

ANDRZEJ TYLIKOWSKI

O DRGANIACH OSCYLATORA HARMONICZNEGO WYWOŁANYCH PEWNYM
LOKALNIE STACJONARNYM PROCESEM STOCHASTYCZNYM

Streszczenie: Celem pracy jest wyznaczenie drgań oscylatora harmonicznego wywołanych procesem stochastycznym towarzyszącym rozruchowi silników raketowych. Rozwiązanie przeprowadzone na płaszczyźnie analizy korelacyjnej polega na obliczeniu wariancji przemieszczenia oscylatora. Rezultaty końcowe wyrażają się przez stabilizowane funkcje prawdopodobieństwa zespolonego argumentu. Obliczenia numeryczne wykazały, że wariancja przemieszczenia waha się i osiąga wartości maksymalne jedynie w chwilach początkowych. Oscylacje dla małych czasów odbywają się z częstością zbliżoną do podwójnej częstości drgań własnych. W miarę wzrostu czasu prawdziwość ta zanika a wariancja przemieszczenia szybko maleje do zera.

1. Wstęp

Na skutek realnych potrzeb wielu gałęzi techniki opartych na mechanice, a zwłaszcza lotnictwa, budownictwa w rejonach sejsmicznych, transportu, powstał jej nowy dział - dynamika statystyczna. W początkowym okresie rozwoju metod statystycznych uwagę poświęcano głównie procesom stacjonarnym, to jest takim których funkcja korelacyjna, czyli pewna funkcja opisująca własności probabilistyczne, zależy jedynie od różnicy czasu. Analiza korelacyjna, jako dział dynamiki statystycznej, szuka związków zachodzących między funkcjami korelacyjnymi procesów

zaburzających (wejścia) i procesów opisujących stan układu (wyjścia). I tak np. wejściem układu mechanicznego może być siła lub wymuszenie kinematyczne, a wyjściem przemieszczenia i naprężenia. Przy założeniu, że procesy wejściowe są procesami stacjonarnymi, funkcje korelacyjne procesów wyjściowych noszą na ogół taki sam charakter.

Praktyka pokazała jednak, że często rzeczywiste zjawiska przypadkowe znacznie się różnią od procesów stacjonarnych. Ma to zwłaszcza miejsce w fazie rozruchu i wyłączania układów. Funkcje korelacyjne takich niestacjonarnych procesów są funkcją obu momentów czasu. Jakkolwiek analiza korelacyjna podaje ogólne metody wyznaczania funkcji korelacyjnych odpowiedzi układu na zaburzenie w postaci procesu niestacjonarnego, to jednak efektywne jej wyznaczenie jest żmudne i wymaga na ogół przy każdej konkretnej postaci analitycznej funkcji korelacyjnej innej drogi postępowania. Liczba efektywnych rozwiązań posiadających odpowiedź układu na niestacjonarne zaburzenia jest mała.

Pierwszą próbą ujęcia niestacjonarnych efektów, której autorem jest Caughey [1], było uwzględnienie skończonego czasu trwania działania stacjonarnego procesu stochastycznego przy jednoczesnym założeniu deterministycznych warunków początkowych. Lin [2] rozpatrzył zagadnienie niestacjonarnego zaburzenia i odpowiedzi układu liniowego w wypadku, gdy proces wejściowy jest ciągiem impulsów o dowolnym kształcie i dowolnym rozkładzie czasu przybywania. Autor [3] badał reakcję układu mechanicznego o jednym stopniu swobody na zaburzenie (proces wejściowy) w postaci sumy harmonik o losowych, nieskorelowanych amplitudach i fazach przy częstotliwości zmieniającej się liniowo w czasie.

Praca niniejsza omawia reakcję oscylatora harmonicznego przy założeniu, że proces wejściowy jest niestacjonarnym procesem o funkcji korelacyjnej $K(t_1, t_2) = B e^{-\alpha(t_1^2 + t_2^2)}$. Proces ten, ze względu na możliwość przedstawienia go w postaci iloczynu funkcji zależnej od różnicy czasu oraz nieujemnej funkcji średniego czasu $\frac{t_1 + t_2}{2}$, nosi nazwę lokalnie stacjonarnego [4].

Badania doświadczalne przeprowadzone w amerykańskich ośrodkach raketowych wykazały, że drgania przypadkowe silników i korpusów raket wywołane aerodynamicznym polem zewnętrznym podczas fazy maksymalnych dynamicznych ciśnień przy rozruchu można uważać za lokalnie stacjonarne procesy stochastyczne [5]. Pomiar niestacjonarnych drgań przypadkowych elementów konstrukcji raket przeprowadzone przez Wierwille'a [7] pozwoliły na wyznaczenie funkcji korelacyjnych tych procesów. Przebieg zmienności funkcji korelacyjnej wskazuje, że można ją aproksymować wyrażeniem typu

$$K(t_1, t_2) = B e^{-\alpha(t_1^2 + t_2^2)}. \quad (1)$$

2. Analiza zadania

Ruch liniowego układu sprężystego o jednym stopniu swobody z lepkiem tłumieniem spowodowany siłą zależną od czasu opisany jest równaniem

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = \frac{1}{m} q(t), \quad (2)$$

gdzie: m - masa, n - współczynnik tłumienia, k - częstość drgań nietłumionych, q - siła, x - przemieszczenie, t - czas.

Przy założeniu, że siła $q(t)$ jest niestacjonarnym procesem o średniej 0 i funkcji korelacyjnej $K_{qq}(t_1, t_2)$, średnia przemieszczenia jest równa 0. Wariancja przemieszczenia może być wyznaczona z zależności [6]

$$\sigma_x^2(t) = \int_0^t \int_0^t h(t-\tau_1) h(t-\tau_2) K_{qq}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (3)$$

W relacji (3) $h(t)$ jest impulsową funkcją przejścia układu opisanego równaniem różniczkowym (2), to znaczy jest odpowiedzią układu na jednostkowy impuls $\delta(t)$ Diraca.

Jeżeli $k > n$, układ ma charakter oscylacyjny, a jego impulsowa funkcja przejścia jest równa

$$h(t) = \frac{1}{m \bar{\omega}} e^{-nt} \sin \bar{\omega} t H(t), \quad (4a)$$

gdzie $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a,

$$\bar{\omega} = \sqrt{k^2 - n^2}. \quad (5a)$$

W przypadku, gdy $k < n$ układ jest aperiodyczny, a impulsowa funkcja przejścia określona jest wzorem

$$h(t) = \frac{1}{m \bar{\omega}} e^{-nt} \operatorname{sh} \bar{\omega} t H(t), \quad (4b)$$

gdzie

$$\bar{\omega} = \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (5b)$$

Najpierw zostanie rozpatrzony układ oscylacyjny $k > n$. Podstawienie (4a) i (1) do (3) prowadzi do relacji

$$\sigma_x^2(t) = \frac{B}{m^2 \bar{\omega}^2} \int_0^t \int_0^t e^{-2nt+n(\tau_1+\tau_2)-\alpha(t_1^2+t_2^2)} \times \\ \times \sin \bar{\omega}(t-\tau_1) \sin \bar{\omega}(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (6)$$

Wyrażenie (6) po wykorzystaniu tożsamości

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

daje się przedstawić w postaci

$$\sigma_x^2(t) = \frac{-B}{4m^2 \bar{\omega}^2} \operatorname{Re}(I_1 + I_2 - 2I_3), \quad (7)$$

gdzie

$$I_1 = \left[e^{-t(n - i\bar{\omega})} \int_0^t e^{t_1(n - i\bar{\omega}) - \alpha t_1^2} dt_1 \right]^2,$$

$$I_2 = \left[e^{-t(n + i\bar{\omega})} \int_0^t e^{t_1(n + i\bar{\omega}) - \alpha t_1^2} dt_1 \right]^2,$$

$$I_3 = e^{-2nt} \int_0^t e^{t_1(n + i\bar{\omega}) - \alpha t_1^2} dt_1 \int_0^t e^{t_2(n - i\bar{\omega}) - \alpha t_2^2} dt_2. \quad (8)$$

Wykonując zmianę zmiennych w całkach (8) przy pomocy podstawień

$$z_1 = \frac{1}{i\sqrt{\alpha}} (-\alpha t_1 + \frac{n - i\bar{\omega}}{2}), \quad z_{10} = \frac{n - i\bar{\omega}}{2 i\sqrt{\alpha}}, \quad (9)$$

$$z_2 = \frac{1}{1\sqrt{\alpha}} (-\alpha t_2 + \frac{n + i\bar{\omega}}{2}), \quad z_{20} = \frac{n + i\bar{\omega}}{2 \cdot 1\sqrt{\alpha}}, \quad (9)$$

otrzymano

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= -\frac{e^{-2\alpha t^2}}{\alpha} \left[W(z_1) - e^{-z_1^2} + z_{10}^2 W(z_{10}) \right]^2, \\ I_2 &= -\frac{e^{-2\alpha t^2}}{\alpha} \left[W(z_2) - e^{-z_2^2} + z_{20}^2 W(z_{20}) \right]^2, \\ I_3 &= -\frac{e^{-2\alpha t^2}}{\alpha} \left[W(z_1) - e^{-z_1^2} + z_{10}^2 W(z_{10}) \right] \times \\ &\quad \times \left[W(z_2) - e^{-z_2^2} + z_{20}^2 W(z_{20}) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

W zależnościach (10) $W(z)$ jest funkcją pokrewną całce prawdopodobieństwa zespolonego argumentu, określoną wzorem

$$W(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx. \quad (11)$$

Część rzeczywistą i urojoną funkcji $W(z)$ oznaczono odpowiednio przez $U(z)$ i $V(z)$. W dalszej części rozważań korzystając będziemy z postaci wykładniczej z . Czyni się tak dlatego, że w tablicach [8] przyjęto układ biegunowy. Oczywiście nic nie stoi na przeszkodzie, aby posługiwać się postacią algebraiczną z . W tym celu należy wyrazić funkcję $W(z)$ przez funkcję

$$W_1(z) = e^{-z^2} \left(1 + \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt \right)$$

przy pomocy zależności

$$W(z) = \sqrt{\pi} i \frac{e^{-z^2} - W_1(z)}{2}$$

i skorzystać z tablic [9], w których przyjęty jest układ prostokątny. Funkcję $W(z)$ wyrazić można również przez zespoloną całkę Fresnela

$$R(r + is) + iI(r + is) = \int_0^{r + is} e^{i \frac{\pi}{2} t^2} dt$$

stabilizowaną w [10]

Warto zwrócić uwagę, że funkcja $W(z)$ spełnia następujące wzory redukcyjne

$$\begin{aligned} U(\varrho, -\theta) &= U(\varrho, \theta), & U(\varrho, \theta + \pi) &= -U(\varrho, \theta), \\ V(\varrho, -\theta) &= V(\varrho, \theta), & V(\varrho, \theta + \pi) &= -V(\varrho, \theta), \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie $z = \varrho e^{i\theta}$.

Przekształcenie zmiennych z_1 i z_2 do postaci wykładniczej wykazuje, że

$$\begin{aligned} \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2\alpha t - n)^2 + \bar{\omega}^2}{\alpha}}, \\ \theta_1 &= \pi - \operatorname{arctg} \frac{2\alpha t - n}{\bar{\omega}}, & \theta_2 &= \operatorname{arctg} \frac{2\alpha t - n}{\bar{\omega}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Podstawienie zależności (13), (12) i (10) do (7) pozwala uzyskać formułę służącą do obliczenia wariancji przemieszczenia oscylatora. Ma ona postać

$$\sigma_x^2(t) = \frac{B}{m \bar{\omega}^2} \left\{ U(\varrho_0, \theta_0) e^{-\alpha t^2} - e^{-nt} \left[V(\varrho_0, \theta_0) \sin \bar{\omega} t + U(\varrho_0, \theta_0) \cos \bar{\omega} t \right] \right\}. \quad (14)$$

Podobnie przedstawia się rozwiązanie układu aperiodycznego $n > k$. Wykorzystanie impulsowej funkcji przejścia w postaci (4b) w zależności (3) prowadzi do następującego wzoru przedstawiającego zależność wariancji przemieszczenia od czasu

$$\sigma_x^2(t) = \frac{B}{4m \bar{\omega}^2 \alpha} \left[e^{t(\bar{\omega} - n) + \frac{(n - \bar{\omega})^2}{4\alpha} t} \int_{u_0}^u e^{-u^2} du + e^{-t(n + \bar{\omega}) + \frac{(n - \bar{\omega})^2}{4\alpha} t} \int_{v_0}^v e^{-v^2} dv \right]^2, \quad (15)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{\alpha} t - \frac{n - \bar{\omega}}{2\sqrt{\alpha}}, & u_0 &= -\frac{n - \bar{\omega}}{2\sqrt{\alpha}}, \\ v &= \sqrt{\alpha} t - \frac{n + \bar{\omega}}{2\sqrt{\alpha}}, & v_0 &= -\frac{n + \bar{\omega}}{2\sqrt{\alpha}}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Całki występujące w (15) można wyrazić przez powszechnie znaną i dostępną w niemal wszystkich tablicach matematycznych funkcję erf x .

Zależności (14) wraz z (13) w przypadku małego tłumienia, (15) i (16) przy dużym tłumieniu stanowią rozwiązanie postawionego problemu.

3. Obliczenia numeryczne, omówienie wyników

Obliczenia numeryczne wykonano na elektronicznej maszynie cyfrowej GIER. W celu uniknięcia wczytywania do pamięci maszyny tablic o dużej objętości oraz kłopotliwego interpolowania można się posłużyć obliczeniem funkcji $W(z)$ w oparciu o znane z analizy rozwinięcia tej funkcji w szeregi, ułamki nieskończone lub równania różniczkowe. Metoda taka jest szybsza i dokładniejsza.

W pracy do obliczeń wybrano rozwinięcie funkcji $W(z)$ w szereg Taylora dla małych $|z|$ oraz w szereg asymptotyczny dla dużych wartości $|z|$. Szeregi te przedstawiają się następująco:

$$\xi < 2$$

$$\left. \begin{aligned} U(\xi, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!} \cos(2k+1)\theta, \\ V(\xi, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!} \sin(2k+1)\theta, \end{aligned} \right\} (17)$$

$$\xi < 2$$

$$\left. \begin{aligned} U(\xi, \theta) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\xi^2 \cos^2 2\theta} \sin(\xi^2 \sin^2 2\theta) + \frac{1}{2\xi} \cos \theta + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{2 \xi^{2k+1}} \cos(2k-1)\theta, \end{aligned} \right\} (18)$$

$$v(\varrho, \theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\varrho^2 \cos^2 2\theta} \cdot \cos(\varrho^2 \sin 2\theta) - \frac{1}{2\varrho} \sin \theta + \left. \begin{aligned} & - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{2^k \varrho^{2k+1}} \sin(2k-1)\theta. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Należy jednak zauważyć, że szeregi asymptotyczne (18) są słuszne w górnej półpłaszczyźnie zespolonej, to jest dla $0 < \theta < \pi$. Ze względu na szybką zbieżność szeregów (17), w celu zapewnienia dokładności 10^{-4} należy uwzględnić dla $\varrho < 1$ sześć, a dla $\varrho < 2$ - trzynaście wyrazów szeregu. Dokładność szeregów asymptotycznych (18) w przedziale $2 < \varrho < 3$ jest mała i wynosi 10^{-2} , przy ograniczeniu się do czterech składników. W miarę wzrostu ϱ dokładność szybko się poprawia, osiągając poziom 10^{-5} dla $\varrho > 5$, przy uwzględnieniu 5 wyrazów szeregu.

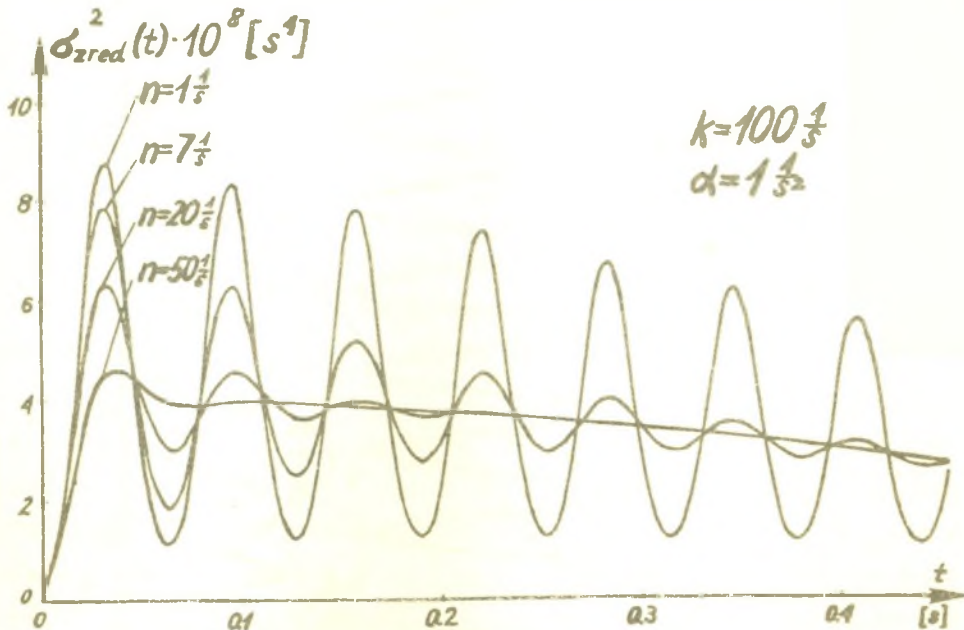
Do obliczeń numerycznych przyjęto

$$\sigma_{\text{zred}}^2(t) = \frac{B}{B} \sigma^2 x^2(t) \quad \text{oraz} \quad k = 100 \left[\frac{1}{s} \right].$$

Rysunek 1 przedstawia zależność wariancji przemieszczenia od czasu dla $\alpha = 1 \left[\frac{1}{s} \right]$ i zmieniającym się współczynnikiem tłumienia.

Na rysunku 2 zaznaczony jest wpływ parametru α funkcji korelacyjnej na przebiegi czasowe wariancji przy $n=1 \left[\frac{1}{s} \right]$.

Dla małych wartości t wariancja oscyluje z częstością $\sim 2\bar{\omega}$. Jest to wynikiem deterministycznych warunków początkowych $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ oraz własności funkcji korelacyjnej polegającej na tym, że dla małych czasów $K(t_1, t_2) = K(0, 0) = B$.

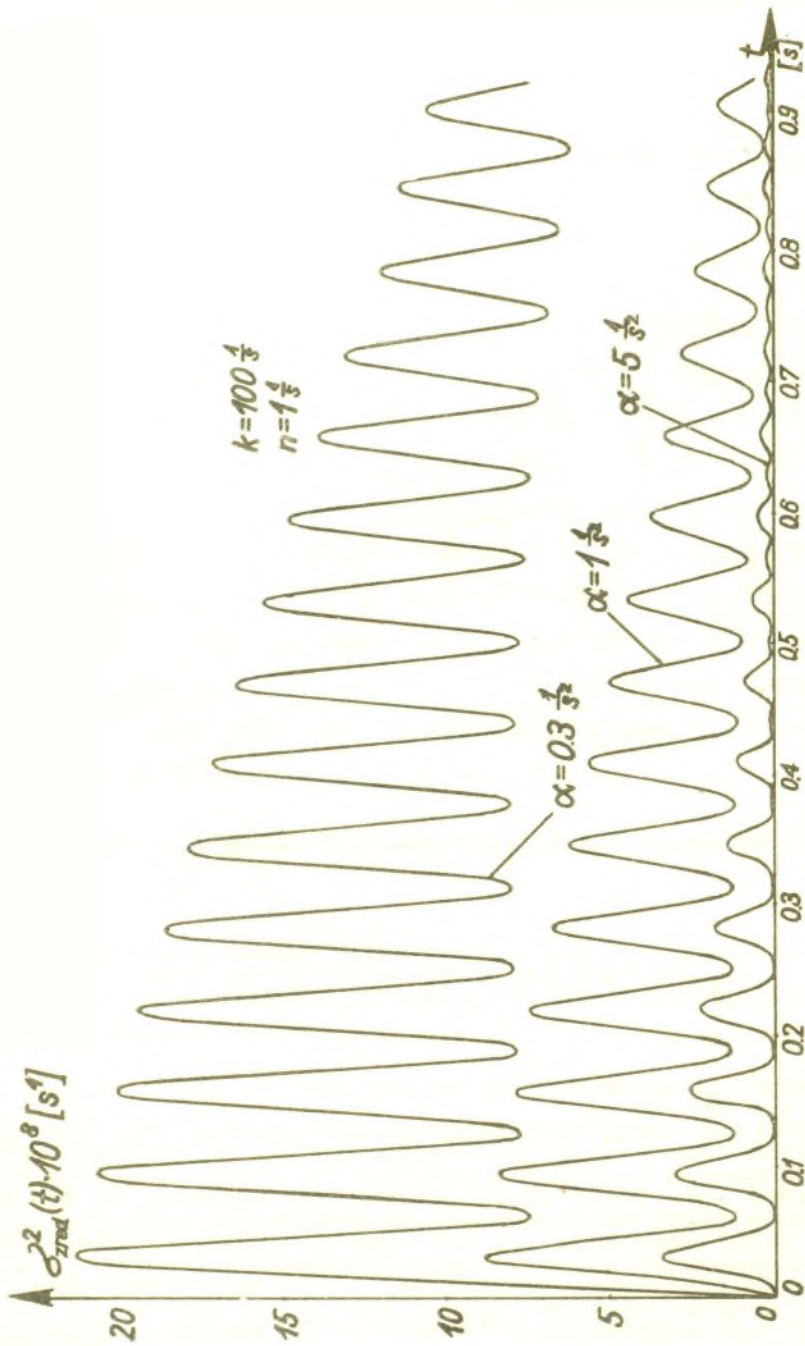


Wzór (3) redukuje się w tym wypadku do prostej postaci

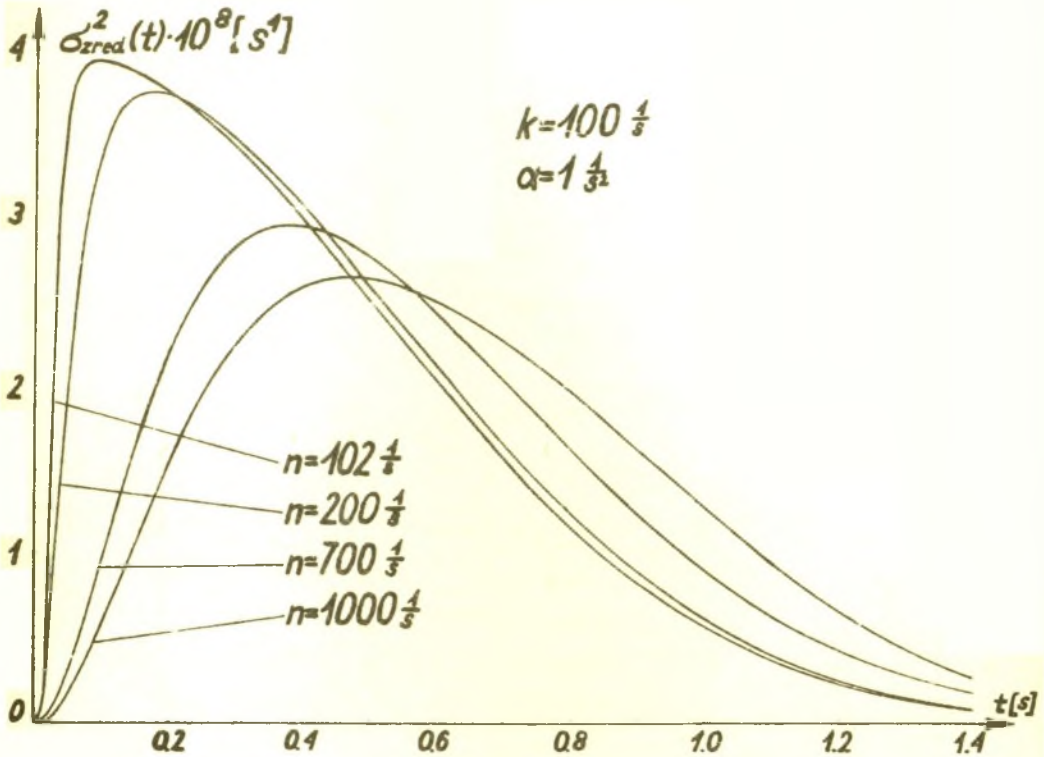
$$\sigma_x^2(t) = B \left[\int_0^t h(t) dt \right]^2 = \frac{\left[e^{-nt} \sin(\bar{\omega}t + \varphi) - \frac{\bar{\omega}}{k} \right]^2}{\bar{\omega}^2 + k^2}, \quad (19)$$

gdzie $\varphi = \arctg \frac{\bar{\omega}}{n}$.

Z zależności (19) bezpośrednio wynika, że częstość drgań jest równa $2\bar{\omega}$. Można zatem sformułować wniosek, że dla małych czasów układ zachowuje się tak, jakby wymuszenie miało charakter deterministyczny. Wahania wariancji są tym mniejsze, im większy jest współczynnik tłumienia. Ze względu na skończoną



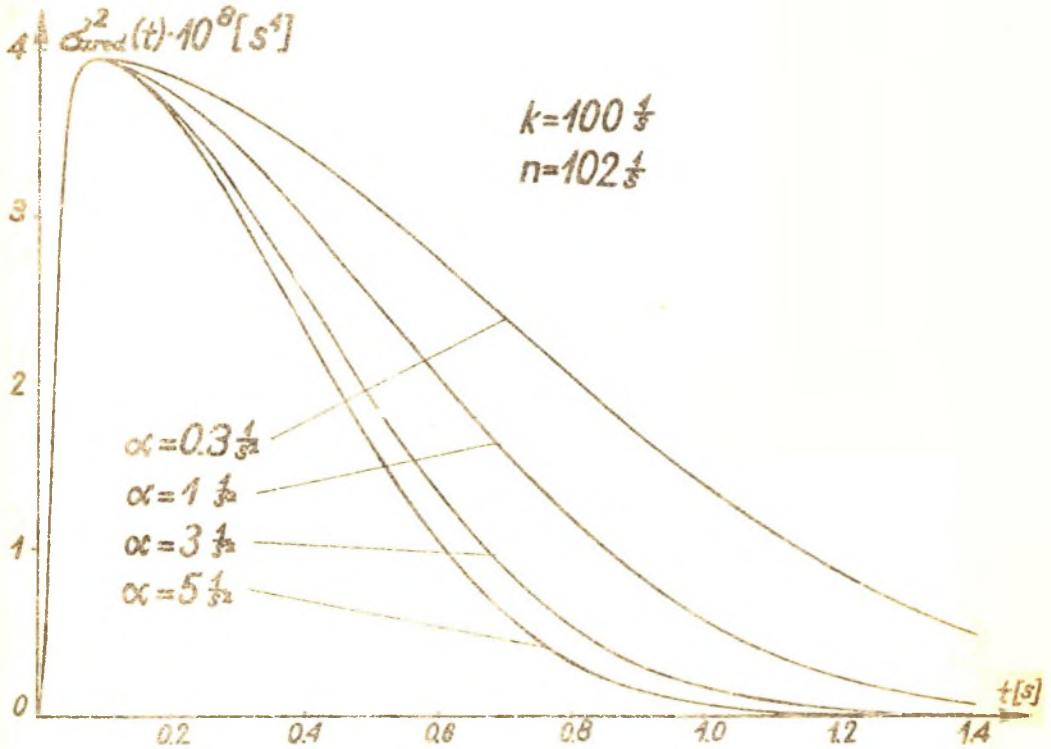
Rys. 2



Rys. 3

bezwładność oscylatora przy czasie rosnącym nieograniczenie wariancja maleje do zera.

Obliczenia numeryczne wariancji przemieszczenia w układzie aperiodycznym oparto na zależnościach (15) i (16). Na rysunku 3 pokazano wpływ współczynnika tłumienia n przy $\alpha = 1 \left[\frac{1}{s} \right]$ na przebieg czasowy wariancji, natomiast na rysunku 4 wpływ parametru α przy $n = 102 \left[\frac{1}{s} \right]$.



Rys. 4

LITERATURA

- [1] Caughey T.K., Stumpf H.J.: Transient response of a dynamic system under random excitation, Journal of the Appl. Mech. 28, 1961, pp 563-6.
- [2] Lin Y.K.: Nonstationary excitation and response in linear systems treated as sequences of random pulses, Journal of the Acoust. Soc. of America, vol. 38, No 3, 1965, pp. 453-460.
- [3] Tylikowski A.: Drgania układu liniowego wywołane procesem przypadkowym o jednostajnie zmiennej częstotliwości, Rozprawy Inżynierskie, Nr 2, 1969.

- [4] Silverman R.A.: Locally stationary random processes, IRE Trans., vol. IT5, 3, 1957, pp. 182-7.
- [5] Piersol G.A.: Power spectra measurement for spacecraft vibration data, J. Spacecraft and Rockets, vol. 4. No 12. pp. 1613-17.
- [6] Gichman I.I.; Sherochod A.W., Wstęp do teorii процесów stochastycznych PWN, Warszawa, 1968.
- [7] Wierwille W.W., Knight J.R.: Off line correlation analysis of nonstationary signals, IEEE Trans. on Computers, vol. C-17, pp. 523-36.
- [8] Карпов К.А.; Таблицы функций $W(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx$ в комплексной области, Изд. АН СССР, М., 1954.
- [9] Фадеева А.П., Терентев Н.М.: Таблицы значений функции $W(z) = e^{-z^2} (1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt)$ от комплексного аргумента, Гостехиздат, М., 1954.
- [10] Mertz C.W.: Tables of Complex Fresnel Integrals, NASA Report SP-3010, Washington, D.C., 1964.

КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
ВЫЗВАННЫЕ ОПРЕДЕЛЕННЫМ ЛОКАЛЬНО-СТАЦИОНАРНЫМ
СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ

Р е з ю м е

Работа рассматривает колебания осциллятора при воздействии стохастических нагрузок сопутствующих запуску ракетных двигателей. Решение задачи проведено при помощи корреляционного анализа определяет дисперсию перемещения. Конечные результаты выражены функциями вероятности комплексного аргумента, которые можно найти в математических таблицах. Численный анализ обнаружил, что дисперсия вибрирует и принимает максимальные значения только в начальных моментах времени. Сначала эти колебания происходят приблизительно с двойной частотой собственных колебаний. Соразмерно с увеличиванием времени правильность эта исчезает, а дисперсия снижается до нуля.

VIBRATIONS OF A SIMPLE OSCILLATOR CAUSED BY CERTAIN
LOCALLY STATIONARY RANDOM PROCESSES

S u m m a r y

The paper discussed vibrations of the simple oscillator caused by random processes accompanying launching of a spacecraft. The solution has been carried out by means of a correlation analysis upon calculation of the variance of the displacement of the oscillator. The final results through tabled function probability of the complex argument have been expressed. The numerical analysis shows, that the variance of displacement is changed with time and the maxima in initial moments only are reached. Oscillations for small time with a double natural frequency of oscillations are performed. As the time increased this regularity has disappeared and the variance of the response quickly has approached to zero.