ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: MECHANIKA z. 40 Nr kol. 260

RYSZARD GRYBOŚ

METODY OBLICZEŃ WYTRZYMAŁOŚCIOWYCH PRZY OBCIĄŻENIACH UDAROWYCH

Streszczenie. Omówiono ogólnie zalety i braki klasycznej teorii uderzania Newtona oraz quasistatycznej teorii Hertza.
Bardziej szczegółowo przedstawiono zarys teorii stanów nieustalonych dyskretnego układu mechanicznego. Zdefiniowano współczynnik uderzenia oraz pojęcie widma uderzenia. W szczególności omówiono ujednolicone widmo uderzenia.

1. Charakterystyka ogólna różnych teorii uderzenia dla układów ciągłych

Uważny czytelnik licznych publikacji z zakresu teorii uderzenia dostrzega wielką rozmaitość metod rozwiązywania podstawowego zagadnienia wytrzymałościowego wspomnianej teorii. Zagadnienie to polega na określeniu maksymalnych naprężeń dynamicznych w ciałach ulegających zderzeniu.

Proces uderzenia charakteryzuje się występowaniem sił oddziaływania, które stają się źródłem intensywnej fali naprężeń. Fala ta rozprzestrzenia się po całej objętości zderzających się ciał, poczem ulega wielokrotnym odbiciom od powierzchni granicznych. Procesom tym towarzyszy dyssypacja energii i "rozmywanie" czoła fali naprężeń. Dlatego w teoretycznym ujęciu zagadnienia wyodrębniamy tzw. efekty lokalne, które powstają w obszarze bliskim miejsca styku, a które dość istotnie róż-

nią się od reakcji ciał w punktach oddalonych od tego miejsca. W związku z tym rozróżniamy odkształcenia lokalne i ogólne.

Odkształceniom lokalnym towarzyszą stosunkowo duże naprężenia powierzchniowe, których wypadkową jest tzw. siła uderzenia. Na ogół jest ona powiązana z odkształceniem lokalnym zależnością nieliniową. Jest to przyczyną zasadniczych trudności matematycznych, wobec których stajemy przy rozwiązywaniu większości zagadnień teorii uderzenia.

Dla pokonania tych trudności przyjmuje się różne założenia upraszczające, które polegają m.in. na linearyzacji charakterystyki podatności lokalnej, na redukcji ilości stopni swobody do kilku (lub do jednego), czyli na zastępowaniu układu ciągłego odpowiednio dobranym modelem dyskretnym itd. Oprócz tego różne typy uderzenia (podłużne, poprzeczne, skrętne) opisane są rozmaitymi układami równań różniczkowych i algebraicznych, dla rozwiązania których stosujemy metody mniej lub więcej dokładne i o różnym stopniu pracochłonności.

W tej sytuacji nie można dziś mówić o istnieniu jakiejś ogólnej teorii uderzenia, a co najwyżej potrafimy wyodrębnić pewne grupy zagadnień dynamicznych, dające się opisać określonym równaniem lub układem równań, które można z kolei rozwiązać albo w sposób zamknięty, albo częściej za pomocą jednej z licznych metod przybliżonych.

W klasycznej teorii uderzenia, której podstawy dał jeszcze Galileusz i Newton, operuje się modelem ciała sztywnego, a samo uderzenie traktuje się jako proces chwilowy ("bezczasowy"). Przy takich ograniczeniach można wyznaczyć jedynie prędkości ciał po zderzeniu oraz wartość impulsu (co na ogół ma znaczenie drugorzędne), przy czym dokładność tych obliczeń uwarunkowana jest jeszcze trafnością oceny współczynnika restytucji.

Natomiast nie można tą drogą wyznaczyć tak ważnych wielkości, jak siła i długotrwałość uderzenia, które są nieodłącznie związane z wystąpieniem odkształceń lokalnych. Dlatego Hertz zastosował swą statyczną teorię zagadnień stykowych do teorii zderzenia zakładając, że rozkład (lecz nie wartość) odkształceń lokalnych podczas uderzenia jest analogiczny jak przy statycznym nacisku ciał.

Ponieważ w teorii Hertza pomija się efekty falowe (a więc odkształcenia ogólne), przeto odnosi się ona tylko do ciał o budowie zwartej, czyli do tzw. ciał kulistych. Teoria Hertza opiera się na modelu ciała, które będziemy nazywać dalej ciałem quasistatycznym. Jest to ciało, które pod działaniem zewnętrznych sił skupionych doznaje wyłącznie odkształceń lokalnych. Ponadto w omawianej teorii rozpatruje się wyłącznie zderzenia sprężyste ciał swobodnych.

Mimo tych ograniczeń teoria Hertza była niewątpliwym krokiem naprzód w rozwoju teorii uderzenia, tym bardziej, że wynikające z niej wzory na siłę i długotrwałość uderzenia znalazły potwierdzenie w licznych eksperymentach.

Drugi skrajnie przeciwny punkt widzenia polega na wyłącznym rozpatrywaniu efektów falowych wywołanych uderzeniem, z całkowitym pominięciem efektów lokalnych. Pierwsze, rozwiązane przez de Saint Venanta zagadnienia tego typu dotyczyły kolinearnego zderzenia prętów prostych o płaskich powierzchniach czołowych oraz poprzecznego uderzenia w belkę swobodnie podpartą. Oba te rozwiązania posiadają dziś już tylko historyczne znaczenie.

Podłużne zderzenie prętów z półkuliście zaokrąglonymi końcami rozwiązał ściśle J.E. Sears w 1908 r., a poprzeczne środkowe uderzenie ciała kulistego w belkę sprężystą rozwiązał S.P. Timoshenko w 1912 r.

Oba wspomniane zagadnienia, choć o dużym znaczeniu praktycznym, stanowią zaledwie drobny fragment problemów dynamicznych, na jakie natrafia projektant współczesnych konstrukcji maszynowych lub budowlanych.

2. Zarys teorii stanów nieustalonych w dyskretnych układach mechanicznych

Rzeczywiste konstrukcje stanowią zwykle bardziej skomplikowany ustrój sprężysty niż prosty pręt lub belka. Dodatkową komplikację stanowi fakt, że obciążenia udarowe bardzo często wywołują sprężysto-plastyczny stan odkształceń ogólnych.

Zauważmy, że nowe konstrukcje narażone na sporadycznie działające obciążenia udarowe powinny być z reguły projektowane według warunku nośności granicznej.

W tej sytuacji w rozwiązaniach teoretycznych rezygnujemy przede wszystkim z traktowania ustroju jako układu ciągłego i zastępujemy go odpowiednio dobranym modelem dyskretnym. Model ten składa się z jednej, dwóch lub kilku mas skupionych (tzw. zastępczych), połączonych nieważkimi więzami sprężystymi. Oprócz tego niekiedy zachodzi potrzeba wprowadzenia więzów dających dysypację energii, przy czym najczęściej przyjmuje się tłumiki liniowo-wiskotyczne.

Następnie model obciążamy siłą uderzenia o znanym przebiegu czasowym, lub - jak mówimy - o znanym kształcie impulsu. W tym celu musimy uprzednio rozwiązać odpowiednie zagadnienie lokalne teorii uderzenia. Najczęściej korzystamy w tym względzie z teorii Hertza (dotyczącej uderzenia sprężystego) lub z półempirycznej teorii uderzenia sprężysto-plastycznego. Oczywiście przy takim postępowaniu zarówno w jednym jak i w drugim przypadku kryje się przybliżone założenie, iż podatność ogólna

ustroju nie wpływa na przebieg czasowy siły uderzenia. Założenie to jest tym bliższe rzeczywistości, im większa jest podatność ogólna od podatności lokalnej.

W dalszym ciągu omawianej metody badamy ruch modelu wymuszony siłą uderzenia, a następnie ruch swobodny, przy czym stan kinematyczny przy końcu uderzenia określa warunki początkowe dla drugiej fazy ruchu. W tym ujęciu teoria uderzenia korzysta przeto z rozwiązań znanych w teorii stanów nieustalonych dyskretnych układów mechanicznych.

Omówimy teraz pokrótce to zagadnienie z uwzględnieniem specyfiki obliczeń wykonywanych w teorii uderzenia.

Niechaj na układ mechaniczny posiadający n stopni swobody działają zewnętrzne siły skupione o znanym przebiegu czasowym $P_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, s \leqslant n)$ dla $0 \leqslant t \leqslant \tau$ oraz $P_j(t) = 0$ dla $t > \tau$, gdzie τ - długotrwałość uderzenia. Podczas uderzenia ruch układu opisany jest we współrzędnych uogólnionych $x_i(t)$ równaniem

$$M\ddot{x} + Kx = P(t) \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \tag{1}$$

przy zerowych warunkach początkowych, zaś podczas ruchu swobodnego równaniem

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad \text{dla} \quad t \geqslant \tau \tag{2}$$

z warunkami początkowymi

$$x_\tau = x(\tau), \qquad v_\tau = \dot{x}(\tau), \tag{3}$$

które wynikają z rozwiązania poprzedniego dla $t = \tau$. W równaniach powyższych M jest diagonalną macierzą bezwładności

n-tego stopnia, K - kwadratową symetryczną macierzą sztywności; x(t), P(t) są n - wymiarowymi wektorami kolumnowymi odpowiednio współrzędnych uogólnionych oraz sił uderzenia, przy czym składowymi wektora P(t) są moduły uogólnionych sił zewnętrznych, odpowiadających poszczególnym współrzędnym uogólnionym.

Zagadnienie wymuszonych drgań układu o wielu stopniach swobody najwygodniej rozwiązuje się we współrzędnych naturalnych $q_i(t)$.

Przypuśćmy, że mamy określoną macierz transformacji współrzędnych A, tak że $x = Aq$, (q - wektor kolumnowy współrzędnych naturalnych). Macierz A normujemy względem macierzy bezwładności pisząc

$$A^T MA = U , \tag{4}$$

gdzie U - macierz jednostkowa, zaś symbol "T" oznacza macierz transponowaną.
Zatem

$$q(t) = A^T M x(t). \tag{5}$$

Ponadto

$$A^T KA = \Omega^2 , \tag{6}$$

gdzie $\Omega^2 = \left[\omega_i^2\right]$ jest macierzą diagonalną, której elementami są kwadraty częstości własnych i-tej formy drgań układu.

Weźmy teraz pod uwagę równanie nieautonomiczne (1). Chcąc przepisać go we współrzędnych naturalnych podstawiamy $x = A q$, a następnie mnożymy lewostronnie przez A^T. Uwzględniając (4) i (6) otrzymujemy

$$\ddot{q} + \Omega^2 q = Q, \tag{7}$$

gdzie $Q(t) = A^T P(t)$, $Q_i(t) = \sum_j A_{ij} P_j(t)$ lub w postaci skalarowej

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = Q_i. \tag{8}$$

Tak więc różniczkowe równania ruchu układu rozprzęgają się dzięki wprowadzeniu współrzędnych naturalnych.

Rozwiązanie ogólne równania (7) lub (8) ma znaną postać całki Dunamela. Zatem macierzowe równanie ruchu układu podczas uderzenia we współrzędnych naturalnych przyjmuje postać

$$q(t) = G(t)\, q(0) + H(t)\, \dot{q}(0) + \int_0^t H(t - t')\, Q(t')\, dt' \qquad \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{9}$$

gdzie

$$G(t) \equiv \left[\cos \omega_i t\right], \qquad H(t) \equiv \left[\frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i t\right]$$

są diagonalnymi macierzami n-tego stopnia.

Funkcję (9) można także zastosować do opisu drgań układu po uderzeniu. W tym celu należy zamiast $q(0)$, $\dot{q}(0)$ podstawić $q(\tau)$, $\dot{q}(\tau)$, a w całce przyjąć $t = \tau$.

Dla wektora współrzędnych uogólnionych otrzymujemy odpowiednio wzory

$$x(t) = \int_0^t A\, H(t - t')\, A^T\, \dot{P}(t')\, dt' \qquad \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \tag{10}$$

oraz

$$x(t) = AG(t)\, A^T M\, x(\tau) + AH(t)\, A^T M\, \dot{x}(\tau) + \int_0^{\tau} AH(\tau - t)\, A^T P(t')\, dt' \quad \text{dla} \quad t \geqslant \tau. \tag{11}$$

3. Współczynnik uderzenia i widmo uderzenia

Jeśli mamy określony ruch układu podczas i po uderzeniu, to wyznaczenie maksymalnych reakcji dynamicznych nie nastręcza już zasadniczych trudności.

Niechaj

$$P(t) = P_m f(t),$$

gdzie P_m jest maksymalną wartością siły uderzenia, zaś $\max |f(t)| = 1$. Zwykle wszystkie siły uderzenia, działające na poszczególne masy zastępcze układu dyskretnego, mają jednakowy przebieg czasowy (tzn. jednakowy kształt impulsu), a różnią się tylko wartościami maksymalnymi. Napiszemy przeto dla siły uderzenia, odpowiadającej i-tej współrzędnej naturalnej, wzór następujący

$$Q_i(t) = f(t) \sum_j A_{ij} P_{mj}$$

oraz

$$\max Q_i(t) = \sum_i A_{ij} P_{mj} \equiv Q_{mi}.$$

Zatem

$$\max |q_i(t)| = \frac{Q_{mi}}{\omega_i} \max \left| \int_0^t f(t') \sin \omega_i (t - t')\, dt' \right| \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Spośród k amplitudalnych przemieszczeń, określonych powyższym wzorem, do dalszych rozważań wybieramy wartość największą. Przypuśćmy, że odpowiada jej i = 1, czyli

$$\max \left| q_1(t) \right| \equiv \max \max \left| q_i(t) \right| \qquad i = 1,2,\ldots,k.$$

Niechaj q_{s1} oznacza odnośną współrzędną przy <u>statycznym</u> działaniu siły Q_{m1}, czyli $q_{s1} = Q_{m1}\, \omega_1^2$.

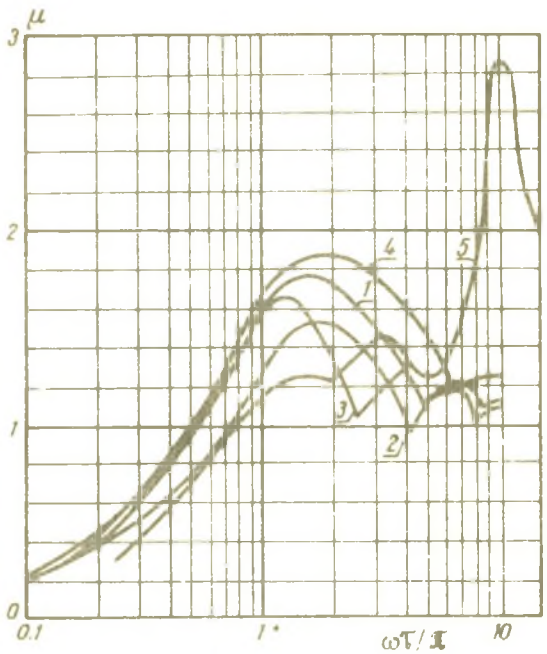
Stosunek

$$\frac{\max \left| q_1(t) \right|}{q_{s1}} = \omega_1 \max \left| \int_0^t f(t') \sin \omega_1 (t - t')\, dt' \right| \equiv \mu \qquad (12)$$

nazywać będziemy <u>współczynnikiem uderzenia</u>. Jest to liczba wskazująca ile razy maksymalna reakcja dynamiczna układu liniowego jest większa od reakcji wywołanej statycznym działaniem na ten układ sił uderzenia o wartości maksymalnej.

Dla celów obliczeniowych wygodnie jest przedstawić wykres zależności współczynnika uderzenia (μ) od względnej długotrwałości uderzenia ($\omega_1 \tau$); wykres taki nazywa się <u>widmem uderzenia</u>. Oczywiście dla różnych kształtów impulsu (określonych przez postać funkcji f(t)) otrzymuje się różne widma uderzenia. Na rysunku 1 przedstawione są widma uderzenia dla pięciu impulsów o różnych kształtach, zestawionych w tablicy [1].

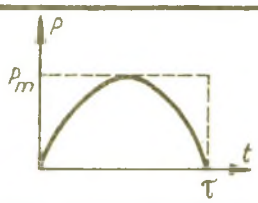
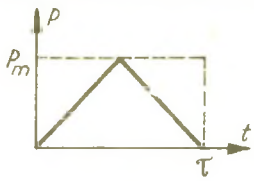
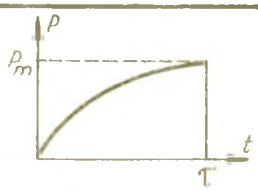
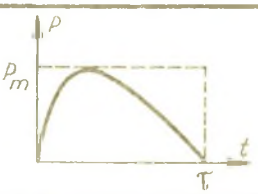
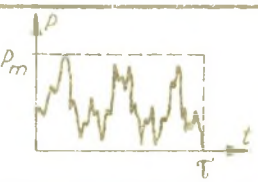
Nieregularny impuls 5 uzyskany został w czasie prób, polegających na udarowym obciążeniu pewnej konstrukcji o skomplikowanej budowie. Impuls ten obrazuje reakcję dynamiczną takiej konstrukcji, mierzoną w miejscu uderzenia za pomocą akcelerometru przytwierdzonego do bijaka. Reakcja ta jest wypadkową superpozycji drgań podstawowych oraz wyższych harmonicznych i tym tłumaczy się wybitnie nieregularny kształt jej impulsu.



Rys. 1. Widma uderzenia dla impulsów o różnych kształtach

Współczynnik uderzenia μ dla tego impulsu przy $\omega\tau \approx 10\pi$ posiada wyjątkowo dużą wartość. Jest to spowodowane rezonansem, jaki zachodzi przy zrównaniu długotrwałości uderzenia z okresem pewnej składowej harmonicznej.

Poza tym przebiegi krzywych na rys. 1 wykazują dużą rozmaitość. Jest to niewątpliwie pewną niedogodnością dla konstruktora, zważywszy zwłaszcza na niemożność dokładnego określenia kształtu impulsu w konkretnych przypadkach.

Lp.	Nazwa impulsu	Kształt	ψ
1.	Sinusoidalny symetryczny		$\frac{2}{\pi}$
2.	Trójkątny symetryczny		$\frac{1}{2}$
3.	Ćwierćsinusoidalny		$\frac{2}{\pi}$
4.	Sinusoidalny niesymetryczny		0,658
5.	Nieregularny (doświadcz.)		0,480

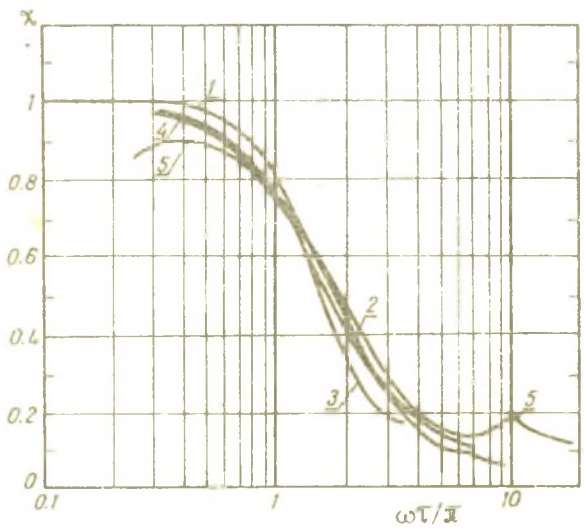
4. Ujednolicone widmo uderzenia

Ch.E. Crede [1] zaproponował ciekawą innowację, która prowadzi do pewnego ujednolicenia wyników, dzięki czemu można w pewnym sensie uniezależnić tok obliczeń od kształtu impulsu. Wprowadźmy w tym celu do rozważań współczynnik

$$\psi = \frac{1}{P_m \tau} \int_0^{\tau} P(t)\, dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t)\, dt \qquad (0 < \psi \leqslant 1) \qquad (13)$$

przedstawiający stosunek wartości danego impulsu $\int_0^{\tau} P(t)\, dt$ do impulsu prostokątnego o analogicznej długotrwałości τ i analogicznej maksymalnej wartości siły uderzenia P_m.

W tablicy podane są m.in. wartości ψ dla porównywanych impulsów.



Rys. 2. Ujednolicone widma uderzenia

O ile teraz na osi rzędnych zamiast współczynnika uderzenia μ będziemy odmierzać wielkość $\mu/\omega\tau\psi \equiv \chi$, to, jak widać z rys. 2, krzywe obrazujące zależność $\chi = \chi(\omega\tau)$ dla różnych kształtów impulsów mają bardzo podobny przebieg i tworzą na ogół zwartą wiązkę [1].

W tym sensie wykres na rys. 2 można nazwać ujednoliconym widmem uderzenia.

Jest godne podkreślenia, że w granicach tej wiązki mieści się nawet krzywa dla impulsu nieregularnego 5, przy czym pewne odstępstwo daje się zauważyć tylko w pobliżu $\omega\tau \approx 10\pi$.

Gdyby pokusić się o napisanie równania ujednoliconego widma, to można w tym celu wykorzystać zasadniczo funkcję $\mu(\omega\tau)$ dla dowolnego kształtu impulsu. Jeśli np. uznamy symetryczny impuls sinusoidalny za reprezentatywny w tym względzie ($f(t) = \sin\frac{\pi t}{\tau}$), to z pomocą łatwego rachunku (dla $\Psi = 2/\pi$) otrzymujemy przybliżone równania ujednoliconego widma uderzenia

$$\chi = \frac{\pi^2}{\pi^2 - (\omega\tau)^2} \cos\frac{\omega\tau}{2} \quad \text{dla } \omega\tau \leqslant \pi,$$

$$\chi = \frac{\pi}{2(\omega\tau - \pi)} \sin\frac{2\pi^2 n}{\omega\tau + \pi} \quad \text{dla } \omega\tau > \pi,$$

przy czym stałą n dobiera się tak:

$n = 1$ dla $\pi < \omega\tau < 3\pi$,
$n \leqslant 2$ dla $3\pi < \omega\tau < 5\pi$,
$n \leqslant 3$ dla $5\pi < \omega\tau < 7\pi$ itd.

Z pomocą ujednoliconego widma uderzenia można obliczyć maksymalną reakcję dynamiczną układu w sposób prawie niezależny od charakteru wymuszenia impulsowego. Ta właściwość ujednoliconego widma okazuje się cenną zwłaszcza w przybliżonych obliczeniach projektowych układów dynamicznych o złożonej budowie, jak również w tych przypadkach uderzenia, w których nie udaje się a priori określić kształtu impulsu w sposób dokładny i jednoznaczny.

LITERATURA

[1] Crede Ch.E.: The effect of pulse shape on simple systems under impulsive loading, Trans. ASME 1955, vol. 77, 957--961.

МЕТОДЫ ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТОВ ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ

Р е з ю м е

Обсуждено достойнства и недостатки классической теории удара Невтона и квасистатической теории Герца. Болье подробно представлено очерк теории нестационарных состоянии дискретной механической системы.

Сформульировано коэффицент удара а также поняте спектра удара. Особенно обсуждено унифицированный спектр удара.

METHODS OF STRENGTH MEASUREMENTS IN IMPACT LOADINGS

S u m m a r y

General advantages and disadvantages of the classical Newton impact theory, as well as that of quasistatic Hertz's theory have been discussed. In a more detailed way an outline of the

transient discrete mechanical system states theory has been presented. The impact coefficient and the idea of impact spectrum were also determined. In particular the unified impact spectrum has been discussed.