (R^2-b^2)\left(\frac{1-\nu}{R^2} + \frac{3+\nu}{b^2}\right),$$

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{DW_1}\left\{\left[\frac{2R}{b}(R^2-3b^2) + 3\frac{b}{R}(R^2+b^2)\right]\left(\ln\frac{R}{b} + 1\right) + \frac{R}{b}\left[b^2\left(8\ln\frac{R}{b} - 5\right)-R^2\right]\right.$$

$$\left. - \frac{b}{R}R^2 - b^2\left(5-2\ln\frac{R}{b}\right)\right] - \frac{3R}{b}\left[b^2 + R^2\left(2\ln\frac{R}{b} - 1\right)\right]\Bigg\},$$

$$W_1 = 4b\left\{\ln\frac{R}{b}\left[\frac{R^2}{b^2}(3+\nu) + \frac{b^2}{R^2}(1-\nu)\right] + 2(1+\nu) - \nu\frac{b^2}{R^2} - \frac{R^2}{b^2}(2+\nu)\right\},$$

$$\frac{1}{k_n} = \frac{1}{DW_n}\Bigg\{nR^{n-1}\Big[(n+1)b^{-n+1}(R^{-2n+2} - b^{-2n+2}) - (R^2-b^2)b^{-3n+1} +$$

$$- n(R^{-2n} - b^{-2n})b^{-n+3}\Big] +$$

$$+ nR^{-n-1}\left[b^{n+1}(R^{-2n+2} - b^{-2n+2}) + (n-1)b^{-n+1}(R^2 + b^2)\right] +$$

$$- (n+2)R^{n+1}\left[nb^{-n-1}(R^{-2n+2} - b^{-2n+2}) + (R^{-2n}-b^{-2n})(1-n)b^{-n+1}\right] +$$

$$- (n+2)R^{-n-3}\left[nb^{-n-1}(R^2 - b^2) + b^{n+1}(R^{-2n} - b^{-2n})\right]\Bigg\},$$

$$W_n = \begin{vmatrix} -nb^{-n-1} & b^{n+1} & (1-n)b^{-n+1} \\ R^{-2n} - b^{-2n} & R^2 - b^2 & R^{-2n+2}-b^{-2n+2} \\ n(1-\nu)R^{-n-2} & (2n+1+\nu)R^n & (1-n)(1-\nu)R^{-n} \end{vmatrix}$$

Po podstawieniu (1.2) i (1.3) do (1.1) otrzymano

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}\lambda_{kn}B_{kn}\left[q_{kn}-\frac{2}{L}\sum_{j=1}^{2}M_{nj}\frac{k\pi}{L}\cos\frac{k\pi x_j}{l}\right]\frac{k\pi}{L}\cos\frac{k\pi x_i}{l}\cos n\varphi =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\frac{M_{ni}}{k_n}\cos n\varphi \tag{1.5}$$

Porównując odpowiednie współczynniki szeregów w równaniu (1.5) otrzymano dla $x_1 = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}B_{kn}\left[q_{kn}-\frac{2}{L^2}k\pi(M_{n_1}+M_{n_2}(-1)^k\right]\frac{k\pi}{L}=\frac{M_{n1}}{k_n} \tag{1.6a}$$

i dla $x_2 = l$

$$\sum_{k=1}^{\infty}B_{kn}\left[q_{kn}-\frac{2}{L^2}k\pi(M_{n_1}+M_{n_2}(-1)^k)\right]\frac{k\pi}{L}(-1)^k=\frac{M_{n2}}{k_n}. \tag{1.6b}$$

2. Wyznaczenie przemieszczeń powłoki bębna

Należy podkreślić, że wyrażenie (1.2) na $w(\xi,\varphi)$ jest słuszne jedynie dla obciążenia $q(\xi,\varphi)$ parzystego względem kąta φ. W celu wyznaczenia przemieszczeń przy dowolnej formie obciążenia rozwiązano zagadnienie prowadzące do wyznaczenia funkcji wpływu. Obciążając powłokę siłą skupioną $P = 1$ działającą w punkcie $\xi = x$, $\varphi = \pi$ prostopadle do powierzchni środkowej powłoki, otrzymano po rozwinięciu w szereg

$$q_{kn}=\frac{2(-1)^n}{\pi LR}\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{2.1}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$K_{kn}(x) = \lambda_{kn}\frac{1}{\Omega_{kn}}\left[\frac{(-1)^n}{\pi R}\sin\frac{k\pi x}{l} - \frac{k\pi}{L}\left(M_{n_1} + M_{n_2}(-1)^k\right)\right], \qquad (2.2)$$

przesuwając siłę jednostkową z położenia $\varphi = \pi$ do położenia określonego współrzędną ψ oraz uwzględniając (2.1), równanie (1.2) sprowadza się do wyrażenia

$$w^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi) = \frac{2R^2(1-\nu^2)}{LE\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} K_{kn}(x)(-1)^n G_{wkn}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\cos n(\varphi-\psi) \qquad (2.3)$$

Równanie (2.3) przedstawia przemieszczenie promieniowe w punkcie ξ, φ pod wpływem siły jednostkowej przyłożonej w miejscu x,ψ.

Pozostałe składowe przemieszczenia (styczne v i wzdłużne u) wyznaczono w analogiczny sposób.

$$u^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi) = \frac{2R^2(1-\nu^2)}{LE\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} K_{kn}(x)(-1)^n G_{ukn}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\cos n(\varphi-\psi) \qquad (2.4)$$

$$v^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi) = \frac{2R^2(1-\nu^2)}{LE\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} K_{kn}(x)(-1)^n G_{vkn}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\sin n(\varphi-\psi) \qquad (2.5)$$

gdzie:

$$G_{ukn} = -\left\{\frac{1+\nu}{2}\frac{kn^2\pi}{l}\left\{1 + c^2\left[(2-\nu)\frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2\right]\right\} + \right.$$
$$\left. -\nu\frac{k\pi}{l}\left\{\frac{1-\nu}{2}\frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2 + c^2\left[2(1-\nu)\frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2\right]\right\}\right\},$$

$$G_{vkn} = -\left\{\left[\frac{k^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2} n^2\right] n\left\{1 + c^2\left[(2-\nu)\frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2\right]\right\} + -\nu\frac{1+\nu}{2}\frac{k^2\pi^2}{l^2} n\right\}.$$

Stan przemieszczeń powłoki bębna dla dowolnego obciążenia normalnego można określić przy pomocy następujących formuł całkowych

$$\begin{Bmatrix} w(\xi,\varphi) \\ u(\xi,\varphi) \\ v(\xi,\varphi) \end{Bmatrix} = R^2 \iint_S \begin{Bmatrix} w^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi) \\ u^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi) \\ v^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi) \end{Bmatrix} q(x,\psi)dxd\psi. \tag{2.6}$$

W dalszej części pracy założono obciążenie symetryczne, czyli we wzorze (2.1) należy podstawić $x = l/2$

$$q_{kn} = \frac{2(-1)^n}{\pi LR} \sin\frac{k\pi}{2}. \tag{2.7}$$

Po podstawieniu (2.7) do (2.2) $K_{kn}(x)$ redukuje się do

$$K_{kn} = \frac{\lambda_{kn}}{\Omega_{kn}}\left[\frac{(-1)^n}{\pi R}\sin\frac{k\pi}{2} - \frac{k\pi}{L}(M_{n_1} + M_{n_2}(-1)^k)\right]. \tag{2.8}$$

Wykorzystując (2.7) w (1.6) otrzymano

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} B_{kn}\left[\frac{2(-1)^n}{\pi LR}\sin\frac{k\pi}{2} - \frac{2}{L^2}k\pi(M_{n_1} + M_{n_2}(-1)^k)\right]\frac{k\pi}{L} = \frac{M_{n_1}}{k_n}, \\ &\sum_{k=1}^{\infty} B_{kn}\left[\frac{2(-1)^n}{\pi LR}\sin\frac{k\pi}{2} - \frac{2}{L^2}k\pi(M_{n_1} + M_{n_2}(-1)^k)\right]\frac{k\pi}{L}(-1)^k = \frac{M_{n_2}}{k_n}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Rozbijając sumy we wzorach (2.9) na dwie części; osobno po wskaźnikach parzystych i nieparzystych i wykonując uproszczenia uzyskano

$$\sum_{k=1,3,5}^{\infty} B_{kn}\left[\frac{2(-1)^n}{\pi LR}\sin\frac{k\pi}{2} - \frac{2}{L^2}k\pi(M_{n_1} - M_{n_2})\right]\frac{k\pi}{L} +$$

$$- \sum_{k=2,4,6}^{\infty} B_{kn}\frac{2k\pi}{L}(M_{n_1} + M_{n_2})\frac{k\pi}{L} = \frac{M_{n1}}{k_n}, \tag{2.10}$$

$$- \sum_{k=1,3,5}^{\infty} B_{kn}\left[\frac{2(-1)^n}{\pi LR}\sin\frac{k\pi}{2} - \frac{2}{L^2}k\pi(M_{n_1} - M_{n_2})\right]\frac{k\pi}{L} +$$

$$- \sum_{k=2,4,6}^{\infty} B_{kn}\frac{2k\pi}{L}(M_{n_1} + M_{n_2})\frac{k\pi}{L} = \frac{M_{n2}}{k_n}$$

Dodając równania (2.10) stronami oraz wyłączając przed znak sumy $M_{n1} + M_{n2}$, otrzymano prosty związek

$$(M_{n1} + M_{n2})\left[\frac{1}{k_n} + \sum_{k=2,4,6}^{\infty} B_{kn}\frac{2k^2\pi^2}{L^3}\right] = 0. \tag{2.11}$$

Suma w równaniu (2.11) zależy jedynie od geometrii i własności fizykalnych materiału powłoki, natomiast k_n jest funkcją własności tarczy. Wobec powyższego są to wielkości od siebie niezależne, zatem aby równanie (2.11) było spełnione musi zachodzić warunek

$$M_{n1} + M_{n2} = 0. \tag{2.12}$$

Wynik ten jest intuicyjnie oczywisty ze względu na symetrię bębna i obciążenia zewnętrznego. Po podstawieniu (2.12) do (2.10) obliczono

$$M_{n1} = -M_{n2} = \frac{\dfrac{2(-1)^n}{L^2R} \displaystyle\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} B_{kn}\, k \sin\frac{k\pi}{2}}{\dfrac{1}{k_n} + \dfrac{4\pi^2}{L^3} \displaystyle\sum_{k=1,3,5}^{\infty} B_{kn}\, k^2}. \tag{2.13}$$

W ten sposób wyznaczono współczynniki rozwinięcia momentu zginającego M_{nj} występujące w równaniu (2.8). Równania (2.6) przy uwzględnieniu (2.3), (2.4), (2.5) i (2.8) określają stan przemieszczeń powłoki bębna sprężystego.

3. Wyznaczenie pola przemieszczeń powłoki bębna lepkosprężystego

Po wykonaniu na równaniach (2.3) ÷ (2.6) transformacji Laplace'a, przy jednoczesnym zastosowaniu analogii sprężysto-lepkosprężystej, [1], [2], otrzymano

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p) \\ \bar{u}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p) \\ \bar{v}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p) \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{2R^2(1-\bar{\nu}(p)^2)}{L\bar{E}(p)\delta} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \bar{K}_{kn}(p) \begin{Bmatrix} \bar{G}_{wkn}(p)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\cos n(\varphi-\psi) \\ \bar{G}_{ukn}(p)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\cos n(\varphi-\psi) \\ \bar{G}_{vkn}(p)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\sin n(\varphi-\psi) \end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

oraz

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}(\xi,\varphi,p) \\ \bar{u}(\xi,\varphi,p) \\ \bar{v}(\xi,\varphi,p) \end{Bmatrix} = R^2 \iint_S \begin{Bmatrix} \bar{w}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p) \\ \bar{u}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p) \\ \bar{v}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p) \end{Bmatrix} \bar{q}(x,\psi,p)\,dx\,d\psi. \tag{3.2}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\begin{aligned} G_w(x,\psi,\xi,\varphi,t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\bar{w}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p)\right\} \\ G_u(x,\psi,\xi,\varphi,t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\bar{u}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p)\right\} \\ G_v(x,\psi,\xi,\varphi,t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\bar{v}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p)\right\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

oraz wykonując odwrotną transformację Laplace'a na równaniach (3.2) przy wykorzystaniu twierdzenia o splocie, otrzymano równania przemieszczeń ważne dla bębna lepkosprężystego

$$\begin{Bmatrix} w(\xi,\varphi,t) \\ u(\xi,\varphi,t) \\ v(\xi,\varphi,t) \end{Bmatrix} = R^2 \iint_S \left(\int_0^t \begin{Bmatrix} G_w(x,\psi,\xi,\varphi,t-\tau) \\ G_u(x,\psi,\xi,\varphi,t-\tau) \\ G_v(x,\psi,\xi,\varphi,t-\tau) \end{Bmatrix} q(x,\psi\tau)\,d\tau \right) dx\,d\psi. \tag{3.4}$$

Równania (3.4) mogą służyć jako podstawa zastosowań obliczeniowych. Otrzymanie wyniku w formie zamkniętej jest możliwe po przyjęciu konkretnego modelu reologicznego materiału bębna $(\bar{E}(p)$ i $\bar{\nu}(p))$ oraz rodzaju obciążenia $q(\xi,\varphi,\tau)$.

4. Przykład. Zagadnienie współpracy bębna z liną

Założenia:

a) Przyjęto, że bęben jest wykonany z materiału nieściśliwego $\bar{\nu}(p) = 1/2$ przy uwzględnieniu modelu Voigta

$$\frac{E_o}{E(p)} = \frac{1}{1+\lambda p}.$$

b) Obciążenie zmienia swoje położenie ze stałą prędkością kątową ω.

c) Bęben poddany jest obciążeniu charakterystycznemu dla współpracy bębna z liną (tak zwane obciążenie Eulera).

d) Pominięto siły tarcia liny o bęben.

Wstępnie obciążenie zewnętrzne przyjęto w postaci

$$q(x,\psi,\tau) = \frac{P}{2R^2}\,\delta(x-\tfrac{l}{2})\delta(\psi-\omega\tau), \tag{4.1}$$

to jest jako siłę P promieniową wędrującą po obwodzie bębna.

Obliczenia przemieszczenia promieniowego, stycznego i wzdłużnego przebiegają w analogiczny sposób, dlatego w dalszej części przykładu zajęto się tylko wyprowadzeniem wzoru określającego przemieszczenie promieniowe oraz przytoczono ostateczne wyniki pozostałych składowych przemieszczenia.

Korzystając z założenia a) w równaniu (3.3) otrzymano

$$G_w(x,\psi,\xi,\varphi,t) =$$

$$= \frac{3R^2}{2L\delta\lambda E_o}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n K_{kn}\, G_{wkn}\, e^{-\frac{t}{\lambda}} \sin\frac{k\pi\xi}{l}\cos n(\varphi-\psi) \tag{4.2}$$

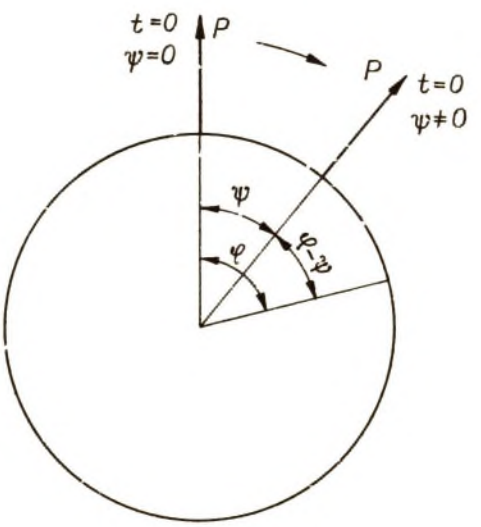
Podstawiając (4.1) i (4.2) do (3.4) i wykorzystując własności dystrybucji δ Diraca uzyskano

$$w(\xi,\varphi,t) = \frac{3PR^2}{4L\delta\lambda E_o} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{kn} G_{wkn} \sin\frac{k\pi\xi}{l} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \cos n(\varphi-\omega\tau)d\tau \tag{4.3}$$

Ostatecznie, po wykonaniu całkowania i uporządkowaniu, otrzymano

$$w(\xi,\varphi,t) = \frac{3PR^2}{4L\delta\lambda E_o} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{kn} G_{wkn} \sin\frac{k\pi\xi}{l} \frac{\lambda\omega n}{\lambda^2\omega^2 n^2+1} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\lambda\omega n} \cos n(\varphi-\omega t) - \sin n(\varphi-\omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{1}{\lambda\omega n} \cos n\varphi - \sin n\varphi \right) \right\}. \tag{4.4}$$



Rys. 2

Jeżeli siła P przyłożona jest do powłoki w chwili t=0 w punkcie ψ (rys. 2), a nie $\psi = 0$, jak we wzorze (4.4), to wyrażenie

$$w(\xi,\varphi,\psi,t) = \frac{3PR^2}{4L\delta\lambda E_o} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{kn} G_{wkn} \sin\frac{k\pi\xi}{l} \frac{\lambda\omega n}{\lambda^2\omega^2 n^2+1} \times$$

$$\times \frac{1}{\lambda\omega n} \cos n(\varphi-\psi-\omega t) - \sin n(\varphi-\psi-\omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left[\frac{1}{\lambda\omega n} \cos n(\varphi-\psi) - \right.$$

$$\left. - \sin n(\varphi-\psi)\right] \tag{4.5}$$

przedstawia odkształcenie powłoki bębna w miejscu ξ, φ i w czasie t pod wpływem siły skupionej P przyłożonej w punkcie ψ, zatem jest to funkcja wpływu. Korzystając z wyrażenia (4.5) przemieszczenie promieniowe powłoki pod wpływem dowolnej postaci obciążenia, zarówno w formie ciągłej jak i dyskretnej można wyznaczyć przy pomocy formuły

$$w(\xi,\varphi,t) = + \int_0^{\psi_o} w(\xi,\varphi,\psi,t)\, P(\psi) d\psi. \tag{4.6}$$

W przypadku obciążenia dyskretnego $P(\psi)$ wyrazi się formą dystrybucyjną, a całka we wzorze (4.6) przejdzie w sumę.

Uwzględniając założenie c) we wzorze (4.6) przemieszczenie promieniowe płaszcza bębna wyrazi się następująco

$$w(\xi,\varphi,t) = - \int_0^{\psi_o} w(\xi,\varphi,\psi,t)\, P_o\, e^{\alpha\psi} d\psi. \tag{4.7}$$

Wykonując całkowanie otrzymano składowe pola przemieszczeń.

Przemieszczenie promieniowe

$$w(\xi,\varphi,t) = \frac{3R^2P_o}{4L\delta\lambda E_o}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n K_{kn}\, G_{wkn}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,\frac{\lambda\omega n}{\lambda^2\omega^2n^2+1}\Bigg\{\Bigg[\frac{\cos n(\varphi-\omega t)}{\lambda\omega n}$$

$$-\sin n(\varphi-\omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}}\left(\frac{\cos n\varphi}{\lambda\omega n} - \sin n\varphi\right)\Bigg]\frac{1}{\alpha^2+n^2}\left[e^{\alpha\psi_o}(\alpha\cos n\psi_o + n\sin n\psi_o) - \alpha\right]$$

$$+\left[\frac{\sin n(\varphi-\omega t)}{\lambda\omega n} + \cos n(\varphi-\omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}}\left(\frac{\sin n\varphi}{\lambda\omega n} + \cos n\varphi\right)\right] x$$

$$\frac{1}{\alpha^2+n^2}\left[e^{\alpha\psi_o}(\alpha\sin n\psi_o - n\cos n\psi_o) + h\right]\Bigg\} x \qquad (4.8)$$

Przemieszczenie wzdłużne

$$u(\xi,\varphi,t) = \frac{3R^2P_o}{4L\delta\lambda E_o}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n G_{ukn}\, K_{kn}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,\frac{\lambda\omega n}{\lambda^2\omega^2n^2+1}\,\cdot$$

$$\cdot\Bigg\{\left[\frac{\cos n(\varphi-\omega t)}{\lambda\omega n} - \sin n(\varphi-\omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}}\left(\frac{\cos n\varphi}{\lambda\omega n} - \sin n\varphi\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\alpha^2+n^2}\left[e^{\alpha\psi_o}(\alpha\cos n\psi_o + n\sin n\psi_o) - \alpha\right] +$$

$$+\left[\frac{\sin n(\varphi-\omega t)}{\lambda\omega n} + \cos n(\varphi-\omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}}\left(\frac{\sin\varphi n}{\lambda\omega n} + \cos n\varphi\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\alpha^2+n^2}\left[e^{\alpha\psi_o}(\alpha\sin n\psi_o - n\cos n\psi_o) + n\right]\Bigg\}. \qquad (4.9)$$

Przemieszczenie styczne

$$v(\xi,\varphi,t) = \frac{3R^2P_o}{4l\delta\lambda E_o}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n K_{kn}\, G_{vkn}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,\frac{\lambda\omega n}{\lambda^2\omega^2n^2+1}\,\cdot$$

$$\left\{\left[\frac{\sin n(\varphi-\omega t)}{\lambda\omega n}+\cos n(\varphi-\omega t)-e^{-\frac{t}{\lambda}}\left(\frac{\sin n\varphi}{\lambda\omega n}+\cos n\varphi\right)\right]\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{1}{\alpha^2+n^2}\left[e^{\alpha\psi_o}(\alpha\cos n\psi_o+n\sin n\psi_o)-\alpha\right]+$$

$$-\left[\frac{\cos n(\varphi-\omega t)}{\lambda\omega n}-\sin n(\varphi-\omega t)-e^{-\frac{t}{\lambda}}\left(\frac{\cos n\varphi}{\lambda\omega n}-\sin n\varphi\right)\right]\cdot$$

$$\left.\frac{1}{\alpha^2+n^2}\left[e^{\alpha\psi_o}(\alpha\sin n\psi_o-n\cos n\psi_o)+n\right]\right\}.$$

LITERATURA

[1] Bland D.R.: The theory of linear viscoelasticity, Pergamon Press Oxford 1960.

[2] Nowacki W.: Teoria pełzania, Arkady Warszawa 1963.

[3] Skalmierski B.: Problemy statyki i dynamiki powłok walcowych użebrowanych, Zesz. Nauk. Pol. Śl. Mechanika 17, 1963.

[4] Tylikowski A., Czogała E.: Płyta pierścieniowa obciążona na brzegu momentem, Zesz. Nauk. Pol. Śl. Mechanika 32, 1968.

КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА ВЯЗКОУПРУГОГО БАРАБАНА НАГРУЖЕННОГО ПОДВИЖНОЙ РАДИАЛЬНОЙ СИЛОЙ

Р е з ю м е

В работе решено в перемещениях квазистатическую проблему вязкоупругого барабана нагруженного подвижной радиальной силой. Моделю обсуждения является система оболочка - диски. Решение получено для упругого состояния применяя упруго - вязкоупругю аналогию. В вычислениях принято во внимание влияние жёсткости закривающих дисков на обороты края сболочки. Вязкоупругие опоры рассматривались как шарнирно - передвижные, воздействующие на оболочку барабана только изгибающим моментом, и делающие невозможными радиальные и касательные перемещения. Для детальных расчётов применялась модель Фохта при предложении несжимаемости. Рассмотрено нагрузку барабана в характерном виде для совместной работы барабана с канатом.

QUASISTATIC PROBLEM VISCOELASTIC DRUM LOADED WITH A WANDERING RADIAL FORCE

S u m m a r y

The paper discusses a quasistatic phenomena present in a viscoelastic drum loaded with a wandering radial force. The system shell - plates is the model of the consideration. The solution has been obtained from elastic state by the application of the elastic - viscoelastic analogy. The analysis takes into account the influence exerted by the closing disks stiffness on the rotation of the edge of the shell. The viscoelastic supports are treated like removing joints reacting on the drum only by a bending moment and not allowing any radial and tangential displacements. In detail solutions Voigt's body has been assumed. The analysis has been applied to the particular case of the drum - rope system.