

JÓZEF JOACHIM TELEGA

Katedra Mechanizacji Górnictwa

WYZNACZANIE NOŚNOŚCI GRANICZNEJ ŁUKU KOŁOWEGO
PRZY POMOCY PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

Streszczenie: W pracy sformułowano zagadnienie wyznaczania nośności granicznej - na drodze statycznej - łuku kołowego przy wykorzystaniu programowania liniowego. Podano również przykład numeryczny, który ilustruje rozważania teoretyczne.

1. Wstęp

W monografii P.G. HODGE'A [1] rozpatrzono problem nośności granicznej łuku kołowego; zagadnienie to rozwiązano zarówno na drodze statycznej jak i kinematycznej.

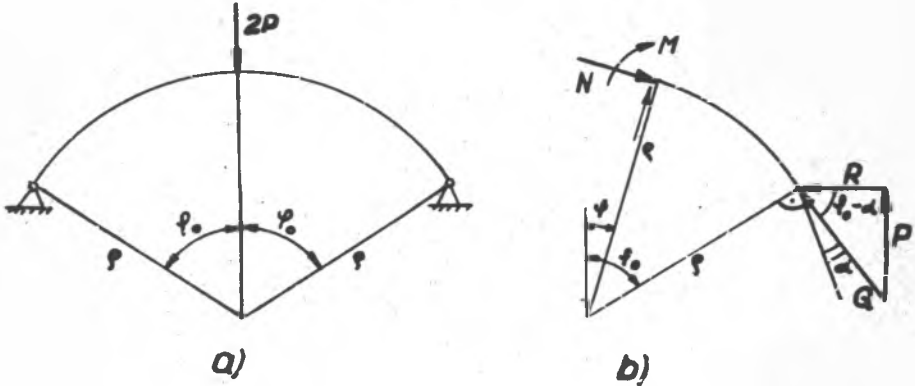
Dotychczasowe wyniki zastosowania programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej takich elementów, jak pręty proste, pąty i powłoki przedstawiono w pracy [2].

W niniejszej pracy rozwiązano zagadnienie nośności granicznej dla łuku kołowego, wykorzystując metodę programowania liniowego.

2. Sformułowanie zagadnienia

Obecnie sformułujemy - w terminach programowania liniowego - zagadnienie wyznaczania nośności granicznej łuku kołowego. Sformułowanie takie otrzymuje się przy wykorzystaniu metody statycznej. Dla prętów zakrzywionych - w odróżnieniu od prostych - w warunku plastyczności trzeba również uwzględnić siłę osiową N ; prowadzi to do warunku, który ma postać $\phi(M, N) = 0$.

Niech łuk kołowy o promieniu ϱ , zamocowany obustronnie przegubowe (rys. 1a), będzie obciążony siłą skupioną $2P$.



Rys. 1

Korzystając z rys. 1b możemy napisać równania równowagi

$$\left. \begin{aligned} N &= Q \cos(\varphi_0 - \alpha - \varphi) \\ M &= P\varrho(\sin \varphi_0 - \sin \varphi) - P\varrho(\cos \varphi - \cos \varphi_0), \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

gdzie α jest kątem zawartym pomiędzy reakcją Q , a styczną do łuku na podporze.

Ponieważ

$$R = P \operatorname{ctg}(\varphi_0 - \alpha), \quad Q = \frac{P}{\sin(\varphi_0 - \alpha)}$$

więc

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{P}{\sin(\varphi_0 - \alpha)} \cos(\varphi_0 - \alpha - \varphi), \\ M &= P\varrho \left[(\sin \varphi_0 - \sin \varphi) - \operatorname{ctg}(\varphi_0 - \alpha)(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Równania (2.2) można przedstawić w następującej bezwymiarowej postaci

$$n = \mu \frac{\cos(\varphi_0 - \alpha - \varphi)}{\sin(\varphi_0 - \alpha)} \quad (2.3)$$

$$m = \mu k \left[(\sin \varphi_0 - \sin \varphi) - \operatorname{ctg}(\varphi_0 - \alpha) (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \right],$$

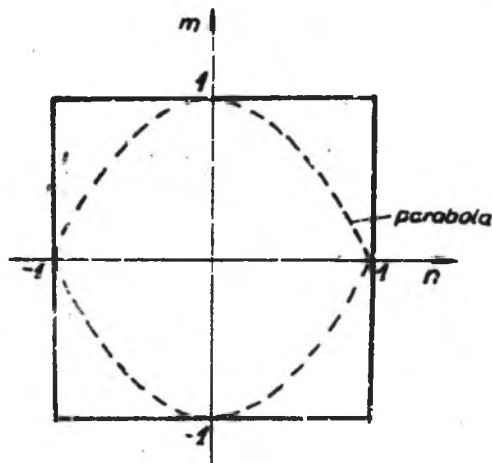
gdzie:

$$m = \frac{M}{M_0}, \quad n = \frac{N}{N_0}, \quad \mu = \frac{P}{N_0}, \quad k = \frac{\varphi N_0}{M_0};$$

$M_0(N_0)$ - moment graniczny (graniczna siła osiowa).

Przyjmijmy następującą zlinearyzowaną postać warunku plastyczności (por. [3]):

$$\begin{aligned} m &= \pm 1 & \text{dla} & & |n| \leq 1, \\ n &= \pm 1 & \text{dla} & & |m| \leq 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$



Rys. 2

Warunek ten graficznie przedstawiono na rys. 2, przy czym linią przerywaną oznaczono krzywą graniczną dla przekroju prostokątnego.

Niech zależność kąta α od kąta φ_0 będzie liniowa (innymi słowy niech $\alpha = (\operatorname{tg} \beta) \varphi_0$); równanie to zilustrowano na rys. 3 (P.G. HODGE [1]).

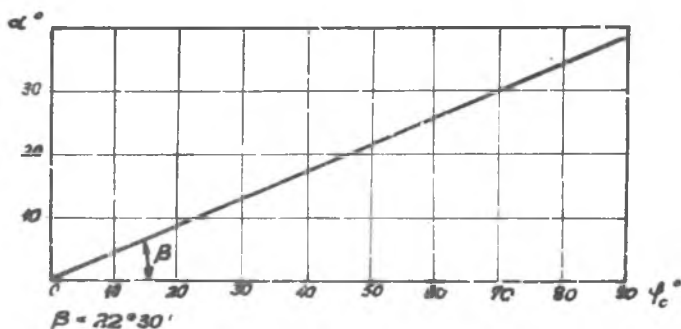
Zapiszmy równania (2.3) w postaci dyskretnej:

$$n_1 - \mu \frac{\cos(\varphi_0 - (\operatorname{tg} \beta)\varphi_0 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_0 - (\operatorname{tg} \beta)\varphi_0)} = 0, \quad (2.5)$$

$$m_1 - \mu k \left[(\sin \varphi_0 - \sin \varphi_1) - \operatorname{ctg}(\varphi_0 - (\operatorname{tg} \beta)\varphi_0) (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0) \right] = 0,$$

przy czym

$$m_1 = m_1(\varphi_1), \quad n_1 = n_1(\varphi_1), \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_0.$$



Rys. 3

Liczba p zależy od wymaganej dokładności.

Położmy $m' = 1 - m$, ($0 \leq m' \leq 2$), $n' = 1 - n$, ($0 \leq n' \leq 2$). Wówczas otrzymamy

$$-m'_1 + 2 \geq 0, \quad (2.6)$$

$$-n'_1 + 2 \geq 0.$$

Przekształcając równania (2.5) otrzymamy:

$$n'_1 + \mu \frac{\cos(\varphi_0 - (\operatorname{tg} \beta)\varphi_0 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_0 - (\operatorname{tg} \beta)\varphi_0)} = 1 > 0, \quad (2.7)$$

$$m_i + \mu k \left[(\sin \varphi_0 - \sin \varphi_i) - \right. \\ \left. - \operatorname{ctg}(\varphi_0 - (\operatorname{tg} \beta) \varphi_0) (\cos \varphi_i - \cos \varphi_0) \right] = 1 > 0, \quad (2.7).$$

$$i = 1, \dots, p.$$

W ten sposób interesujący nas problem programowania liniowego sformułujemy następująco: znaleźć max. funkcji $z = \mu$ przy ograniczeniach (2.6) i (2.7). Po rozwiązaniu tego zagadnienia, przy pomocy np. metody sympleksowej, otrzymamy wartość graniczną współczynnika $\mu(\mu_G)$, skąd $\mu_{\text{Graniczne}} = \mu_G N_0$, a ponadto wielkość momentu zginającego i siły osiowej $(M_i, N_i, i = 1, \dots, p)$ w przekroju o współrzędnej kątowej φ_i .

3. Przykład

Celem zobrazowania powyższych rozważań rozpatrzą przykłady numeryczne, które rozwiązano przy wykorzystaniu maszyny matematycznej Odra 1204" (metodą sympleksową). Współczynnik nośności granicznej μ_G uzyskano dla dwu przypadków:

$$1. \quad p = 7, \quad \varphi_1 = 0^\circ, \quad \varphi_2 = 10^\circ, \quad \varphi_3 = 20^\circ, \quad \varphi_4 = 25^\circ, \quad \varphi_5 = 30^\circ, \quad \varphi_6 = 40^\circ, \quad \varphi_7 = 50^\circ.$$

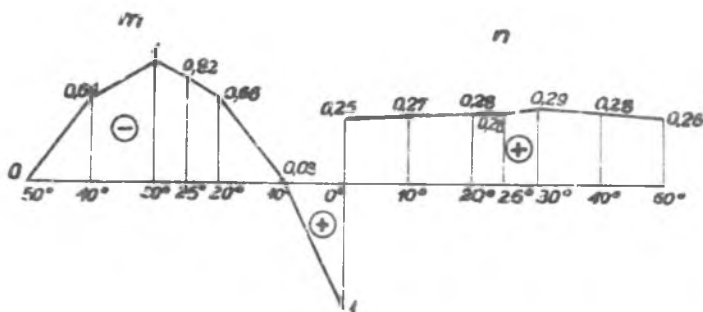
$$2. \quad p = 11, \quad \varphi_1 = 0^\circ, \quad \varphi_2 = 5^\circ \dots \text{itd.}, \quad \varphi_{11} = 50^\circ.$$

Przyjęto zarówno w pierwszym, jak i w drugim przypadku $k = 50$. Dla przypadku pierwszego otrzymano: $\mu_G = 0,146$, $m_1 = 1$, $m_2 = 0,03$, $m_3 = -0,66$, $m_4 = -0,82$, $m_5 = -1$, $m_6 = -0,64$, $m_7 = 0$; $n_1 = 0,25$, $n_2 = 0,27$, $n_3 = 0,28$, $n_4 = 0,28$, $n_5 = 0,29$, $n_6 = 0,28$, $n_7 = 0,26$, natomiast dla przypadku drugiego: $\mu_G = 0,146$, $m_1 = 1$, $m_2 = 0,43$, $m_3 = -0,03$, $m_4 = -0,40$, $m_5 = -0,66$, $m_6 = -0,82$, $m_7 = -1$, $m_8 = -0,81$, $m_9 = -0,64$, $m_{10} = -0,37$, $m_{11} = 0$; $n_1 = 0,25$, $n_2 = 0,26$

$$n_3 = n_4 = 0,27, \quad n_5 = n_6 = 0,28, \quad n_7 = 0,29, \quad n_8 = n_9 = 0,28, \quad n_{10} = 0,27, \quad n_{11} = 0,26.$$

Jak widać, μ_G jest jednakowe w obydwu przypadkach. Przeguby plastyczne powstają w przekrojach określonych kątami $\varphi_1 = 0^\circ$ oraz $\varphi_5 = 30^\circ$.

Ciekawą jest rzeczą porównanie wyników numerycznych z wartościami dokładnymi podanymi w [3]. Wartości te otrzymujemy z wzorów (4.32) i (4.33) wzmiankowanej wyżej pracy. Podstawiając w tych ostatnich $\varphi_0 = 50^\circ$ otrzymujemy (po uwzględnieniu zależności $\mu_G = \frac{P_G}{N_0}$), $\mu_G = 0,152$ (wartość dokładna), natomiast kąt odpowiadający w naszym przypadku kątowi φ_5 wynosi $29^\circ 22'$. Odchylenia (zresztą nieduże, np. dla μ_G ok. 3,9%) spowodowane są głównie przyjęciem liniowej zależności $\alpha = (\operatorname{tg} \beta) \varphi_0$.



Rys. 4

Na rys. 4 przedstawiono wykresy "momentów zginających" m i "sił osiowych" n dla przypadku pierwszego.

LITERATURA

- [1] HODGE P.G. - Plastic analysis of structures, Mc Graw-Hill, New York 1959.
- [2] TELEGA J.J. - Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej (przegląd prac), Mech. Teor. Stos., praca przesłana do redakcji.
- [3] Teoria plastyczności, praca zbiorowa pod red. W. Olszaka, P. Perzyny, A. Sawczuka, PWN, Warszawa 1955.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КРУГОВОГО СВОДА
ПРИ ПОМОЩИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С о д е р ж а н и е

В работе подали общий метод определения несущей способности кругового свода в определениях линейного программирования. Общие рассуждения показали числовым примером.

DETERMINATION OF LIMIT LOAD CAPACITY OF CIRCULAR ARCH BY
LINEAR PROGRAMMING

S u m m a r y

The general method of determination of limit load capacity of circular arch by linear programming is given in the paper. Consideration of the whole is illustrated in the numerical example.