

ANDRZEJ TYLIKOWSKI  
Katedra Dynamiki Układów Mechanicznych

O DRGANIACH POWŁOKI CYLINDRYCZNEJ  
POD WPŁYWEM WYMUSZENIA LOSOWEGO

**Streszczenie.** W pracy omówiono w aspekcie liniowym fizycznie i geometrycznie zagadnienie drgań tłumionych sprężystej otwartej powłoki walcowej pod wpływem obciążenia będącego funkcją losową czasu i współrzędnych. W ramach teorii korelacyjnej uzyskano wyrażenie na średni kwadrat ugięcia. Do obliczeń szczegółowych przyjęto obciążenie powłoki szerokopasmowym szumem.

1. Rozwiązanie problemu deterministycznego

Podstawą rozważań jest równanie różniczkowe równowagi technicznej teorii powłok [1],

$$\left[ (1-\nu^2) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \nu^2 \nabla^2 \right] w(\xi, \varphi, t) = \frac{R^2(1-\nu^2)}{E\delta} \nabla^4 q^*(\xi, \varphi, t), \quad (1)$$

gdzie:

- w - przemieszczenie promieniowe powłoki,
- R - promień krzywizny powłoki,
- $\delta$  - grubość powłoki,
- E - moduł Younga materiału powłoki,
- $\nu$  - liczba Poissona materiału powłoki,
- $\xi, \varphi$  - bezwymiarowe współrzędne punktu na powierzchni powłoki,
- $q^*$  - obciążenie radialne powłoki,
- t - czas,

$$c^2 = \frac{\partial^2}{12R^2},$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Uwzględniając tłumienie i siły bezwładności obciążenie należy przyjąć w postaci

$$q^*(\xi, \varphi, t) = q(\xi, \varphi, t) - \rho \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\rho \delta \beta \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (2)$$

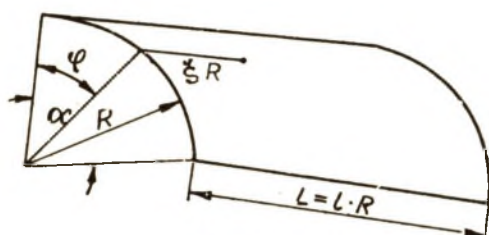
gdzie:

$\rho$  - gęstość powierzchniowa

$\beta$  - współczynnik tłumienia,

$q$  - obciążenie zewnętrzne powłoki.

Rozwiązaniem równania (1) jest następujące wyrażenie



Rys. 1

$$w(\xi, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} f_{mn}(t) W_{mn}(\xi, \varphi), \quad (3)$$

przy czym ze względu na przegubowe zamocowanie brzegów powłoki (rys. 1)

$$W_{mn}(\xi, \varphi) = \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \quad (4)$$

Podstawiając (2), (3) i (4) do (1), mnożąc obustronnie otrzymane równanie przez  $W_{mn}(\xi, \varphi)$  oraz wykorzystując warunek ortogonalności otrzymano równanie różniczkowe zwyczajne

$$\frac{d^2 f_{mn}(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{df_{mn}(t)}{dt} + \omega_{mn}^2 f_{mn}(t) = \frac{1}{\rho_0} q_{mn}(t), \quad (5)$$

gdzie:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{E}{R^2(1-\nu^2)\rho} \frac{(1-\nu^2)(\frac{m}{1})^4 + c^2[(\frac{m}{1})^2 + (\frac{n}{\alpha})^2]^4}{[(\frac{m}{1})^2 + (\frac{n}{\alpha})^2]^2} \quad (6)$$

jest częstością własną powłoki oraz

$$q_{mn}(t) = \frac{4}{\alpha l} \int_0^{\alpha l} \int_0^1 q(\xi, \varphi, t) \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} d\xi d\varphi \quad (7)$$

Przy założeniu zerowych warunków początkowych, rozwiązanie równania (5) przedstawia się następująco [2], [3]

$$f_{mn}(t) = \frac{1}{\rho_0} \int_{-\infty}^t g_{mn}(t-\tau) q_{mn}(\tau) d\tau, \quad (8)$$

gdzie:  $g_{mn}(t)$  jest impulsową funkcją przejścia to jest przebiegiem czasowym  $f_{mn}(t)$  pod wpływem zaburzenia w postaci funkcji  $\delta$  Diraca

$$g_{mn}(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega_{mn}^2 - \beta^2}} e^{-\beta t} \sin(t\sqrt{\omega_{mn}^2 - \beta^2}) H(t). \quad (9)$$

w powyższym wzorze  $H(t)$  jest funkcją Heaviside'a.

## 2. Zastosowanie teorii korelacyjnej do opisu stacjonarnych drgań wymuszonych

W dalszej części pracy założono, że obciążenie  $q(\xi, \varphi, t)$  jest stacjonarną ergodyczną funkcją losową czasu i dowolną funkcją losową współrzędnych o wartości oczekiwanej równej 0. Czasowa funkcja korelacyjna (kowariancyjna) takiego procesu zależy tylko od różnicy czasu  $t_2 - t_1 = \tau$  i wyraża się wzorem

$$E[q(\xi, \varphi, t_2) q(\eta, \psi, t_1)] = K_q(\xi, \eta, \varphi, \psi, \tau). \quad (10)$$

Znajomość funkcji korelacyjnej obciążenia (10) pozwala jedynie wyznaczyć funkcję korelacyjną ugięcia. Jeżeli  $q(\xi, \varphi, t)$  jest procesem o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa, to znajomość funkcji korelacyjnej pozwala określić ponadto rozkład prawdopodobieństwa ugięcia, które zupełnie charakteryzuje proces drgania.

Na podstawie (7) i (8) określono funkcje korelacyjne  $q_{mn}(t)$  i  $f_{mn}(t)$  [3], [4]:

$$K_{q_{mn,pr}}(\tau) = \left(\frac{4}{\alpha l}\right)^2 \int_0^{\alpha l} \int_0^{\alpha l} \int_0^{\alpha l} \int_0^{\alpha l} K_q(\xi, \eta, \varphi, \psi, \tau) w_{mn}(\xi, \varphi) w_{pr}(\eta, \psi) d\varphi d\xi d\psi d\eta \quad (11)$$

i

$$K_{f_{mn,pr}}(\tau) = \frac{1}{(\varrho \delta)^2} \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \xi_{mn}(t_1 - \tau_1) \xi_{pr}(t_2 - \tau_2) f_{q_{mn,pr}}(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \quad (12)$$

Wprowadzając nowe zmienne  $\theta_1 = t_1 - \tau_1$ ,  $\theta_2 = t_2 - \tau_2$  do (12), zmieniając granice całkowania oraz korzystając z własności (9) otrzymano

$$K_{f_{mn,pr}}(\tau) = \frac{1}{(\rho \delta)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{mn}(\theta_1) \xi_{pr}(\theta_2) K_{q_{mn,pr}}(\tau + \theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2. \quad (12a)$$

Wprowadzając transformację całkową Fouriera zdefiniowaną wzorami:

$$S(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{-ixt} dt \quad (13)$$

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x) e^{ixt} dx,$$

po zastosowaniu jej do funkcji kowariancyjnej uzyskano następujące wyrażenie zwane gęstością widmową

$$S_{q_{mn,pr}}(\omega) = \left(\frac{4}{\alpha l}\right)^2 \int_0^{\alpha} \int_0^l \int_0^{\alpha} \int_0^l S_{q_{mn,pr}}(\xi, \eta, \varphi, \psi, \omega) W_{mn}(\xi, \varphi) W_{pr}(\eta, \psi) d\varphi d\xi d\psi d\eta. \quad (14)$$

Przy wyznaczaniu funkcji korelacyjnej  $f_{mn}(t)$  należy skorzystać z twierdzenia o splocie w transformacji Fouriera

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(y-x) dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} G(t) F(t) e^{ity} dt, \quad (15)$$

gdzie:  $G(t)$  i  $F(t)$  są odpowiednio transformatami Fouriera  $f(x)$  i  $g(x)$ ,

$$K_{f_{mn},pr}(\tau) = \frac{4\pi^2}{(\varphi\delta)^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{pr}(\omega) G_{mn}(-\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (16)$$

$G_{mn}(\omega)$  otrzymano po wykonaniu transformacji Fouriera na impulsowej funkcji przejścia  $g_{mn}(t)$

$$g_{mn}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega_{mn}^2 - 2i\beta\omega} \quad (17)$$

Ostatecznie średni kwadrat ugięcia wyraża się następująco

$$\overline{w^2(\xi, \eta, \varphi, \psi, \tau)} = E \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} f_{mn}(t_2) W_{mn}(\xi, \varphi) \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_{pr} f_{pr}(t_1) W_{pr}(\eta, \psi) \right] \quad (18)$$

Wykonując mnożenie sum i wyłączając czynniki deterministyczne przed znak wartości oczekiwanej w (18), uzyskano ważny z punktu widzenia zastosowań wzór

$$\overline{w^2(\xi, \eta, \varphi, \psi, \tau)} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{pr} \lambda_{mn} K_{f_{mn},pr}(\tau) W_{mn}(\xi, \varphi) W_{pr}(\eta, \psi) \quad (19)$$

Wyrażenie (19) może służyć za podstawę obliczeń numerycznych. Znajomość  $\overline{w^2}$  dla  $\tau=0$  wariancja pozwala określić lub przynajmniej ocenić prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że ugięcie nie przekroczy zdanego poziomu. W przypadku, gdy wymuszenie, a zatem i ugięcie (układ jest liniowy) spełnia dodatkowo warunek normalności, obliczenie wariancji pozwala całkowicie scha-

rakteryzować przebieg drgań. Mianowicie prawdopodobieństwo zdarzenia, że ugięcie  $k$ -krotnie przekroczy  $\sqrt{w^2}$ , jest równe

$$P\{w > k\sqrt{w^2}\} = 1 - \operatorname{erf} \frac{k}{\sqrt{2}} \quad (20)$$

W przypadku gdy zaburzenie nie ma charakteru normalnego korzystając z nierówności Czebyszewa [4] otrzymano oszacowanie

$$P\{w > k\sqrt{w^2}\} \leq \frac{1}{k^2} \quad (21)$$

Odwrotnie zakładając prawdopodobieństwo, że ugięcie nie przekroczy danej wielkości (co do wartości bezwzględnej), uwarunkowane współczynnikiem bezpieczeństwa, stopniem pewności i odpowiedzialności konstrukcji, określić można dopuszczalne natężenie szumu lub wymiary geometryczne powłoki. Tak więc zastosowanie metody korelacyjnej analizy stacjonarnych procesów stochastycznych pozwala uzyskać wskazówki konstrukcyjne w przypadkach, gdy nie ma dostatecznych danych, aby móc zastosować zwykły aparat matematyczny teorii drgań.

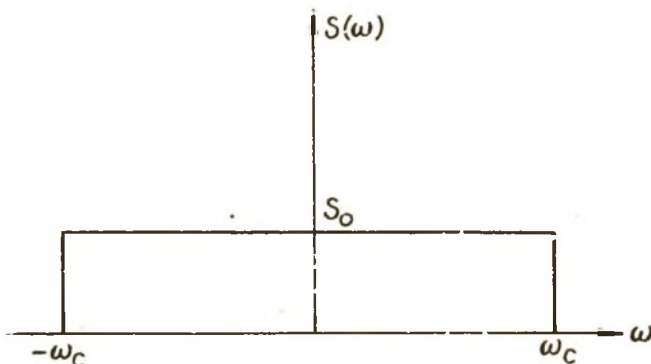
### 3. Obciążenie powłoki szerokopasmowym szumem o stałej intensywności

Założono, że powłoka pobudzana jest do drgań normalnym stacjonarnym szumem z obciętym widmem (rys. 2). Jego rozkład widmowy i funkcja korelacyjna przedstawia się następująco

$$S_q(\xi, \eta, \varphi, \psi, \omega) = S_0 \delta(\xi - \eta) \delta(\varphi - \psi) [H(\omega + \omega_c) - H(\omega - \omega_c)] \quad (22a)$$

$$K_n(\xi, \eta, \varphi, \psi, \tau) = 2S_0 \delta(\xi - \eta) \delta(\varphi - \psi) \frac{\sin \omega_c \tau}{\tau}, \quad (22b)$$

gdzie:  $S_0$  intensywność szumu,  $\omega_c$  częstość obcięcia. Interpretując fizycznie wzory (22) można zauważyć, że nie ma zależności (korelacji) pomiędzy obciążeniami w dwu różnych punktach powłoki.



Rys. 2

Po podstawieniu (22b) do (11) wykorzystując własności dystrybucji  $\delta$  otrzymano

$$K_{mm,pr}(\tau) = \frac{2}{\alpha l} 2S_0 \frac{\sin \omega_c \tau}{\tau} \delta_{mp} \delta_{nr} \quad (23)$$

gdzie: symbol Kroneckera  $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

Wykonując na równaniu (23) odwrotną transformację Fouriera, gęstość widmowa wyraża się następująco

$$S_{mm,pr}(\omega) = \frac{4}{\alpha l} S_0 \left[ H(\omega + \omega_c) - H(\omega - \omega_c) \right] \delta_{mp} \delta_{nr} \quad (24)$$



Podstawiając (24) i (17) do (16) i wykorzystując fakt, że funkcja podcałkowa jest równa tożsamościowo 0 dla  $|\omega| > \omega_c$ , otrzymano zależność

$$K_{r_{mn,pr}}(\tau) = \frac{8\pi S_0}{\alpha l(\rho \delta)^2} \int_0^{\omega_c} \frac{\cos \omega \tau}{[\omega_{mn}^2 - \omega^2]^2 + 4\beta^2 \omega^2} d\omega \delta_{mp}^0 \delta_{nr}^0. \quad (25)$$

Dla celów praktycznych szczególnie ważne znaczenie ma  $K_{r_{mn,pr}}(0)$ . Całkowanie (25) wykonano przy założeniu, że  $\beta$  jest małe. Można w tym przypadku przy obliczaniu całki ograniczyć się do obszaru bliskiego  $\omega_{mn}^2$ .

Dla  $\omega_{mn} < \omega_c$  otrzymano

$$K_{r_{mn}}(0) = \frac{8\pi S_0}{\alpha l(\rho \delta)^2 \beta \omega_{mn}^2} \delta_{mp}^0 \delta_{nr}^0, \quad (26a)$$

natomiast dla  $\omega_{mn} > \omega_c$  można otrzymać oszacowanie [5], [6]

$$K_{r_{mn}}(0) \ll \frac{3 S_0}{\alpha l(\rho \delta)^2 \beta \omega_{mn}^2}. \quad (26b)$$

Podstawiając równania (26) do (19) uzyskano wyrażenie na średni kwadrat ugięcia

$$\overline{w^2(\xi, \varphi)} \cong \frac{8\pi S_0}{\alpha l(\rho \delta)^2 \beta} \sum_{\omega_{mn} < \omega_c} \sum \left( \frac{\lambda_{mn}}{\omega_{mn}} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi \xi}{l} \sin^2 \frac{\pi \varphi}{\alpha}. \quad (27)$$

4. Przykład liczbowyDane:  $L = R = 0,4 \text{ m}$ 

$$E = 1,962 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$c^2 = 2,083 \times 10^{-6}$$

$$\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\alpha = 1$$

$$\omega_c = 4000 \text{ 1/s.}$$

Do obliczeń przyjęto wielkość zredukowaną

$$\delta(\xi, \varphi) = \sqrt{\frac{\alpha l (\rho \delta)^2}{8 \pi S_0} w^2(\xi, \varphi)} \frac{E}{R^2 (1 - \nu^2) \rho} =$$

$$= \sqrt{\sum_{\omega_{mn} < \omega_c} \sum_{\Omega_{mn}} \left( \frac{\lambda_{mn}}{\Omega_{mn}} \right)^2 \sin^2 \frac{m \pi \xi}{l} \sin^2 \frac{n \pi \varphi}{\alpha}}$$

gdzie:

$$\Omega_{mn}^2 = \frac{(1 - \nu^2) \left( \frac{m}{l} \right)^4 + c^2 \left[ \left( \frac{m}{l} \right)^2 + \left( \frac{n}{\alpha} \right)^2 \right]^4 \pi^4}{\left[ \left( \frac{m}{l} \right)^2 + \left( \frac{n}{\alpha} \right)^2 \right]^2}$$

dla małych  $m$  i  $n$  zebrano w tabelcy 1.

Tablica 1

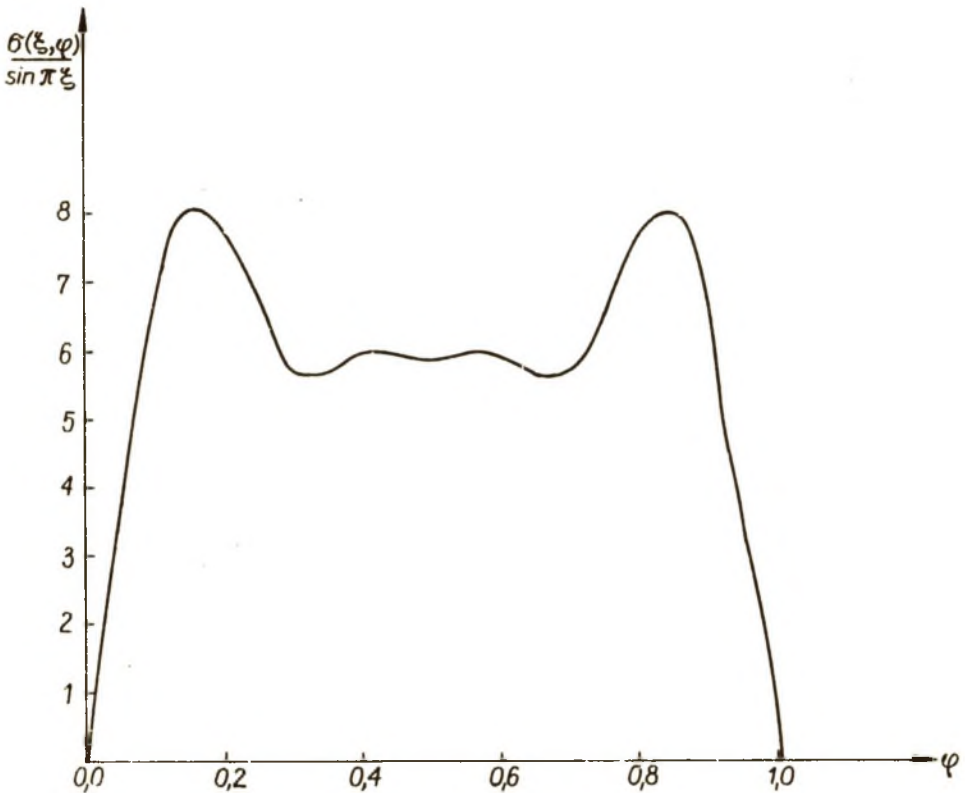
m n	1	2	3	4	5	6
0	0.9102	0.912	0.926	0.961	1.051	1.173
1	0.228	0.587	0.750	0.861	0.993	1.138
2	0.037	0.240	0.470	0.663	0.858	1.06
3	0.0294	0.120	0.291	0.500	0.734	0.996
4	0.062	0.117	0.244	0.430	0.686	0.985
5	0.138	0.188	0.298	0.480	0.739	1.07
6	0.278	0.332	0.447	0.636	0.914	1.278
7	0.507	0.576	0.701	0.911	1.22	1.628
8	0.856	0.941	1.094	1.336	1.683	2.148
9	1.367	1.468	1.624	1.928	2.320	2.860

Stały współczynnik we wzorze (6) po podstawieniu danych równa się

$$A = \frac{E}{R^2(1-\nu^2)\rho} = 1,73 \cdot 10^8 \frac{1}{s^2}$$

Sumowanie we wzorze (27) należy przeprowadzić dla m i n takich, że  $\omega_{mn}^2 < \omega_c^2$  lub  $\Omega_{mn}^2 < (\omega_c/A) = 0,092$ . Jak łatwo zauważyć należy ograniczyć się do  $\Omega_{mn}^2$  zakreślonych w tabelicy.

$$\sigma(\xi, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{\omega_{12}^2} \sin^2 \pi \varphi \sin^2 \pi \xi + \frac{1}{\omega_{13}^2} \sin^2 3\pi \varphi \sin^2 \pi \xi + \frac{1}{\omega_{14}^2} \sin^2 4\pi \varphi \sin^2 \pi \xi}$$



Rys. 3

Ostatecznie otrzymano do wyliczenia następujące wyrażenie po wykorzystaniu wartości cyfrowych z tablicy 1

$$\sigma(\xi, \varphi) = \sin \pi \xi \sqrt{27,02 \sin^2 2\pi \varphi + 34 \sin^2 3\pi \varphi + 16,15 \sin^2 4\pi \varphi}$$

Zależność  $\frac{\sigma(\xi, \varphi)}{\sin \pi \xi}$  od  $\varphi$  pokazuje rys. 3. Wykres ten służyć może za podstawę zastosowań konstrukcyjnych przy jednoczesnym wykorzystaniu (20) lub (21).

## LITERATURA

- [1] В.З. Власов: Общая теория оболочек и ей приложения в технике, Гостехиздат, М.Л., 1949.
- [2] Random vibration, Vol. 2, Chapt. 1, S.H. Crendall (ed), the Technology Press and John Wiley and Sons, N.Y. 1959.
- [3] Болорин В.В.: Статистические методы в строительной механике, Стройиздат, 1965, стр. 140-150.
- [4] Пугачев В.С.: Теория случайных функций и ее применении к задачам автоматического управления, физматгиз, М., 1962, стр. 150-151.
- [5] R.E. Lyon: Response of a nonlinear string to random excitation. J. Acoust. Soc. Amer., v. 32, No. 8, 1960.
- [6] T.K. Caughey: Response of a nonlinear string to random loading. J. Appl. Mech. Vol. 26, No. 3, 1959.

О КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ  
ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНЫХ СИЛ

## Р е з ю м е

В работе рассматривается в физически и геометрически линейной постановке затухающие колебания упругой открытой цилиндрической оболочки утврждённой шарнирно на контуре под воздействием сил, которые являются случайными функциями времени и координат. При помощи корреляционной теории определяется выражение для среднего квадрата прогиба. Для подробных обсуждений принято нагружение как шум с отсеченной спектральной плотностью.

VIBRATIONS OF THE CYLINDRICAL SHELL  
UNDER RANDOM EXCITATION

S u m m a r y

This work contains a discussion of the linear (both physical and geometrical) problem of the damping vibrations of the cylindrical shell boundary jointly fixed. They are developed by loading that is a random function of both coordinates and time. Using the correlation theory there was carried out an expression for average square of the deflection. As an example there has been considered cut noise power spectrum as a loading of the cylindrical shell.