ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1968

Seria: MECHANIKA z. 36 Nr kol. 233

ERNEST CZOGAŁA
Katedra Dynamiki Układów Mechanicznych

O PEWNYM PROBLEMIE DRGAŃ PRĘTA KOŁOWEGO PRZY WYMUSZENIU STOCHASTYCZNYM

Streszczenie. Przeanalizowano liniowe zagadnienie drgań pręta kołowego przy wymuszeniu stochastycznym.

Zagadnienie rozwiązano posługując się teorią korelacji. Otrzymano średnie kwadratowe odchylenia i funkcje korelacji przemieszczenia promieniowego i momentu gnącego przy założeniu "białego szumu".

1. Drgania wymuszone harmonicznie w ujęciu deterministycznym

Ważniejsze oznaczenia:

R	- promień krzywizny pręta,
φ_c	- długość kątowa pręta,
A	- pole przekroju pręta,
E	- moduł sprężystości,
I	- moment bezwładności przekroju pręta względem osi obojętnej,
ϱ	- gęstość materiału pręta,
$w(\varphi,t)$, $v(\varphi,t)$	- promieniowa i styczna składowa wektora przemieszczenia,
$q^*(\varphi,t)$, $p^*(\varphi,t)$	- promieniowa i styczna składowa obciążenia.

Równaniami wyjściowymi dla powyższych rozważań będą różniczkowe równania równowagi pręta kołowego

$$\frac{AE}{R^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)-\frac{EI}{R^4}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial\varphi^3}-\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right)+p^*=0,$$

$$-\frac{EI}{R^4}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}-\frac{\partial^3 v}{\partial\varphi^3}\right)-\frac{AE}{R^4}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}+w\right)+q^*=0, \tag{1.1}$$

wyprowadzone dla prętów słabo zakrzywionych o przekroju zwartym i stałej krzywiźnie $1/R$.

Przy pewnych założeniach upraszczających [3], [4] oraz pomijając obciążenie styczne ($p^*=0$) układ (1.1) sprowadza się do jednego równania

$$\frac{EI}{R^4}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+1\right)^2 w=\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}q^*. \tag{1.2}$$

Jeżeli założymy, że pręt spoczywa na podłożu sprężystym (o działaniu obustronnym i współczynniku k) oraz uwzględnimy liniowe tłumienie drgań (ze stałą h), to obciążenie promieniowe określone jest wzorem

$$q^*=q-kw-A\varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2h\frac{\partial w}{\partial t}, \tag{1.3}$$

gdzie: $q(\varphi,t)$ oznacza obciążenie zewnętrzne (czynne).

Wykonując transformację Laplace'a na ostatnim równaniu otrzymuje się

$$\frac{EI}{R^4}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}+1\right)^2\right]\bar{w}+k\frac{d^2\bar{w}}{d\varphi^2}+A\varrho p^2\frac{d^2\bar{w}}{d\varphi^2}+2h\varrho\frac{d^2\bar{w}}{d\varphi^2}=$$

$$=\frac{d^2}{d\varphi^2}\left[A\varrho(pf(\varphi)+g(\varphi))+2h\,m(\varphi)+\bar{q}\right] \tag{1.4}$$

gdzie:

$$\bar{w}(\varphi,p) \rightarrow w(\varphi,t) \qquad \bar{q}(\varphi,p) \rightarrow q(\varphi,t)$$

$$f(\varphi) = m(\varphi) = w(\varphi,0) \qquad g(\varphi) = \frac{\partial w(\varphi,0)}{\partial t}. \tag{1.4}$$

Następnie wykonano na równaniu (1.4) skończoną transformację Fouriera z pominięciem dodatkowych członów transformaty.

Pominięcie to jest uzasadnione w dwóch przypadkach zamocowania końców pręta: zamocowanie przegubowe (transformacja sinusowa) i sztywne z możliwością przesuwu bez obrotu (transformacja cosinusowa)

$$\bar{w}_n(p) = \frac{\bar{q}_n(p) + A\varrho(pf_n + g_n) + 2hm}{\frac{EI}{R^4}(\mu_n^2-1)^2 + k + A\varrho p^2 + 2hp}. \tag{1.5}$$

Dla n-tej formy drgań otrzymano:

$$\bar{w}_n(\varphi,p) = \frac{\bar{q}_n(p) + A\varrho(pf_n+g_n) + 2hm}{\frac{EI}{R^4}(\mu_n^2 - 1)^2 + k+A\varrho p^2 + 2hp} \begin{Bmatrix} \sin \mu_n \varphi \\ \cos \mu_n \varphi \end{Bmatrix} \tag{1.6}$$

gdzie:

$$\bar{q}_n(p) = \frac{2}{\varphi_o} \int_0^{\varphi_o} \bar{q}(\varphi,p) \begin{Bmatrix} \sin \mu_n \varphi \\ \cos \mu_n \varphi \end{Bmatrix} d\varphi$$

$$(f_n, g_n, m_n) = \frac{2}{\varphi_o} \int_0^{\varphi_o} (f,g,m) \begin{Bmatrix} \sin \mu_n \varphi \\ \cos \mu_n \varphi \end{Bmatrix} d\varphi$$

oraz

$$\mu_n = \frac{n\pi}{\varphi_o}, \quad n = 1, 2, 3...$$

Symbol $\begin{Bmatrix} \sin \mu_n \varphi \\ \cos \mu_n \varphi \end{Bmatrix}$ oznacza, że dla zamocowania przegubowego należy we wzorze przyjąć $\sin \mu_n \varphi$, zaś dla sztywnego utwierdzenia $\cos \mu_n \varphi$.

W dalszym ciągu rozpatrujemy drgania ustalone pręta. Z uwagi na założoną liniowość układu warunki początkowe nie mają wpływu na charakter drgań ustalonych, dlatego można przyjąć

$$f_n = g_n = m_n = 0.$$

Ponadto podstawiamy $k = \alpha E$.

Obciążenie założono jako zmieniające się w czasie harmonicznie

$$q(\varphi, t) = q(\varphi)\, e^{i\omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \begin{Bmatrix} \sin \mu_n \varphi \\ \cos \mu_n \varphi \end{Bmatrix} e^{i\omega t}. \tag{1.7}$$

Dla obciążenia jednostkowego zapisanego przy pomocy dystrybucji δ - Diraca

$$q^{(1)}(\varphi, t) = e^{i\omega t}\, \delta(\varphi - \varphi_1) \tag{1.8}$$

otrzymuje się funkcję wpływu Greena; uwzględniając, że dla obciążeń harmonicznych $p \to i\omega$ mamy

$$G_n(\varphi, \varphi_1, t) = \frac{e^{i\omega t} \cdot \frac{2}{\varphi_0} \begin{Bmatrix} \sin \mu_n \varphi_1 \\ \cos \mu_n \varphi_1 \end{Bmatrix}}{\alpha E \left[(\mu_n^2 - 1)^2 + 1 \right] - A\varrho\omega^2 + i2h\omega} \begin{Bmatrix} \sin \mu_n \varphi \\ \cos \mu_n \varphi \end{Bmatrix} \tag{1.9}$$

lub

$$G_n(\varphi,\varphi_1,t) = \frac{1}{A\varrho}\,\frac{e^{i\omega t}\,\dfrac{2}{\varphi_o}\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\varphi_1\\ \cos\mu_n\varphi_1\end{Bmatrix}}{\omega_n^2-\omega^2+\dfrac{2h}{A\varrho}\omega i}\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\varphi\\ \cos\mu_n\varphi\end{Bmatrix} \tag{1.10}$$

gdzie:

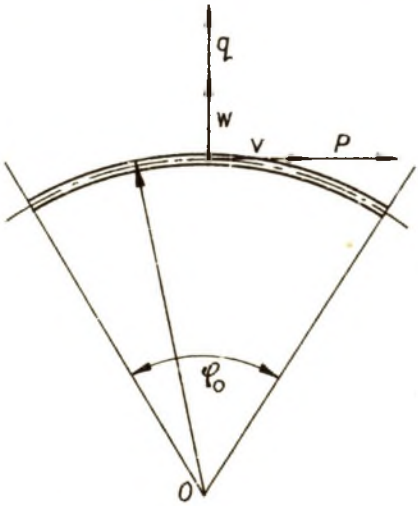
$$\omega_n^2 = \frac{\alpha E}{A\varrho}\left[(\mu_n^2-1)^2+1\right].$$

Dla dowolnego obciążenia harmonicznego n-ta forma przemieszczenia promieniowego określona jest następująco

$$w_n(\varphi,t) = \int_0^{\varphi_o} q(\varphi_1)G_n(\varphi,\varphi_1,t)d\varphi_1. \tag{1.11}$$

2. Wariancja przemieszczenia promieniowego
Wyznaczenie funkcji korelacji dla n-tej formy drgań

Obliczając moduł wyrażenia (1.11) otrzymuje się charakterystykę amplitudową dla n-tej formy drgań. Obciążenie przyjęto jako stacjonarną, ergodyczną funkcję losową czasu o wartości oczekiwanej równej 0.



Rys. 1

Przyjmując obciążenie umiejscowione w punkcie $\varphi_1 = \psi$ będzie

$$q(\varphi_1) = P_o\,\delta(\varphi_1-\psi), \tag{2.1}$$

gdzie: P_o jest stałym deterministycznym współczynnikiem uwzględniającym wymiar.

Oznaczając charakterystykę częstotliwościową przez $H_{w_n}(i\omega,\varphi)$ mamy

$$\left|H_{w_n}(\omega,\varphi)\right| = \frac{1}{A\varrho}\frac{P_o\frac{2}{\varphi_o}\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\psi\\ \cos\mu_n\psi\end{Bmatrix}}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+\frac{4n}{(A\varrho)^2}\omega^2}}\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\varphi\\ \cos\mu_n\varphi\end{Bmatrix}. \tag{2.2}$$

Posługując się znaną formułą dla wariancji przy znanej gęstości spektralnej [1]

$$\overline{w}_n^2(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_n}(\omega,\varphi)dw = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|H_{w_n}(\omega,\varphi)\right|^2 S_{q_n}(\omega)d\omega, \tag{2.3}$$

otrzymano

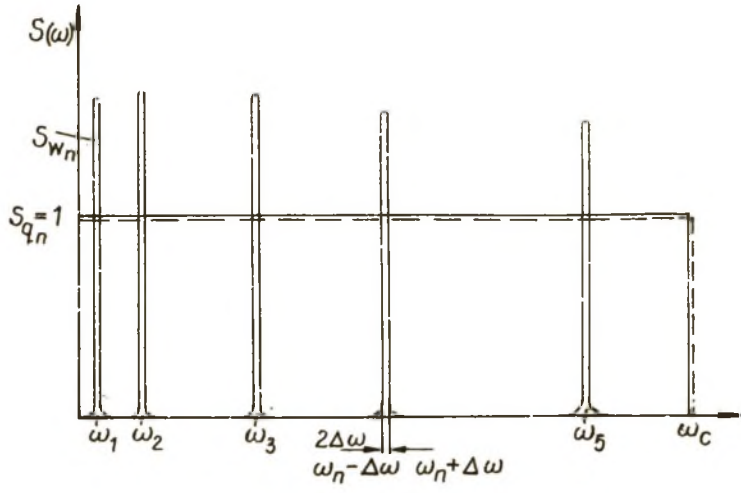
$$\overline{w}_n^2(\varphi) = \left(\frac{P_o}{A\varrho}\right)^2\frac{4}{\varphi_o^2}\begin{Bmatrix}\sin^2\mu_n\psi\\ \cos^2\mu_n\psi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin^2\mu_n\varphi\\ \cos^2\mu_n\varphi\end{Bmatrix}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_{q_n}(\omega)d\omega}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\xi_n\omega_n^2\omega^2}. \tag{2.4}$$

gdzie $\xi_n = h/A\varrho\,\omega_n$

Przyjmując wymuszenie w postaci "białego szumu" tzn. stałą gęstość widmową w pewnym zakresie częstotliwości $[-\omega_c,\ \omega_c]$ całka (2.4) sprowadzi się do postaci

$$\overline{w}_n^2(\varphi) = \frac{P_o}{A\varrho}\frac{4}{\varphi_o^2}\begin{Bmatrix}\sin^2\mu_n\psi\\ \cos^2\mu_n\psi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin^2\mu_n\varphi\\ \cos^2\mu_n\varphi\end{Bmatrix}\int_{-\omega_c}^{+\omega_c}\frac{S_{q_n}(\omega)\,d\omega}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega_n^2\omega^2}. \tag{2.5}$$

Zakładając, że tłumienie w układzie jest małe, układ ten spełnia rolę filtru wąskopasmowego [5](charakterystyka częstotliwościowa ma ostre maksimum w pobliżu częstości drgań własnych) w przedziale $[\omega_n-\Delta\omega,\ \omega_n+\Delta\omega]$(rys. 2).



Rys. 2

Decydujący wkład w całkę (2.4) wnosi obszar bliski ω_n, zatem granicę górną całkowania można rozszerzyć do ∞, gdyż funkcja poza przedziałem $[\omega_n+\Delta\omega,\ \omega_n-\Delta\omega]$ jest prawie równa 0.

Wykonując całkowanie otrzymano

$$\overline{w_n^2}(\varphi) = \left(\frac{P_o}{A\varrho}\right)^2 \frac{4}{\varphi_o^2} \begin{Bmatrix}\sin^2\mu_n\psi\\ \cos^2\mu_n\psi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin^2\mu_n\varphi\\ \cos^2\mu_n\varphi\end{Bmatrix}\frac{\pi}{2}\,\frac{S_{q_n}}{\xi_n\omega_n^3}. \tag{2.6}$$

Średnie kwadratowe odchylenie przemieszczenia promieniowego wynosi

$$\sqrt{\overline{w_n^2}(\varphi)} = \frac{P_o}{A\varrho}\,\frac{2}{\varphi_o} \begin{Bmatrix}\sin\mu_n\psi\\ \cos\mu_n\psi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\varphi\\ \cos\mu_n\varphi\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{\pi}{2}\,\frac{S_{q_n}}{\xi_n\omega_n^3}}. \tag{2.7}$$

Funkcję korelacji dla n-tej formy drgań wyznacza się wykonując na gęstości spektralnej przemieszczenia promieniowego transformację Fouriera [5]

$$K_{w_n}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_n}(\varphi,\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega. \qquad (2.$$

Przy założeniu "białego szumu" jak wyżej i wykonaniu w ostatnim wzorze transformacji Fouriera otrzymuje się

$$K_{w_n}(\tau) = \left(\frac{P_o}{A\varrho}\right)^2 \frac{4}{\omega_n^2\varphi_o^2} \begin{Bmatrix} \sin^2\mu_n\psi \\ \cos^2\mu_n\psi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin^2\mu_n\varphi \\ \cos^2\mu_n\varphi \end{Bmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_n^2 e^{i\omega\tau} d\omega}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\xi_n^2\omega_n^2\omega^2}. \tag{2.9}$$

Podstawiając

$$\sigma^2 = \frac{1}{\xi_n\omega_n} \left(\frac{P_o}{A\varrho}\right)^2 \frac{\pi}{2} \frac{4}{\omega_n^2\varphi_o^2} \begin{Bmatrix} \sin^2\mu_n\psi \\ \cos^2\mu_n\psi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin^2\mu_n\varphi \\ \cos^2\mu_n\varphi \end{Bmatrix},$$

$$\alpha = \xi_n\omega_n, \qquad \beta = \omega_n\sqrt{1-\xi_n^2},$$

otrzymuje się

$$K_{w_n}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left[\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right] \tag{2.10}$$

i ostatecznie

$$K_{w_n}(\tau) = \frac{S_{q_n}}{\xi_n\omega_n} \left(\frac{P_o}{A\varrho}\right)^2 \frac{\pi}{2} \frac{4}{\omega_n^2\varphi_o^2} \begin{Bmatrix} \sin^2\mu_n\psi \\ \cos^2\mu_n\psi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin^2\mu_n\varphi \\ \cos^2\mu_n\varphi \end{Bmatrix} \times$$

$$\times\, e^{-\xi_n\omega_n|\tau|}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\xi_n^2}\,\tau + \frac{\xi_n}{\sqrt{1-\xi_n^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\xi_n^2}\,|\tau|\right). \tag{2.11}$$

Łatwo zauważyć, że przyjmując w (2.11) $\tau = 0$ otrzymujemy zależność (2.6), co jest sprawdzeniem zależności

$$K_{w_n}(0) = \overline{w_n^2}(\varphi) = \sigma^2,$$

gdzie: σ^2 jest również wariancją w (2.10).

3. Wariancja momentu zginającego i jego funkcja korelacji

Przy założeniu warunku nieściśliwości pręta moment zginający wyraża się wzorem

$$M = -\frac{EI}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w\right). \tag{3.1}$$

Wobec powyższego dla n-tej formy momentu zginającego przy wymuszeniu harmonicznym otrzymuje się

$$M_n(\varphi)e^{i\omega t} = \frac{EI}{A\varrho R^2}\,\frac{(\mu_n^2-1)\,e^{i\omega t}\,\frac{2}{\varphi_o}\int\limits_0^{\varphi_o} q(\varphi)\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\varphi\\ \cos\mu_n\varphi\end{Bmatrix}d\varphi\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\varphi\\ \cos\mu_n\varphi\end{Bmatrix}}{\alpha E\left[(\mu_n^2-1)^2+1\right]+\frac{2h\omega}{A\varrho}i-\omega^2}. \tag{3.2}$$

Podstawiając $q(\varphi) = \delta(\varphi-\varphi_1)$ otrzymuje się funkcję Greena

$$R_n(\varphi,\varphi,t) = M_n^{(1)}(\varphi)e^{i\omega t} = \frac{EI\,e^{i\omega t}\,(\mu_n^2-1)\frac{2}{\varphi_o}\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\varphi_1\\ \cos\mu_n\varphi_1\end{Bmatrix}}{A\varrho R^2\left[(\omega_n^2-\omega^2)+\frac{2h\omega}{A\varrho}i\right]}\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\varphi\\ \cos\mu_n\varphi\end{Bmatrix} \tag{3.3}$$

Oczywiście przy dowolnym umiejscowieniu obciążenia

$$M_n(\varphi,t) = \int\limits_0^{\varphi_o} q(\varphi_1)\,R_n(\varphi,\varphi_1,t)\,d\varphi_1. \tag{3.4}$$

Zakładając, jak poprzednio, wymuszenie w miejscu

$$q(\varphi_1) = P_o\,\delta(\varphi_1-\psi) \tag{3.5}$$

i biorąc moduł wyrażenia (3.4) otrzymuje się

$$\left|H_{M_n}(\omega,\varphi)\right| = \frac{P_o}{A\varrho}\frac{EI}{R^2}\,\frac{(\mu_n^2-1)\,\frac{2}{\varphi_o}\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\psi\\ \cos\mu_n\psi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\varphi\\ \cos\mu_n\varphi\end{Bmatrix}}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\,\xi_n^2\omega_n^2\omega^2}}. \tag{3.5}$$

Porównując wyrażenia (3.5) oraz (2.2) otrzymano zależność

$$\left|H_{M_n}(\omega,\varphi)\right| = \frac{EI}{R^2}(\mu_n^2-1)\,\left|H_{w_n}(\omega,\varphi)\right|. \tag{3.6}$$

Wobec powyższego wyrażenia na wariancję i funkcję korelacji różnią się tylko współczynnikiem $(EI)^2\,.\,(\mu_n^2-1)^2/R^4$ i w rezultacie, przy założeniu jak poprzednio "białego szumu", otrzymuje się

$$\overline{M_n^2}(\varphi) = \frac{P_o}{A\varrho}^{2}\,\frac{4}{\varphi_o^2}\begin{Bmatrix}\sin^2\mu_n\psi\\ \cos^2\mu_n\psi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin^2\mu_n\varphi\\ \cos^2\mu_n\varphi\end{Bmatrix}\frac{(EI)^2}{R^4}(\mu_n^2-1)^2\,\frac{\pi}{2}\,\frac{S_{q_n}}{\zeta_n\omega_n^3} \tag{3.7}$$

oraz średnie kwadratowe odchylenie momentu

$$\sqrt{\overline{M_n^2}(\varphi)} = \frac{P_o}{A\varrho}\,\frac{2}{\varphi_o}\,\frac{EI}{R^2}(\mu_n^2-1)\sqrt{\frac{\pi}{2}\,\frac{S_{q_n}}{\zeta_n\omega_n^3}}\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\psi\\ \cos\mu_n\psi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\varphi\\ \cos\mu_n\varphi\end{Bmatrix}. \tag{3.8}$$

Dla funkcji korelacji otrzymano wyrażenie

$$K_{M_n}(\tau) = \frac{S_{q_n}}{\zeta_n\omega_n^3}\left(\frac{P_o}{A\varrho}\right)^2\frac{\pi}{2}\,\frac{4}{\varphi_o^2}\begin{Bmatrix}\sin^2\mu_n\psi\\ \cos^2\mu_n\psi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin^2\mu_n\varphi\\ \cos^2\mu_n\varphi\end{Bmatrix}\frac{(EI)^2}{R^4}(\mu_n^2-1)^2\ \mathrm{x}$$

$$\mathrm{x}\ e^{-\zeta_n\omega_n\tau}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta_n^2}\,\tau+\frac{\zeta_n}{\sqrt{1-\zeta_n^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta_n^2}\,|\tau|\right). \tag{3.9}$$

Jeżeli wzajemna korelacja między poszczególnymi formami drgań jest równa zeru lub mała [1], [2] to ostateczna wartość wariancji jest równa sumie wariancji n-tych form drgań zarówno dla przemieszczeń jak i dla momentu

$$w^2(\varphi) = \left(\frac{P_o}{A\varrho}\,\frac{2}{\varphi_o}\right)^2 \sum_{\omega_n<\omega_c} \begin{Bmatrix}\sin^2\mu_n\psi\\ \cos^2\mu_n\psi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin^2\mu_n\varphi\\ \cos^2\mu_n\varphi\end{Bmatrix}\frac{\pi}{2}\,\frac{S_{q_n}}{\xi_n\omega_n^3}, \tag{3.10}$$

$$M^2(\varphi) = \left(\frac{P_o}{A\varrho}\,\frac{2}{\varphi_o}\,\frac{EI}{R^2}\right)^2 \sum_{\omega_n<\omega_c} (\mu_n^2-1)^2\,\frac{\pi}{2}\,\frac{S_{q_n}}{\xi_n\omega_n^2}\begin{Bmatrix}\sin^2\mu_n\psi\\ \cos^2\mu_n\psi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin^2\mu_n\varphi\\ \cos^2\mu_n\varphi\end{Bmatrix}. \tag{3.11}$$

4. Przykład

Do obliczeń przyjęto pręt kołowy o długości kątowej i masie jednostkowej $A\varrho = 1$.

Przyjęto

$$\alpha = \frac{I}{R^4} = \frac{100}{E}.$$

Założono stałą gęstość spektralną wymuszenia w zakresie częstości od -300 (rad/sek) do +300 (rad/sek):

$$S_{q_n} = 1.$$

Ze względu na niemożliwość obliczenia współczynnika tłumienia dla każdej formy osobno ze znanych właściwości materiału, przyjęto wartość tej liczby dla każdej formy jednakową $\xi_n = 0{,}01$.

Wyniki dla pierwszych 5 form drgań zestawiono w tablicy

n	1	2	3	4	5
$\omega_n = \sqrt{\alpha E\left[(\mu_n^2-1)^2+1\right]}$	10,0	31,6	80,5	150,1	240,0
$\omega_n^{\frac{3}{2}}$	31,6	177,2	715	1800	3700
$\dfrac{\sqrt{\overline{w_n^2}(\varphi)}/P_o}{\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\psi\\ \cos\mu_n\psi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\varphi\\ \cos\mu_n\varphi\end{Bmatrix}} = \dfrac{7,92}{\omega_n^{3/2}}$	0,251	0,046	0,011	0,0044	0,0021
$\dfrac{\sqrt{\overline{M_n^2}(\varphi)}/P_oR^2}{\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\psi\\ \cos\mu_n\psi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin\mu_n\varphi\\ \cos\mu_n\varphi\end{Bmatrix}}$	0	13,8	8,8	6,5	5,05

Jak wynika z przytoczonych wyników tablicy dla przykładu cyfrowego średnie kwadratowe odchylenie przemieszczeń maleje dość szybko ze wzrostem numeru formy drgań. Wyższe formy wpływają więc już bardzo mało na całkowite średnie kwadratowe odchylenie, które jest sumą średnich kwadratowych odchyleń (przy pominięciu korelacji między poszczególnymi formami drgań).

LITERATURA

[1] Random Vibration, Vol. 2, Chapt, 1, S.H. Crandall (ed), the Technology Press and John Wiley and Sons, N.Y. 1959.

[2] Bototin W.W.: Statisticzeskije metody w stroitielnoj mechanikie. I.L.S., Moskwa 1965, s. 140-150.

[3] Skalmierski B.: Problemy statyki i dynamiki powłok walcowych użebrowanych, Zeszyt Naukowy Pol. Śląskiej Nr 75, s. 20-26.

[4] Skalmierski B.: Zagadnienie lepkosprężystego pręta kołowego na podłożu lepkosprężystym, Rozprawy Inżynierskie 2,13 (1965).

[5] Pugaczew W.S.: Teoria funkcji przypadkowych i jej zastosowanie do zagadnień sterowania automatycznego, MON, 1960.

[6] Lyon R.H.: Response of a Nonlinear String to Random Excitation. J. Acoust. Soc. Amer., v. 32, No. 8, 1960.

[7] Swiesznikow A.A.: Podstawowe metody funkcji losowych, PWN, Warszawa, 1965, s. 79-153.

О ПРОБЛЕМЕ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ
ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Р е з ю м е

В работе рассматрены линейные затухающие колебания при стохастическом воздействии сил. Проблема решена при помощи корреляционной теории. Определено средний квадрат прогиба и изгибающего момента при условии "белого шума".

PROBLEM OF VIBRATIONS OF THE CIRCULAR BAR BY THE RANDOM FORCING

S u m m a r y

A linear damping vibrations of the circular bar under the random excitation by loading have been presented in this paper.

The problem has been solved by using the correlation theory. The mean square deviation and the correlation function for radial dislocation and bending moment by "white noise" assumption have been obtained.