ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: MECHANIKA z. 40 Nr kol. 260

EUGENIUSZ ŚWITOŃSKI

STATECZNOŚĆ PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH O PROFILU OTWARTYM I STAŁYM PRZEKROJU

Streszczenie. Przedstawiono rozwiązanie zagadnienia stateczności pręta cienkościennego o profilu otwartym i stałym przekroju, dla dowolnych warunków brzegowych.
Rozwiązanie opiera się na założeniach W.Z. Własowa w ujęciu liniowym.
Obliczenia przeprowadzono z punktu widzenia zaprogramowania ich na elektroniczne maszyny cyfrowe.

1. Wstęp

Pręty cienkościenne ze względu na swą ekonomiczność i lekkość, mają szerokie zastosowanie w wielu gałęziach przemysłu, w szczególności w budowie samolotów, okrętów, maszyn, w budownictwie itp.

Dotychczasowe prace poświęcone obliczaniu prętów cienkościennych opierają się w większości na założeniach W.Z. Własowa [1].

Zagadnienie stateczności prętów cienkościennych o stałym przekroju sprowadza się do rozwiązania układu trzech jednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych, czwartego rzędu. Dla przypadków szczególnych, takich jak symetria przekroju, stała siła wzdłuż osi itp., układ równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach przekształca się do prostszej postaci.

Rozwiązanie zagadnienia stateczności pręta cienkościennego o stałym przekroju dla pewnych szczególnych warunków brzegowych (takich samych na obu końcach), przedstawione w pracy [1] i [2],

opiera się na przyjęciu funkcji przemieszczeń η, ξ i kąta obrotu φ w postaci funkcji $\sin\alpha x$ lub $\cos\alpha x$ spełniającej warunki brzegowe. Obliczenie parametrów krytycznych prętów cienkościennych o przekroju bisymetrycznym i profilu otwartym, przy pomocy elektronicznych maszyn cyfrowych, przedstawiono w pracy [4].

Układ nieliniowych równań różniczkowych rozwiązano metodą kolejnych przybliżeń.

Zastosowanie metody Bubnowa - Galerkina do rozwiązania układu równań różniczkowych stateczności pręta cienkościennego, ściskanego siłą przyłożoną centralnie podano w pracy [5]. Praca [6] przedstawia przybliżone określenie obciążeń krytycznych prętów cienkościennych za pomocą metody Bubnowa, przy wprowadzeniu pewnych uproszczeń. Otrzymane wyniki z rozwiązania teoretycznego porównano z badaniami doświadczalnymi.

Analizę wpływu wymiarów przekroju poprzecznego i sposobu podparcia pręta cienkościennego ściskanego centralnie na wielkość siły krytycznej przedstawia praca [7].

W pracy niniejszej rozwiązano zagadnienie stateczności pręta cienkościennego o profilu otwartym i stałym przekroju wzdłuż jego osi w ujęciu liniowym, dla dowolnych warunków brzegowych, przy założeniach W.Z. Własowa.

2. Podstawowy układ równań różniczkowych

Przyjmując założenia wprowadzone przez R. Kappusa, a następnie uogólnione przez W.Z. Własowa dla tzw. technicznej teorii prętów cienkościennych, można wyprowadzić następujące równania różniczkowe równowagi granicznej pręta cienkościennego, ściskanego siłą działającą centralnie. Równania te podane w pracach [1], [2], [3] i innych, dla pręta o stałym przekroju i stałej sile wzdłuż jego osi mają postać

$$\left.\begin{aligned} &EJ_z\eta^{IV} + P\eta'' + Pz_\alpha\varphi'' = 0,\\ &EJ\xi^{IV} + P\xi'' - Py_\alpha\varphi'' = 0,\\ &EJ_\omega\varphi^{IV} + z_\alpha P\eta'' - Py_\alpha\xi'' + (r^2 P - GJ_x)\varphi'' = 0,\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

gdzie:

η - przemieszczenie punktów osi środków zginania w kierunku osi y,

ξ - przemieszczenie punktów osi środków zginania w kierunku osi z,

φ - kąt obrotu przekroju wokół środka zginania,

x,y,z - główne centralne osie bezwładności przekroju,

E - moduł sprężystości podłużnej,

G - moduł sprężystości poprzecznej.

Pozostałe symbole występujące w równaniu (1) przedstawiają wielkości, które są określone wzorami

$$J_y = \int_A z^2 dA, \qquad J_z = \int_A y^2 dA, \qquad J_\omega = \int_A \omega^2\, dA,$$

$$r = \frac{J_o}{A} + y_\alpha^2 + z_\alpha^2, \qquad J_o = J_z + J_y.$$

J_x - moment bezwładności przy czystym skręcaniu, dla profilu złożonego z odcinków prostych mamy $J_x = \frac{\alpha}{3}\sum_n b_n \delta_n$.
Inne oznaczenia podano na rys. 1.

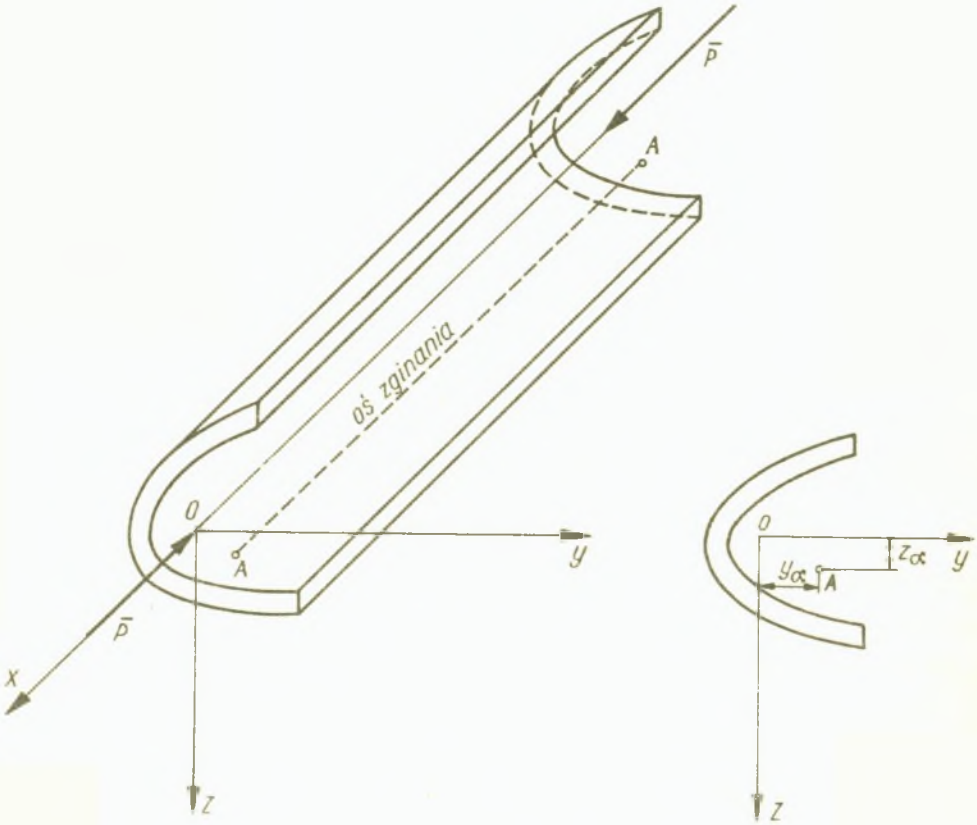
Wprowadzimy macierze symetryczne A i B oraz macierz kolumnową u zgodnie z poniższymi określeniami

$$A = \begin{bmatrix} EJz & 0 & 0 \\ 0 & EJy & 0 \\ 0 & 0 & EJ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} P & 0 & Pz \\ 0 & P & -Py \\ Pz & -Py & (Pr - GJx) \end{bmatrix},$$

$$u = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \\ \varphi \end{bmatrix}$$

wówczas zapis równań (1) w postaci macierzowej przedstawia się następująco:

$$A\,u^{IV} + B\,u'' = 0.$$



Rys. 1

3. Rozwiązanie

Dokonując na układzie (1) transformacji Laplace'a przekształcimy układ równań różniczkowych (1) w układ trzech niejednorodnych równań algebraicznych, ze względu na transformaty. Równania algebraiczne przyjmą następującą postać:

$$\bar{\eta}(s^4EJ_z + s^2P) + \bar{\varphi}s^2Pz_\alpha = \eta_o(s^3EJ_z + sP) + \eta'_o(s^2EJ_z+P) +$$

$$+ \eta''_o sEJ_z + \eta'''_o EJ_z + \varphi_o sPz_\alpha + \varphi'_o Pz_\alpha ,$$

$$\bar{\xi}(s^4EJ_y + s^2P) - \bar{\varphi}s^2Py_\alpha = \xi_o(s^3EJ_y + sP) + \xi'_o(s^2EJ_y+P) +$$

$$+ \xi''_o sEJ_y + \xi'''_o EJ_y - \varphi_o sPy_\alpha - \varphi'_o Py_\alpha , \tag{2}$$

$$\bar{\eta}s^2Pz_\alpha - \bar{\xi}s^2Py_\alpha + \bar{\varphi}\left[s^4EJ_\omega + s^2(r^2P - GJ_x)\right] = \eta_o sPz_\alpha +$$

$$+ \eta'_o Pz_\alpha - \xi_o sPy_\alpha - \xi'_o Py_\alpha + \varphi_o\left[s^3EJ_\omega + s(r^2P - GJ_x)\right] +$$

$$+ \varphi'_o\left[s^2EJ_\omega + r^2P - GJ_x\right] + \varphi''_o sEJ_\omega + \varphi'''_o EJ_\omega ,$$

Tutaj $\bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{\varphi}$ oznaczają transformaty funkcji η, ξ, φ a $\eta_o, \ldots\ldots, \eta'''_o$, $\xi_o, \ldots\ldots, \xi'''_o$, $\varphi_o, \ldots\ldots, \varphi'''_o$ oznaczają odpowiednio wartości funkcji η, ξ, φ i ich pochodnych dla $x = 0$, $s = \alpha + i\beta$ jest parametrem transformacji.

Rozwiązując układ równań algebraicznych (2) względem transformat $\bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{\varphi}$ otrzymamy

$$\bar{\eta} = \eta_o \frac{1}{s} + \eta'_o \frac{1}{s^2} + \eta''_o \frac{s^4 a + s^2 e + f}{s(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)} + \eta'''_o \frac{s^4 a + s^2 e + f}{s^2(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)}$$

$$+ \xi_o 0 + \xi'_o 0 + \xi''_o \frac{g}{s(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)} + \xi'''_o \frac{g}{s^2(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)} +$$

$$+ \varphi_o 0 + \varphi'_o 0 + \varphi''_o \frac{s^2 h + j}{s(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)} + \varphi'''_o \frac{s^2 h + j}{s^2(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)}$$

$$\xi = \eta_o 0 + \eta'_o 0 + \eta''_o \frac{k}{s(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)} + \eta'''_o \frac{k}{s^2(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)} +$$

$$+ \xi_o \frac{1}{s} + \xi'_o \frac{1}{s^2} + \xi''_o \frac{s^4 a + s^2 l + k}{s(s^6 a + s^4 b + s^2 + d)} + \xi'''_o \frac{s^4 a + s^2 l + k}{s^2(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)} +$$

$$+ \varphi_o 0 + \varphi'_o 0 + \varphi''_o \frac{s^2 m + n}{s(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)} + \varphi'''_o \frac{s^2 m + n}{s^2(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)},$$

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_o 0 + \eta'_o 0 + \eta''_o \frac{s^2 v + p}{s(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)} + \eta'''_o \frac{s^2 v + p}{s^2(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)} +$$

$$+ \xi_o 0 + \xi'_o 0 + \xi''_o \frac{s^2 q + u}{s(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)} + \xi'''_o \frac{s^2 q + u}{s^2(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)}$$

$$+ \varphi_o \frac{1}{s} + \varphi'_o \frac{1}{s^2} + \varphi''_o \frac{s^4 a + s^2 t + w}{s(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)} + \varphi'''_o \frac{s^4 a + s^2 t + w}{s^2(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)}$$

(3)

$a = E^3 J_y J_z J\omega,$

$b = D(E^2 J_o J\omega + E^2 r^2 J_y J_z) - E^2 GJ_y J_x J_z,$

$c = P^2(EJ\omega + Er^2 J_o - EZ_\alpha^2 J_y - Ey_\alpha^2 J_z) - PEGJ_x J_o,$

$d = P^3 \frac{J_o}{A} - P^2 GJ_x,$

$e = P(r^2 EJ_z J_y + E^2 J_z J\omega) - E^2 GJ_x J_z J_y,$

$f = -P^2 y_\alpha^2 EJ_z + P(r^2 EJ_z - EGJ_x J_z),$

$g = -P^2 y_\alpha z_\alpha EJ_y,$

$h = -PE^2 J_y J\omega z_\alpha,$

$j = -P^2 EJ\omega z_\alpha,$

$k = -P^2 y_\alpha z_\alpha EJ_z,$

$l = P(r^2 E^2 J_y J_z + E^2 J_y J\omega) - E^2 GJ_x J_y J_z,$

$ł = P^2(r^2 EJ_y - z_\alpha^2 EJ_y) - PEG J_x J_y,$

$m = Dy_\alpha EJ\omega,$

$n = P^2 y_\alpha EJ\omega,$

$v = -P z_\alpha E^2 J_y J_z,$

$p = -P^2 z_\alpha EJ_z$

$q = Py_\alpha E^2 J_y J_z,$

$u = P^2 y_\alpha EJ_y,$

$t = P(E^2 J_y J_\omega + E^2 J_z J_\omega),$

$w = P^2 EJ_\omega.$

Jeżeli oznaczymy odwrotne przekształcenie Laplace'a L^{-1} poszczególnych funkcji następująco

$$\left.\begin{aligned}
&L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^6a+s^4b+s^2c+d)}\right]=\bar{s}_8,\\
&L^{-1}\left[\frac{}{s(s^6a+s^4b+s^2c+d)}\right]=\bar{s}_7\\
&L^{-1}\left[\frac{1}{s^6a+s^4b+s^2c+d}\right]=\bar{s}_6,\\
&L^{-1}\left[\frac{s}{s^6a+s^4b+s^2c+d}\right]=\bar{s}_5,\\
&L^{-1}\left[\frac{s^2}{s^6a+s^4b+s^2c+d}\right]=\bar{s}_4,\\
&L^{-1}\left[\frac{s^3}{s^6a+s^4b+s^2c+d}\right]=\bar{s}_3\\
&L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=\bar{s}_2,\qquad L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=\bar{s}_1
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

to wówczas funkcje η, ξ, φ po dokonaniu odwrotnej transformacji Laplace'a przyjmą postać

$$\eta=L^{-1}\left[\bar{\eta}\right]=\eta_0\,\bar{s}_1+\eta'_0\,\bar{s}_2+\eta''_0\,(a\bar{s}_3+e\,\bar{s}_5+f\,\bar{s}_7)+$$

$$+\eta'''_0\,(a\,\bar{s}_4+e\,\bar{s}_6+f\,\bar{s}_8)+\xi_0\,0+\xi'_0\,0+\xi''_0\,g\,\bar{s}_7+\xi'''_0\,g\,\bar{s}_8+$$

$$+\varphi_0\,0+\varphi'_0\,0+\varphi''_0\,(h\,\bar{s}_5+j\,\bar{s}_7)+\varphi'''_0\,(h\,\bar{s}_6+j\,\bar{s}_8),$$

$$\xi = L^{-1}\left[\bar{\xi}\right] = \eta_o 0 + \eta'_o 0 + \eta''_o\, k\, \bar{s}_7 + \eta'''_o\, k\, \bar{s}_8 + \xi_o\, \bar{s}_1 + \xi'_o\, \bar{s}_2 +$$

$$+ \xi''_o\,(a\, \bar{s}_3 + l\, \bar{s}_5 + ł\, \bar{s}_7) + \xi'''_o\,(a\, \bar{s}_4 + l\, \bar{s}_6 + ł\, \bar{s}_8) +$$

$$+ \varphi_o\, 0 + \varphi'_o\, 0 + \varphi''_o\,(m\, \bar{s}_5 + n\, \bar{s}_7) + \varphi'''_o\,(m\, \bar{s}_6 + n\, \bar{s}_8), \tag{5}$$

$$\varphi = L^{-1}\left[\bar{\varphi}\right] = \eta_o 0 + \eta'_o 0 + \eta''_o\,(v\, \bar{s}_5 + p\, \bar{s}_7) + \eta'''_o\,(v\, \bar{s}_6 + p\, \bar{s}_8) +$$

$$+ \xi_o 0 + \xi'_o 0 + \xi''_o\,(q\, \bar{s}_5 + u\, \bar{s}_7) + \xi'''_o\,(q\, \bar{s}_6 + u\, \bar{s}_8) + \varphi_o\, \bar{s}_1 + \varphi'_o\, \bar{s}_2 +$$

$$+ \varphi''_o\,(a\, \bar{s}_3 + t\, \bar{s}_5 + w\, \bar{s}_7) + \varphi'''_o\,(a\, \bar{s}_4 + t\, \bar{s}_6 + w\, \bar{s}_8)$$

Wprowadzimy do (5) dodatkowo oznaczenia

$S_1 = \bar{s}_1,$

$S_2 = \bar{s}_2,$

$S_3 = g\, \bar{s}_7,$

$S_4 = g\, \bar{s}_8,$

$S_5 = k\, \bar{s}_7,$

$S_6 = k\, \bar{s}_8,$

$S_7 = a\, \bar{s}_3 + e\, \bar{s}_5 + f\, \bar{s}_7,$

$S_8 = a\, \bar{s}_4 + e\, \bar{s}_6 + f\, \bar{s}_8,$

$S_9 = h\, \bar{s}_5 + j\, \bar{s}_7,$

$S_{10} = h\, \bar{s}_6 + j\, \bar{s}_8,$

$S_{11} = a\, \bar{s}_3 + l\, \bar{s}_5 + ł\, \bar{s}_7,$

$S_{12} = a\, \bar{s}_4 + l\, \bar{s}_6 + ł\, \bar{s}_8,$

$S_{13} = m\, \bar{s}_5 + n\, \bar{s}_7,$

$$S_{14} = m\,\bar{s}_6 + n\,\bar{s}_8,$$
$$S_{15} = v\,\bar{s}_5 + p\,\bar{s}_7,$$
$$S_{16} = v\,\bar{s}_6 + p\,\bar{s}_8,$$
$$S_{17} = q\,\bar{s}_5 + u\,\bar{s}_7,$$
$$S_{18} = q\,\bar{s}_6 + u\,\bar{s}_8,$$
$$S_{19} = a\,\bar{s}_3 + t\,\bar{s}_5 + w\,\bar{s}_7,$$
$$S_{20} = a\,\bar{s}_4 + t\,\bar{s}_6 + w\,\bar{s}_8,$$

wówczas zamiast (5) możemy napisać:

$$\left.\begin{aligned}
\eta &= \eta_o S_1 + \eta'_o S_2 + \eta''_o S_7 + \eta'''_o S_8 + \xi_o 0 + \xi'_o 0 + \xi''_o S_3 + \\
&\quad + \xi'''_o S_4 + \varphi_o 0 + \varphi'_o 0 + \varphi''_o S_9 + \varphi'''_o S_{10}, \\
&\;\vdots \\
\eta''' &= \eta_o S'''_1 + \eta'_o S'''_2 + \eta''_o S'''_7 + \eta'''_o S'''_8 + \xi_o 0 + \xi'_o 0 + \xi''_o S'''_3 + \\
&\quad + \xi'''_o S'''_4 + \varphi_o 0 + \varphi'_o 0 + \varphi''_o S'''_9 + \varphi'''_o S'''_{10}, \\
\xi &= \eta_o 0 + \eta'_o 0 + \eta''_o S_5 + \eta'''_o S_6 + \xi_o S_1 + \xi'_o S_2 + \xi''_o S_{11} + \\
&\quad + \xi'''_o S_{12} + \varphi_o 0 + \varphi'_o 0 + \varphi''_o S_{13} + \varphi'''_o S_{14}, \\
&\;\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\xi''' &= \eta_o\, 0 + \eta'_o\, 0 + \eta''_o\, S'''_5 + \eta'''_o\, S''_6 + \xi_o\, S'''_1 + \xi'_o\, S'''_2 + \xi''\, S''_{11} + \\
&+ \xi'''_o\, S'''_{12} + \varphi_o\, 0 + \varphi'_o\, 0 + \varphi''_o\, S_{13} + \varphi'''_o\, S_{14}, \\
\varphi_o &= \eta_o\, 0 + \eta'_o\, 0 + \eta''_o\, S_{15} + \eta'''_o\, S_{16} + \xi_o\, 0 + \xi'_o\, 0 + \xi''_o S_{17} + \\
&+ \xi'''_o\, S_{18} + \varphi_o\, S_1 + \varphi'_o\, S_2 + \varphi''_o\, S_{19} + \varphi'''_o\, S_{20}, \\
&\vdots \\
\varphi''' &= \eta_o\, 0 + \eta'_o\, 0 + \eta''_o\, S'''_{15} + \eta'''_o\, S'''_{16} + \xi_o\, 0 + \xi'_o\, 0 + \xi''_o S'''_{17} + \\
&+ \xi'''_o\, S'''_{18} + \varphi_o\, S'''_1 + \varphi'_o\, S'''_2 + \varphi''_o\, S'''_{19} + \varphi'''_o\, S'''_{20}
\end{aligned}
\right\} \quad (6)
$$

W postaci macierzowej zapis równań (6) przedstawia się następująco

$$
\begin{bmatrix} \eta \\ \eta' \\ \eta'' \\ \eta''' \\ \xi \\ \xi' \\ \xi'' \\ \xi''' \\ \varphi \\ \varphi' \\ \varphi'' \\ \varphi''' \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
S_1 & S_2 & S_7 & S_8 & 0 & 0 & S_3 & S_4 & 0 & 0 & S_9 & S_{10} \\
S_1 & S_2 & S_7 & S_8 & 0 & 0 & S_3 & S_4 & 0 & 0 & S_9 & S_{10} \\
S_1 & S_2 & S_7 & S_8 & 0 & 0 & S_3 & S_4 & 0 & 0 & S_9 & S_{10} \\
S_1 & S_2 & S_7 & S_8 & 0 & 0 & S_3 & S_4 & 0 & 0 & S_9 & S_{10} \\
0 & 0 & S_5 & S_6 & S_1 & S_2 & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & S_{13} & S_{14} \\
0 & 0 & S_5 & S_6 & S_1 & S_2 & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & S_{13} & S_{14} \\
0 & 0 & S_5 & S_6 & S_1 & S_2 & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & S_{13} & S_{14} \\
0 & 0 & S_5 & S_6 & S_1 & S_2 & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & S_{13} & S_{14} \\
0 & 0 & S_{15} & S_{16} & 0 & 0 & S_{17} & S_{18} & S_1 & S_2 & S_{19} & S_{20} \\
0 & 0 & S_{15} & S_{16} & 0 & 0 & S_{17} & S_{18} & S_1 & S_2 & S_{19} & S_{20} \\
0 & 0 & S_{15} & S_{16} & 0 & 0 & S_{17} & S_{18} & S_1 & S_2 & S_{19} & S_{20} \\
0 & 0 & S_{15} & S_{16} & 0 & 0 & S_{17} & S_{18} & S_1 & S_2 & S_{19} & S_{20}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \eta_o \\ \eta'_o \\ \eta''_o \\ \eta'''_o \\ \xi_o \\ \xi'_o \\ \xi''_o \\ \xi'''_o \\ \varphi_o \\ \varphi'_o \\ \varphi''_o \\ \varphi'''_o \end{bmatrix}
\qquad (7)
$$

Oznaczmy macierz kolumnową utworzoną z η, ξ, φ i ich pochodnych przez $\bar{Y}$, a taką samą macierz, tylko dla $x = 0$ przez $\bar{Y}_0$, wówczas $\bar{Y} = [S_n]\,\bar{Y}_0$ gdzie $[S_n]$ jest macierzą utworzoną ze współczynników $S_1, \ldots, S_{20}$.

W celu ułatwienia obliczenia odwrotnej transformacji Laplace'a funkcji zespolonych S_i, do pracy załączono odpowiednie tablice (tablica 3).

Ostateczne rozwiązanie postawionego problemu otrzymamy przyrównując odpowiedni minor wyznacznika macierzy (7) (tzw. wyznacznik charakterystyczny) do zera.

Wartości tych wyznaczników dla niektórych sposobów podparcia pręta podano w tablicy 2.

Oznaczenia stałych zawartych w tablicach 3.

$S_1, \ldots, S_4$ - pierwiastki równania $s^6 a + s^4 b + s^2 c + d = 0$

$$\alpha_7 = 4a\alpha^7 - 84a\alpha^5\beta^2 + 140a\alpha^3\beta^4 - 28a\alpha\beta^6 + 3b\alpha^5 - 30b\alpha^3\beta^2 + 15b\alpha\beta^4 + 2c\alpha^3 - 6c\alpha\beta^2 + d\alpha,$$

$$\beta_7 = 28a\alpha\beta^6 - 140a\alpha^4\beta^3 + 84a\alpha^2\beta^5 - 4a\beta^7 + 15b\alpha^4\beta - 30b\alpha^2\beta^3 + 3b\beta^5 + 6c\alpha^2\beta - 2c\alpha^2\beta + d\beta,$$

$$2\alpha_6 = 7a\alpha^6 - 105a\alpha^4\beta^2 + 105a\alpha^2\beta^4 - 7a\beta^6 + 5b\alpha^4 - 30b\alpha^2\beta^2 + 5b\beta^4 + 3c\alpha^2 - 3c\beta^2 + d,$$

$$2\beta_6 = 30a\alpha^4\beta - 60a\alpha^2\beta^3 + 6a\beta^5 + 12b\alpha^2\beta - 4b\beta^3 + 2c\beta,$$

$$2\alpha_5 = 6a\alpha^5 - 60a\alpha^3\beta^2 + 30a\alpha\beta^4 + 4b\alpha^3 - 12b\alpha\beta^2 + 2c\alpha,$$

$$2\beta_5 = 30a\alpha^4\beta - 60a\alpha^2\beta^3 + 6a\beta^5 + 12b\alpha^2\beta - 4b\beta^3 + 2c\beta,$$

$$2\alpha_4 = 6a\alpha^4 - 36a\alpha^2\beta^2 + 6a\beta^4 + 4b\alpha^2 - 4b\beta^2 + 2c,$$

$$2\beta_4 = 24a\alpha^3\beta - 24a\alpha\beta^3 + 8b\alpha\beta,$$

$$\alpha_2 = \alpha^2\alpha_4 - \beta^2\alpha_4 + 2\alpha\beta\beta_4, \qquad \alpha_1 = \alpha\alpha_4 - \beta\beta_4,$$

$$\beta_2 = \alpha^2\beta_4 - \beta^2\beta_4 - 2\alpha\beta\alpha_4, \qquad \beta_1 = \alpha\beta_4 - \beta\alpha_4.$$

Tablica 1

Zestawienie warunków brzegowych dla niektórych podpór

Schemat podporowy	Utwierdzenie	Przegub kulisty	Łożysko szyjne	Wolny koniec
Warunki brzegowe	$\eta = 0,\ \eta' = 0$ $\xi = 0,\ \xi' = 0,$ $\varphi = 0,\ \varphi' = 0,$	$\eta = 0,\ \eta'' = 0$ $\xi = 0,\ \xi'' = 0,$ $\varphi = 0,\ \varphi'' = 0,$	$\eta = 0,\ \eta' = 0$ $\xi = 0,\ \xi' = 0,$ $\varphi' = 0,\ \varphi''' = 0,$	$\eta'' = 0,\ \eta''' = 0$ $\xi'' = 0,\ \xi''' = 0,$ $\varphi' = 0,\ \varphi''' = 0$

Tablica 2

Wartości wyznacznika charakterystycznego dla niektórych warunków brzegowych

Warunki brzegowe		Wyznacznik charakterystyczny
$x = 0$	$x = 1$	
$\eta = 0,\ \eta' = 0$ $\xi = 0,\ \xi' = 0$ $\varphi = 0,\ \varphi' = 0$	$\eta = 0,\ \eta' = 0$ $\xi = 0,\ \xi' = 0$ $\varphi = 0,\ \varphi' = 0$	$\begin{vmatrix} s_7 & s_8 & s_3 & s_4 & s_9 & s_{10} \\ s_7 & s_8 & s_3 & s_4 & s_9 & s_{10} \\ s_5 & s_6 & s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_5 & s_6 & s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{15} & s_{16} & s_{17} & s_{18} & s_{19} & s_{20} \\ s_{15} & s_{16} & s_{17} & s_{18} & s_{19} & s_{20} \end{vmatrix} = 0$
$\eta = 0,\ \eta'' = 0$ $\xi = 0,\ \xi'' = 0,$ $\varphi' = 0,\ \varphi''' = 0$	$\eta = 0,\ \eta'' = 0$ $\xi = 0,\ \xi'' = 0$ $\varphi' = 0,\ \varphi'' = 0$	$\begin{vmatrix} s_2 & s_8 & 0 & s_4 & 0 & s_9 \\ s_2 & s_8 & 0 & s_4 & 0 & s_9 \\ 0 & s_6 & s_2 & s_{12} & 0 & s_{13} \\ 0 & s_6 & s_2 & s_{12} & 0 & s_{13} \\ 0 & s_{16} & 0 & s_{18} & s_1 & s_{19} \\ 0 & s_{16} & 0 & s_{18} & s_1 & s_{19} \end{vmatrix} = 0$
$\eta = 0,\ \eta' = 0$ $\xi = 0,\ \xi' = 0$ $\varphi = 0,\ \varphi' = 0$	$\eta'' = 0,\ \eta''' = 0$ $\xi'' = 0,\ \xi''' = 0$ $\varphi' = 0,\ \varphi''' = 0$	$\begin{vmatrix} s_7 & s_8 & s_3 & s_4 & s_9 & s_{10} \\ s_7 & s_8 & s_3 & s_4 & s_9 & s_{10} \\ s_5 & s_6 & s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_5 & s_6 & s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{15} & s_{10} & s_{17} & s_{18} & s_{19} & s_{20} \\ s_{15} & s_{10} & s_{17} & s_{18} & s_{19} & s_{20} \end{vmatrix} = 0$

Tablica 3

Wartości funkcji $\sum_k f_k(x) = L^{-1}\left[f(s)\right]$ dla obliczenia odwrotnego przekształcenia Laplace'a

punkty osobliwe \ funkcja f(s)	$\frac{1}{s^2(s^6 a + s^4 b + s^2 c + d)}$
$s_1 = 0$ $s_2 = 0$	$\frac{x}{d}$
$s_3 = \alpha + i\beta$ $\quad s_4 = \alpha - i\beta$ $s_5 = -(\alpha + i\beta)$ $\quad s_6 = -(\alpha - i\beta)$	$\frac{2\alpha_7}{\alpha_7^2 + \beta_7^2} \cos\beta x \, \mathrm{sh}\,\alpha x +$ $+ \frac{2\beta_7}{\alpha_7^2 + \beta_7^2} \sin\beta x \, \mathrm{ch}\,\alpha x$
Pierwsza pochodna funkcji $f_k(x)$	
$s_1 = 0$ $s_2 = 0$	$\frac{1}{d}$
$s_3 = \alpha + i\beta$ $\quad s_4 = \alpha - i\beta$ $s_5 = -(\alpha + i\beta)$ $\quad s_6 = -(\alpha - i\beta)$	$\frac{2(\alpha\beta_7 - \beta\alpha_7)}{\alpha_7^2 + \beta_7^2} \sin\beta x \, \mathrm{sh}\,\alpha x +$ $+ \frac{2(\alpha_7\alpha + \beta_7\beta)}{\alpha_7^2 + \beta_7^2} \cos\beta x \, \mathrm{ch}\,\alpha x$

cd. tablicy 3

funkcja (f(s) / punkty osobliwe	$\frac{1}{S^2(S^6a + S^4b + S^2c + d)}$
Druga pochodna funkcji $f_k(x)$	
$S_1 = 0$ $S_2 = 0$	0
$S_3=\alpha+ i\beta$ $S_4 = \alpha - i\beta$ $S_5 = -(\alpha+i\beta)$ $S_6 = -(\alpha-i\beta)$	$\frac{2(\alpha^2\alpha_7-\beta^2\alpha_7+2\alpha\beta\beta_7)}{\alpha_7^2 + \beta_7^2}\cos\beta x\,\mathrm{sh}\alpha x +$ $+\frac{2(\alpha^2\beta_7-\beta^2\beta_7-2\alpha\beta\alpha_7)}{\alpha_7^2 + \beta_7^2}\sin\beta x\,\mathrm{ch}\alpha x$
Trzecia pochodna funkcji $f_k(x)$	
$S_1 = 0$ $S_2 = 0$	0
$S_3 = \alpha + i\beta$ $S_4 = \alpha - i\beta$ $S_5 = -(\alpha+i\beta)$ $S_6 = -(\alpha-i\beta)$	$\frac{2(\alpha^3\beta_7+\beta^3\alpha_7-3\alpha^2\beta\alpha_7-3\alpha\beta^2\beta_7)}{\alpha_7^2 + \beta_7^2}\sin\beta x\,\mathrm{sh}\alpha x+$ $\frac{2(\alpha^3\alpha_7-\beta^3\beta_7+3\alpha^2\beta\beta_7-3\alpha\beta^2\alpha_7)}{\alpha_7^2 + \beta_7^2}\cos\beta x\,\mathrm{ch}\alpha x$

cd. tablicy 3

punkty osobliwe \ funkcja f(s)	$\frac{1}{S(S^6a + S^4b + S^2c + d)}$
$S_1 = 0$	$\frac{x^2}{2c}$
$S_2 = \alpha + i\beta$ $S_3 = \alpha - i\beta$ $S_4 = -(\alpha + i\beta)$ $S_5 = -(\alpha - i\beta)$	$\frac{2\alpha_6}{\alpha_6^2 + \beta_6^2} \cos\beta x \, ch\alpha x +$ $+ \frac{2\beta_6}{\alpha_6^2 + \beta_6^2} \sin\beta x \, sh\alpha x$
Pierwsza pochodna funkcji $f_k(x)$	
$S_1 = 0$	$\frac{x}{c}$
$S_2 = \alpha + i\beta$ $S_3 = \alpha - i\beta$ $S_4 = -(\alpha + i\beta)$ $S_5 = -(\alpha - i\beta)$	$\frac{2(\alpha\beta_6 - \beta\alpha_6)}{\alpha_6^2 + \beta_6^2} \sin\beta x \, ch\alpha x +$ $+ \frac{2(\alpha\alpha_6 + \beta\beta_6)}{\alpha_6^2 + \beta_6^2} \cos\beta x \, sh\alpha x$
Druga pochodna funkcji $f_k(x)$	
$S_1 = 0$	$\frac{1}{c}$
$S_2 = \alpha + i\beta$ $S_3 = \alpha - i\beta$ $S_4 = -(\alpha + i\beta)$ $S_5 = -(\alpha - i\beta)$	$\frac{2(\alpha^2\alpha_6 - \beta^2\alpha_6 + 2\alpha\beta\beta_6)}{\alpha_6^2 + \alpha_6^2} \cos\beta x \, ch\alpha x +$ $+ \frac{2(\alpha^2\beta_6 - \beta^2\beta_6 - 2\alpha\beta\alpha_6)}{\alpha_6^2 + \alpha_6^2} \sin\beta x \, sh\alpha x$

cd. tablicy 3

funkcja f(s) / punkty osobliwe	$\frac{1}{S(S^6a + S^4b + S^2c + d)}$
Trzecia pochodna funkcji $f_k(x)$	
$S_1 = 0$	0
$S_2 = \alpha + i\beta$ $S_3 = \alpha - i\beta$ $S_4 = -(\alpha + i\beta)$ $S_5 = -(\alpha - i\beta)$	$\frac{2(\alpha^3\beta_6 + \beta^3\alpha_6 - 3\alpha^2\beta\alpha_6 - 3\alpha\beta^2\beta_6)}{\alpha_6^2 + \beta_6^2} \sin\beta x \operatorname{ch}\alpha x +$ $+ \frac{2(\alpha^3\alpha_6 - \beta^3\beta_6 + 3\alpha^2\beta\beta_6 - 3\alpha\beta^2\alpha_6)}{\alpha_6^2 + \beta_6^2} \cos\beta x \operatorname{sh}\alpha x$
funkcja f(s) / punkty osobliwe	$\frac{1}{S^6a + S^4b + S^2c + d}$
$S_1 = \alpha + i\beta$ $S_2 = \alpha - i\beta$ $S_3 = -(\alpha + i\beta)$ $S_4 = -(\alpha - i\beta)$	$\frac{2\alpha_5}{\alpha_5^2 + \beta_5^2} \cos\beta x \operatorname{sh}\alpha x +$ $\frac{2\beta_5}{\alpha_5^2 + \beta_5^2} \sin\beta x \operatorname{ch}\alpha x$
Pierwsza pochodna funkcji $f_k(x)$	
$S_1 = \alpha + i\beta$ $S_2 = \alpha - i\beta$ $S_3 = -(\alpha + i\beta)$ $S_4 = -(\alpha - i\beta)$	$\frac{2(\alpha\beta_5 - \beta\alpha_5)}{\alpha_5^2 + \beta_5^2} \sin\beta x \operatorname{sh}\alpha x +$ $+ \frac{2(\alpha\alpha_5 + \beta\beta_5)}{\alpha_5^2 + \beta_5^2} \cos\beta x \operatorname{ch}\alpha x$

cd. tablicy 3

funkcja f(s) / punkty osobliwe	$\frac{1}{S^6 a + S^4 b + S^2 c + a}$
Druga pochodna funkcji $f_x(x)$	
$S_1 = \alpha + i\beta \quad S_2 = \alpha - i\beta$ $S_3 = -(\alpha + i\beta) \quad S_4 = -(\alpha - i\beta)$	$\frac{2(\alpha^2\alpha_5 - \beta^2\alpha_5 + 2\alpha\beta\beta_5)}{\alpha_5^2 + \beta_5^2} \cos\beta x \, \mathrm{sh}\,\alpha x +$ $+ \frac{2(\alpha^2\beta_5 - \beta^2\beta_5 - 2\alpha\beta\alpha_5)}{\alpha_5^2 + \beta_5^2} \sin\beta x \, \mathrm{ch}\,\alpha x$
Trzecia pochodna funkcji $f_k(x)$	
$S_1 = \alpha + i\beta \quad S_2 = \alpha - i\beta$ $S_3 = -(\alpha + i\beta) \quad S_4 = -(\alpha - i\beta)$	$\frac{2(\alpha^3\beta_5 + \beta^3\alpha_5 - 3\alpha^2\beta\alpha_5 - 3\alpha\beta^2\beta_5)}{\alpha_5^2 + \beta_5^2} \sin\beta x \, \mathrm{sh}\,\alpha x +$ $\frac{2(\alpha^3\alpha_5 - \beta^3\beta_5 + 3\alpha^2\beta\beta_5 - 3\alpha\beta^2\alpha_5)}{\alpha_5^2 + \beta_5^2} \cos\beta x \, \mathrm{ch}\,\alpha x$
funkcja f(s) / punkty osobliwe	$\frac{s}{S^6 a + S^4 b + S^2 c + d}$
$S_1 = \alpha + i\beta \quad S_2 = \alpha - i\beta$ $S_3 = -(\alpha + i\beta) \quad S_4 = -(\alpha - i\beta)$	$\frac{2\alpha_4}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \cos\beta x \, \mathrm{ch}\,\alpha x +$ $+ \frac{2\beta_4}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \sin\beta x \, \mathrm{sh}\,\alpha x$

cd. tablicy 3

funkcja f(s) / punkty osobliwe	$\dfrac{s}{s^6 a + s^4 b + s^2 c + d}$
Pierwsza pochodna funkcji $f_k(x)$	
$s_1 = \alpha + i\beta \quad s_2 = \alpha - i\beta$ $s_3 = -(\alpha + i\beta) \quad s_4 = -(\alpha - i\beta)$	$\dfrac{2(\alpha\beta_4 - \beta\alpha_4)}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \sin\beta x \ \mathrm{ch}\,\alpha x +$ $+ \dfrac{2(\alpha\alpha_4 + \beta\beta_4)}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \cos\beta x \ \mathrm{sh}\,\alpha x$
Druga pochodna funkcji $f_k(x)$	
$s_1 = \alpha + i\beta \quad s_2 = \alpha - i\beta$ $s_3 = -(\alpha + i\beta) \quad s_4 = -(\alpha - i\beta)$	$\dfrac{2(\alpha^2\alpha_4 - \beta^2\alpha_4 + 2\alpha\beta\beta_4)}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \cos\beta x \ \mathrm{ch}\,\alpha x +$ $+ \dfrac{2(\alpha^2\beta_4 - \beta^2\beta_4 - 2\alpha\beta\alpha_4)}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \sin\beta x \ \mathrm{sh}\,\alpha x$
Trzecia pochodna funkcji $f_k(x)$	
$s_1 = \alpha + i\beta \quad s_2 = \alpha - i\beta$ $s_3 = -(\alpha + i\beta) \quad s_4 = -(\alpha - i\beta)$	$\dfrac{2(\alpha^3\beta_4 + \beta^3\alpha_4 - 3\alpha^2\beta\alpha_4 - 3\alpha\beta^2\beta_4}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \sin\beta x \,\mathrm{ch}\,\alpha x +$ $+ \dfrac{2(\alpha^3\alpha_4 - \beta^3\beta_4 + 3\alpha^2\beta\beta_4 - 3\alpha\beta^2\alpha_4}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \cos\beta x \ \mathrm{sh}\,\alpha x$

cd. tablicy 3

funkcja f(s) / punkty osobliwe	$\frac{s^2}{s^6 a + s^4 b + s^2 c + d}$
$s_1 = \alpha + i\beta \quad s_2 = \alpha - i\beta$ $s_3 = -(\alpha + i\beta) \quad s_4 = -(\alpha - i\beta)$	$\frac{2\alpha_1}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \cos\beta x \, \mathrm{sh}\,\alpha x +$ $+ \frac{2\beta_1}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \sin\beta x \, \mathrm{ch}\,\alpha x$
Pierwsza pochodna funkcji $f_k(x)$	
$s_1 = \alpha + i\beta \quad s_2 = \alpha - i\beta$ $s_3 = -(\alpha + i\beta) \quad s_4 = -(\alpha - i\beta)$	$\frac{2(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \sin\beta x \, \mathrm{sh}\,\alpha x +$ $+ \frac{2(\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1)}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \cos\beta x \, \mathrm{ch}\,\alpha x$
Druga pochodna funkcji $f_k(x)$	
$s_1 = \alpha + i\beta \quad s_2 = \alpha - i\beta$ $s_3 = -(\alpha + i\beta) \quad s_4 = -(\alpha - i\beta)$	$\frac{2(\alpha^2\alpha_1 - \beta^2\alpha_1 + 2\alpha\beta\beta_1)}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \cos\beta x \, \mathrm{sh}\,\alpha x +$ $+ \frac{2(\alpha^2\beta_1 - \beta^2\beta_1 - 2\alpha\beta\alpha_1)}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \sin\beta x \, \mathrm{ch}\,\alpha x$

cd. tablicy 3

funkcja f(s) / punkty osobliwe	$\dfrac{s^2}{s^6a + s^4b + s^2c + d}$
Trzecia pochodna funkcji $f_k(x)$	
$S_1 = \alpha + i\beta \quad S_2 = \alpha - i\beta$ $S_3 = -(\alpha + i\beta) \quad S_4 = -(\alpha - i\beta)$	$\dfrac{2(\alpha^3\beta_1 + \beta^3\alpha_1 - 3\alpha^2\beta\alpha_1 - 3\alpha\beta^2\beta_1)}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \sin\beta x \operatorname{sh}\alpha x$ $+ \dfrac{2(\alpha^3\alpha_1 - \beta^3\beta_1 + 3\alpha^2\beta\beta_1 - 3\alpha\beta^2\alpha_1)}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \cos\beta x \operatorname{ch}\alpha x$
funkcja f(s) / punkty osobliwe	$\dfrac{s^3}{s^6a + s^4b + s^2c + d}$
$S_1 = \alpha + i\beta \quad S_2 = \alpha - i\beta$ $S_3 = -(\alpha + i\beta) \quad S_4 = -(\alpha - i\beta)$	$\dfrac{2\alpha_2}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \cos\beta x \operatorname{ch}\alpha x +$ $+ \dfrac{2\beta_2}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \sin\beta x \operatorname{sh}\alpha x$
Pierwsza pochodna funkcji $f_k(x)$	
$S_1 = \alpha + i\beta \quad S_2 = \alpha - i\beta$ $S_3 = -(\alpha + i\beta) \quad S_4 = -(\alpha - i\beta)$	$\dfrac{2(\alpha\beta_2 - \beta\alpha_2)}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \sin\beta x \operatorname{ch}\alpha x +$ $+ \dfrac{2(\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \cos\beta x \operatorname{sh}\alpha x$

cd. tablicy 3

funkcja f(s) / punkty osobliwe	$\dfrac{s^3}{s^5 a + s^4 b + s^2 c + d}$
Druga pochodna funkcji $f_k(x)$	
$S_1 = \alpha + i\beta \quad S_2 = \alpha - i\beta$ $S_3 = -(\alpha + i\beta) \quad S_4 = -(\alpha - i\beta)$	$\dfrac{2(\alpha^2\alpha_2 - \beta^2\alpha_2 + 2\alpha\beta\beta_2)}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \cos\beta x \operatorname{ch}\alpha x +$ $+ \dfrac{2(\alpha^2\beta_2 - \beta^2\beta_2 - 2\alpha\beta\beta_2)}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \sin\beta x \operatorname{sh}\alpha x$
Trzecia pochodna funkcji $f_k(x)$	
$S_1 = \alpha + i\beta \quad S_2 = \alpha - i\beta$ $S_3 = -(\alpha + i\beta) \quad S_4 = -(\alpha - i\beta)$	$\dfrac{2(\alpha^3\beta_2 + \beta^3\alpha_2 - 3\alpha^2\beta\alpha_2 - 3\alpha\beta^2\beta_2)}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \sin\beta x \operatorname{ch}\alpha x +$ $+ \dfrac{2(\alpha^3\alpha_2 - \beta^3\beta_2 + 3\alpha^2\beta\beta_2 - 3\alpha\beta^2\alpha_2)}{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \cos\beta x \operatorname{sh}\alpha x$

4. Uwagi końcowe

Przedstawiony sposób obliczenia siły krytycznej został przeprowadzony przy założeniach W.Z. Własowa dla pręta cienkościennego o profilu otwartym i stałym przekroju wzdłuż jego osi, ściskanego siłą przyłożoną w środku ciężkości przekroju. Podane rozwiązanie jest ogólne, a więc można stosować różne warunki brzegowe funkcji η, ξ, φ w zależności od stosowanej podpory.

Obliczenia przeprowadzono z punktu widzenia zaprogramowania ich na elektroniczne maszyny cyfrowe.

LITERATURA

[1] Własow W.Z.: Tonkostiennyje uprugije stierżni, Moskwa, Gostechizdat 1959 r.

[2] Rutecki J.: Cienkościenne konstrukcje nośne, Warszawa WNT 1966.

[3] Naleszkiewicz J.: Zagadnienia stateczności sprężystej, Warszawa WNT 1958 r.

[4] Woroncow G.W., Maksimienko W.I.: "K zadače programirowanija rasčota simmetričnych tonkostiennych sterżniej okrytogo profila po deformacjonnoj schemie, Prim. elektr. maś. w Str Mech. Kijów 1968 r.

[5] Mieščeriakov W.B.: K tieorii ustojčiwosti tonkostiennych stierżniej okrytogo profila z učetom sdwigov, Tr. Mosk. in. - ta inž. Z-d transp., 1969, wyp. 260.

[6] Peköz T.B.: Torsionalflexural buckling of thin - walled open sections under excentric axial loading, Doct. diss. Cornell Univ. 1967 r., 219 pp., Dissert. Abstr., 1967 B 28 Nr 5.

[7] Hlawaček V.: Prostorový vzpěr tenkostěnných prutů otevřeného pruřezu, Stavebn. Časop, 1967, 15 Nr Nr 7.

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ И ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

Р е з ю м е

В работе даётся решение вопроса устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля и постоянного сечения для любых краевых условий.

Решение опирается на положениях В.З. Власова в линейном рассмотрении вопроса.

Расчеты были проведены с точки зрения применения их при програмировании для электронной цифровой машины.

STABILITY OF A THIN WALLED BAR WITH OPEN AND UNIFORM CROSS SECTION

S u m m a r y

A solution of the stability problem of a thin-walled bar with open and uniform cross section is presented for arbitrary boundary conditions.

The solution is based on Vlassovs assumptions in a linear form.

All the formulae were arranged in matrix form in view of the programming for an electronic digital computer.