

WŁADYSŁAW BRZOZOWSKI

Katedra Konstrukcji Maszyn Roboczych

ANALIZA CELOWOŚCI WPROWADZANIA POJĘCIA PROWADNICZY ZASTĘPCZEJ  
DO OBLICZANIA PROWADNIC

Streszczenie: Przeprowadzono analizę wykazującą, że istnieje szereg przypadków obciążenia przewodnicy trójkątnej, dla których pojęcie płaskiej przewodnicy zastępczej traci sens fizyczny. Podano metodę określania przedziałów zmienności obciążenia, w których jest słuszne to stwierdzenie oraz przedstawiono szczegółowy przykład liczbowy. Wskazano wnioski wynikające z przeprowadzonej analizy.

Pojęcie przewodnicy zastępczej wprowadzono w literaturze [1, 2, 3] dotyczącej obliczania przewodnic w celu sprowadzenia obliczeń układu przewodnic, w którym przynajmniej jedna jest trójkątna do obliczeń układu przewodnic płaskich. Po wyznaczeniu obciążenia działającego na każdą z przewodnic przeprowadza się obliczenia nacisków ekstremalnych występujących na powierzchniach każdej przewodnicy, przy czym powraca się do rzeczywistych wymiarów przewodnicy trójkątnej.

Prowadnica zastępcza to taka przewodnica płaska, która ma tę samą sztywność co zastępowana przewodnica trójkątna. Inaczej mówiąc: takie samo obciążenie powoduje takie samo przemieszczenie sań w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku długości zarówno na przewodnicy trójkątnej jak i na przewodnicy zastępczej. Reszetow [1] i Aczerkan [2] podają wzory na szerokość przewodnicy zastępczej, natomiast Wrotny [3] analizując przypadek, gdy na przewodnicę nie działa moment otrzymał inną zależność, nie będącą szczególnym przypadkiem wzorów Reszetowa i Aczerkana.

Przy obliczaniu prowadnic zakłada się, że:

- 1) sanie zachowują się jak ciało doskonale sztywne,
- 2) wielkość odkształcenia łoża  $\delta$ , będącego przemieszczeniem punktu powierzchni styku prowadnic w kierunku normalnym do tej powierzchni, jest wprost proporcjonalna do wielkości nacisku  $p$  w tym punkcie:

$$\delta = kp, \quad (1)$$

przy czym współczynnik proporcjonalności  $k$  zależy od rodzaju materiału, sposobu obróbki prowadnicy i chropowatości powierzchni,

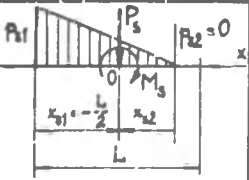
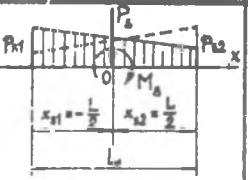
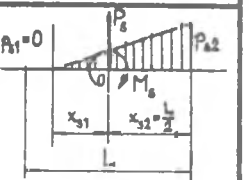
3) wzdłuż powierzchni styku prowadnic naciski rozkładają się liniowo, natomiast w kierunku poprzecznym do prowadnicy - równomiernie (tym samym ograniczamy się do przypadków, gdy szerokość prowadnicy jest mała w stosunku do rozstawienia prowadnic).

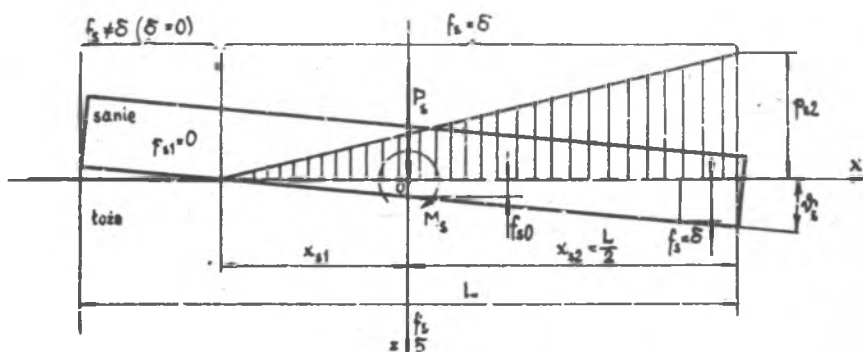
W oparciu o te założenia wyprowadza się wzory na wartości nacisków  $p_{s1}$ ,  $p_{s2}$  w punktach skrajnych powierzchni styku o współrzędnych  $x_{s1}$ ,  $x_{s2}$ , a także wzory na przemieszczenie sań  $f_s$  w kierunku normalnym do powierzchni. W tabelicy 1 zebrano te wzory dla różnych przypadków obciążenia powierzchni o wymiarach  $s \times L$  siłą  $P_s$  przyłożoną w środku prowadnicy i momentem  $M_s$ , zaś rysunek 1 jest ilustracją dla przypadku, gdy  $\frac{1}{6} < \frac{M_s}{P_s L} < \frac{1}{2}$ . Zależności z tabelicy 1 odnoszą się do każdej prostokątnej powierzchni płaskiej dowolnej prowadnicy i pozwalają wyznaczyć wartości nacisków i przemieszczeń, jeżeli tylko znane jest obciążenie tej powierzchni.

Niech dana będzie prowadnica trójkątna o przekroju normalnym pokazanym na rys. 2a. Długość sań (prowadnika) wynosi  $L$ . Przemieszczenie sań  $f$  w dowolnym przekroju normalnym rozpatrywane w stanie równowagi jest efektem przemieszczeń w kierunkach normalnych do obu powierzchni prowadnicy oraz przemieszczeń stycznych. Wyrażając to przemieszczenie poprzez dwie jego składowe:  $f_y$  i  $f_z$  otrzymuje się na podstawie rysunku 2a

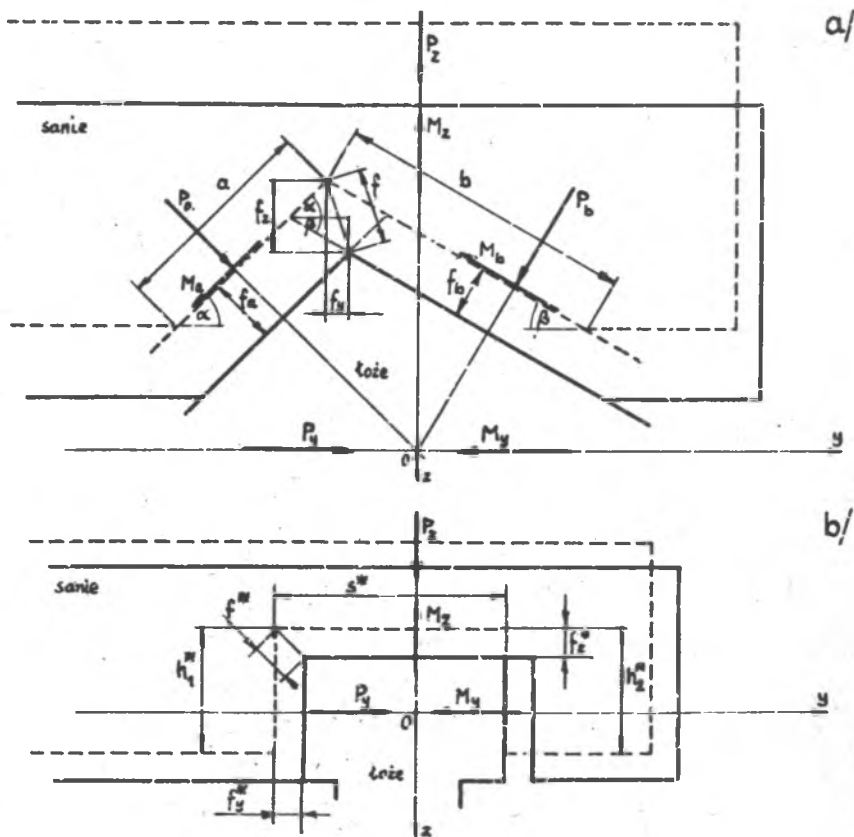
Tablica I

Zależności obowiązujące dla powierzchni płaskiej o wymiarach  $s \times L$

Lp.	$\frac{M_s}{P_s L}$	$-\frac{1}{2} < \frac{M_s}{P_s L} < -\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6} \leq \frac{M_s}{P_s L} \leq \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} < \frac{M_s}{P_s L} < \frac{1}{2}$
1.	Wykres rozkładu nacisków			
2.	$P_{s1} =$	$\frac{P_s}{sL} \cdot \frac{2}{3 \left( \frac{1}{2} + \frac{M_s}{P_s L} \right)}$	$\frac{P_s}{sL} \left( 1 - \frac{6M_s}{P_s L} \right)$	0
3.	$P_{s2} =$	0	$\frac{P_s}{sL} \left( 1 + \frac{6M_s}{P_s L} \right)$	$\frac{P_s}{sL} \cdot \frac{2}{3 \left( \frac{1}{2} - \frac{M_s}{P_s L} \right)}$
4.	$x_{s1} =$	$-\frac{L}{2}$	$-\frac{L}{2}$	$L \left( 3 \frac{M_s}{P_s L} - 1 \right)$
5.	$x_{s2} =$	$L \left( 3 \frac{M_s}{P_s L} + 1 \right)$	$\frac{L}{2}$	$\frac{L}{2}$
6.	$f_s =$	$x \operatorname{tg} \vartheta_s + f_{s0}$		
7.	$\operatorname{tg} \vartheta_s =$	$-k_s \frac{P_s}{sL^2} \cdot \frac{2}{9 \left( \frac{1}{2} + \frac{M_s}{P_s L} \right)^2}$	$12 k_s \frac{M_s}{sL^3}$	$11 \frac{P_s}{sL^2} \cdot \frac{2}{9 \left( \frac{1}{2} - \frac{M_s}{P_s L} \right)^2}$
8.	$f_{s0} =$	$k_s \frac{P_s}{sL} \cdot \frac{2 \left( 1 + 3 \frac{M_s}{P_s L} \right)}{9 \left( \frac{1}{2} + \frac{M_s}{P_s L} \right)^2}$	$k_s \frac{P_s}{sL}$	$k_s \frac{P_s}{sL} \cdot \frac{2 \left( 1 - 3 \frac{M_s}{P_s L} \right)}{9 \left( \frac{1}{2} - \frac{M_s}{P_s L} \right)^2}$



Rys. 1. Rozkład nacisków wzdłuż powierzchni płaskiej, odkształcenia żo-  
 ła  $\delta$ , przemieszczenia sań  $f_s$  w przypadku, gdy  $1/6 < M_s/P_s L < 1/2$



Rys. 2. Wymiary obciążenia i przemieszczenia w przekroju normalnym pro-  
 wadniccy:

a - trójkątnej; b - zastępczej płaskiej

$$f_y = \frac{f_a \cos \beta - f_b \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (2)$$

$$f_z = \frac{f_a \sin \beta + f_b \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad (3)$$

gdzie:

$f_{a,b}$  - przemieszczenie normalne do powierzchni o szerokości  $a, b$ ,  
 $\alpha, \beta$  - kąty nachylenia powierzchni roboczych przewodnicy do osi  $y$ .

Zmiennosc przemieszczeń  $f_a$  i  $f_b$  wzdłuż przewodnicy podana jest wzorami z tablicy 1, przy czym w miejsce  $s$  należy wstawić odpowiednio  $a$  lub  $b$ . A zatem

$$f_a = x \operatorname{tg} \vartheta_a + f_{a0}$$

$$f_b = x \operatorname{tg} \vartheta_b + f_{b0}$$

Podstawiając te zależności do równań (2) i (3) otrzymuje się wzory na składowe przemieszczenia przewodnika trójkątnego w funkcji współrzędnej  $x$ :

$$f_y = \frac{\operatorname{tg} \vartheta_a \cos \beta - \operatorname{tg} \vartheta_b \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} x + \frac{f_{a0} \cos \beta - f_{b0} \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$f_z = \frac{\operatorname{tg} \vartheta_a \sin \beta + \operatorname{tg} \vartheta_b \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} x + \frac{f_{a0} \sin \beta + f_{b0} \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Widać, że wyrażenia

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta_y &= \frac{\operatorname{tg} \vartheta_a \cos \beta - \operatorname{tg} \vartheta_b \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \\ f_{y0} &= \frac{f_{a0} \cos \beta - f_{b0} \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

określają kąt obrotu sań  $\phi_y$  mierzony w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny x-y oraz przemieszczenie  $f_{y0}$  w kierunku osi y punktów o współrzędnej  $x = 0$ , natomiast wyrażenia

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \phi_z &= \frac{\operatorname{tg} \phi_a \sin \beta + \operatorname{tg} \phi_b \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \\ f_{z0} &= \frac{f_{a0} \sin \beta + f_{b0} \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

określają kąt obrotu sań  $\phi_z$  mierzony w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny x-z oraz przemieszczenie  $f_{z0}$  w kierunku osi z punktów sań o współrzędnej  $x = 0$ .

Aby można było skorzystać z równań (4) i (5) trzeba znać obciążenie każdej powierzchni przewodnicy. Na podstawie rys. 2a można napisać następujące równania równoważności:

$$P_a \sin \alpha - P_b \sin \beta = P_y$$

$$P_a \cos \alpha + P_b \cos \beta = P_z$$

$$M_a \cos \alpha + M_b \cos \beta = M_y$$

$$M_a \sin \alpha - M_b \sin \beta = -M_z,$$

z których wynika, że

$$P_a = P_z \frac{\sin \beta + \frac{P_y}{P_z} \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned}
 P_b &= P_z \frac{\sin\alpha - \frac{P_y}{P_z} \cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \\
 M_a &= M_y \frac{\sin\beta - \frac{M_z}{M_y} \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \\
 M_b &= M_y \frac{\sin\alpha + \frac{M_z}{M_y} \cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}
 \end{aligned} \right\} (6)$$

oraz

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{M_a}{P_a L} &= \frac{M_y}{P_z L} \frac{\sin\beta - \frac{M_z}{M_y} \cos\beta}{\sin\beta + \frac{P_y}{P_z} \cos\beta} \\
 \frac{M_b}{P_b L} &= \frac{M_y}{P_z L} \frac{\sin\alpha + \frac{M_z}{M_y} \cos\alpha}{\sin\alpha - \frac{P_y}{P_z} \cos\alpha}
 \end{aligned} \right\} (7)$$

Tak więc znajomość obciążenia przewodnicy siłami  $P_y$ ,  $P_z$  i momentami  $M_y$ ,  $M_z$  pozwala wyznaczyć według wzorów (6) obciążenie każdej powierzchni przewodnicy, a także - za pomocą wzorów (7) - współczynniki  $M_a/P_a L$  i  $M_b/P_b L$  determinujące, który z przedstawionych w tabelicy 1 przypadków rozkładu nacisków ma miejsce na danej powierzchni. Można zatem według wzorów tabelicy 1 i równań (4) i (5) wyznaczyć kąty obrotu  $\psi_y$  i  $\psi_z$  oraz przemieszczenia  $f_{y0}$  i  $f_{z0}$ .

Rozpatrzmy teraz przewodnicę płaską, której przekrój normalny przedstawia rys. 2b. Długość przewodnika wynosi  $L^*$ . Przewodnica ta jest obciążona tak samo, jak przewodnica trójkątna z rys. 2a. Działanie tego

obciążenia powoduje, że w dowolnym przekroju normalnym przemieszczenie sań wynosi  $f^*$ . Można je wyznaczyć określając dwie jego składowe. Składowa  $f_y^*$  jest wywołana działaniem siły  $P_y$  i momentu  $M_z$ , natomiast składowa  $f_z^*$  - siły  $P_z$  i momentu  $M_y$  (rys. 2b). Tę drugą składową można obliczyć wprost z równań tablicy 1, jeżeli dokonać w nich odpowiednich podstawień. Tak więc należy

w miejsce	$P_s$	wstawić	$P_z$
"	$M_s$	"	$M_y$
"	L	"	$L^*$
"	s	"	$s^*$
"	$k_s$	"	$k_s^*$

Wtedy według wzorów tablicy 1 podanych w wierszu 7 obliczamy  $tg\theta_z^*$ , a według wzorów z wiersza 8 -  $f_{z0}^*$ . Ostatecznie

$$f_z^* = x tg\theta_z^* + f_{z0}^* \quad (8)$$

Drugą składową  $f_y^*$  można obliczyć opierając się o wzory tablicy 1, ale dopiero po rozłożeniu obciążenia  $P_y, M_z$  na powierzchni  $h_1^*$  i  $h_2^*$  prowadnicy (obie te powierzchnie tworzą prowadnicę płaską zamkniętą). W dalszym ciągu jednak ograniczymy się tylko do rozważań w płaszczyźnie równoległej do x-z, ponieważ już na ich podstawie można wyciągnąć dostatecznie ważne wnioski.

Aby prowadnica płaska przedstawiona na rys. 2b była równoważna - w wyjaśnionym na początku sensie - prowadnicy trójkątnej z rys. 2a musi być  $f = f^*$ , a zatem również  $f_z = f_z^*$ . Stąd wynika, że

$$\left. \begin{aligned} tg\theta_z &= tg\theta_z^* \\ f_{z0} &= f_{z0}^* \end{aligned} \right\} \quad (9)$$



czyli kąty obrotu sań i przemieszczenia tych punktów sań których współrzędna  $x$  wynosi 0 muszą być dla obu przewodnic jednakowe.

Wielkości  $tg\theta_z$  i  $f_{z0}$  są funkcjami sił  $P_y, P_z$ , momentów  $M_y, M_z$  i wymiarów  $a, b, \alpha, \beta, L$  przewodnicy trójkątnej, natomiast wielkości  $tg\theta_z^*$  i  $f_{z0}^*$  są funkcjami siły  $P_z$ , momentu  $M_y$  i wymiarów  $s^*, L^*$  przewodnicy płaskiej. Wobec tego z równań (9) można wyznaczyć wartości  $s^*, L^*$ , jeżeli wstawić do nich odpowiednie zależności. Na podstawie tablicy 1 łatwo stwierdzić, że istnieje dziewięć możliwych skojarzeń rozkładów nacisków na powierzchniach przewodnicy trójkątnej oraz, że możliwe są trzy przypadki obciążenia przewodnicy płaskiej. Należałoby więc według równań (9) utworzyć 27 układów równań i po rozwiązaniu każdego z nich ze względu na  $s^* : L^*$  przeprowadzić analizę wyników. Jest to jednak metoda pracochłonna, a interesujące wnioski można wyciągnąć już na podstawie analizy pewnych (patrz niżej) przypadków szczególnych. Zasadniczym celem pracy jest bowiem wykazanie, że istnieją przypadki, gdy żadna przewodnica płaska nie jest w stanie zastąpić przewodnicy trójkątnej (w przyjętym sensie).

Zbadajmy zatem przebieg zmienności wymiarów  $s^*$  i  $L^*$  przewodnicy zastępczej w funkcji stosunku  $M_z/M_y$  dla następujących założeń szczególnych:

$$\frac{P_y}{P_z} = 0,333; \quad \frac{M_z}{P_z L} = 0,1; \quad a = b; \quad \alpha = \beta = 45^\circ; \quad k_a = k_b = k_s^* = k.$$

Podstawiając te dane do wzorów (7) otrzymujemy:

$$\frac{M_a}{P_a L} = 0,075 \left(1 - \frac{M_z}{M_y}\right)$$

$$\frac{M_b}{P_b L} = 0,150 \left(1 + \frac{M_z}{M_y}\right).$$

Równania szczegółowe otrzymane dla przykładu rozważanego w tekście ( $m = \frac{M_z}{M_y}$ )

Przedział	I	II	III	IV
$\frac{M_a}{P_a L}$	$\frac{1}{6} < \frac{M_a}{P_a L} < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6} < \frac{M_a}{P_a L} < \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6} < \frac{M_a}{P_a L} \leq \frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6} < \frac{M_a}{P_a L} < \frac{1}{6}$
$\frac{M_b}{P_b L}$	$-\frac{1}{2} < \frac{M_b}{P_b L} < -\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6} \leq \frac{M_b}{P_b L} < \frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6} < \frac{M_b}{P_b L} \leq \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} < \frac{M_b}{P_b L} < \frac{1}{2}$
$tg \vartheta_z =$	$\frac{26,5 k P_z}{a L^2 (5,68 + m)^2} -$ $-\frac{3,29 k P_z}{a L^2 (4,33 + m)^2}$	$\frac{26,5 k P_z}{a L^2 (5,68 + m)^2} +$ $+\frac{6,0 k M_y (1+m)}{a L^3}$	$\frac{6,0 k M_y (1-m)}{a L^3} +$ $+\frac{6,0 k M_y (1+m)}{a L^3}$	$\frac{6,0 k M_y (1-m)}{a L^3} +$ $+\frac{3,29 k P_z}{a L^2 (2,33 - m)^2}$
$f_{z0} =$	$\frac{5,98 k P_z (3,44 + m)}{a L (5,68 + m)^2} +$ $+\frac{1,48 k P_z (3,22 + m)}{a L (4,33 + m)^2}$	$\frac{5,98 k P_z (3,44 + m)}{a L (5,68 + m)^2} +$ $+\frac{0,333 k P_z}{a L}$	$\frac{0,666 k P_z}{a L} +$ $+\frac{0,333 k P_z}{a L}$	$\frac{0,666 k P_z}{a L} +$ $+\frac{1,48 k P_z (2,22 - m)}{a L (2,33 - m)^2}$
$\left(\frac{L^*}{L}\right)^2 =$	$0,383 \frac{(m+3,35)}{(m+3,65)} \times$ $\times \frac{(m^2 + 9,25m + 21,5)}{(m+4,65)}$	$0,666 \frac{(m+25,7)}{(m+8,35)} \times$ $\times \frac{(m+3,65)}{(m^2 + 4,05m + 9,3)}$	1	$-1,33 \frac{(m-1,55)}{(m-3,56)} \times$ $\times \frac{(m-5,34)}{(m^2 - 2,1m + 3)}$

Wykresy zmienności współczynników  $M_a/P_a L$  i  $M_b/P_b L$  w funkcji stosunku  $M_z/M_y$  przedstawia rys. 3. Widać z tego wykresu, że w obszarze wartości  $M_z/M_y$ , dla których występuje obciążenie obu powierzchni przewodnicy trójkątnej ( $-0,5 < M_a/P_a L < 0,5$  oraz  $-0,5 < M_b/P_b L < 0,5$ ) istnieją cztery przedziały, w których zachodzą różne przypadki skojarzeń rozkładów nacisków. Wobec tego każda z zależności (5) określona będzie czterema wzorami. W tabelicy 2 podano gotowe wzory na  $\text{tg}\phi_z$  i  $f_{z0}$  dla wymienionych wyżej założeń, uzyskane przez podstawienie wzorów z tabelicy 1 do równań (5), następnie podstawienie zależności

$$P_a = 0,943 P_z; \quad P_b = 0,471 P_z; \quad M_a = 0,707 M_y \left(1 - \frac{M_z}{M_y}\right);$$

$$M_b = 0,707 M_y \left(1 + \frac{M_z}{M_y}\right)$$

wynikających z równań (6) i przekształcenia.

Dla przewodnicy zastępczej obowiązują wzory (patrz tablica 1):

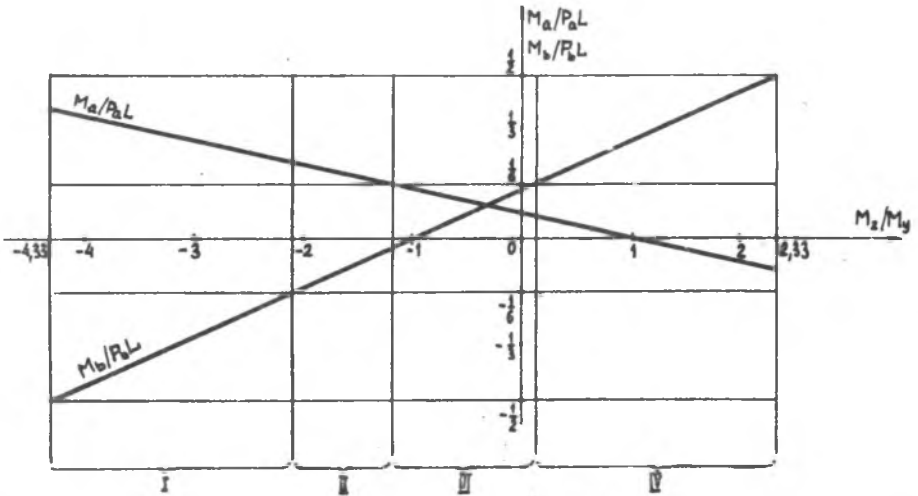
$$\text{tg}\phi_z^* = 12 \frac{M}{s^* (L^*)^3} k_s^*$$

$$f_{z0}^* = \frac{P_z}{s^* L^*} k_s^*$$

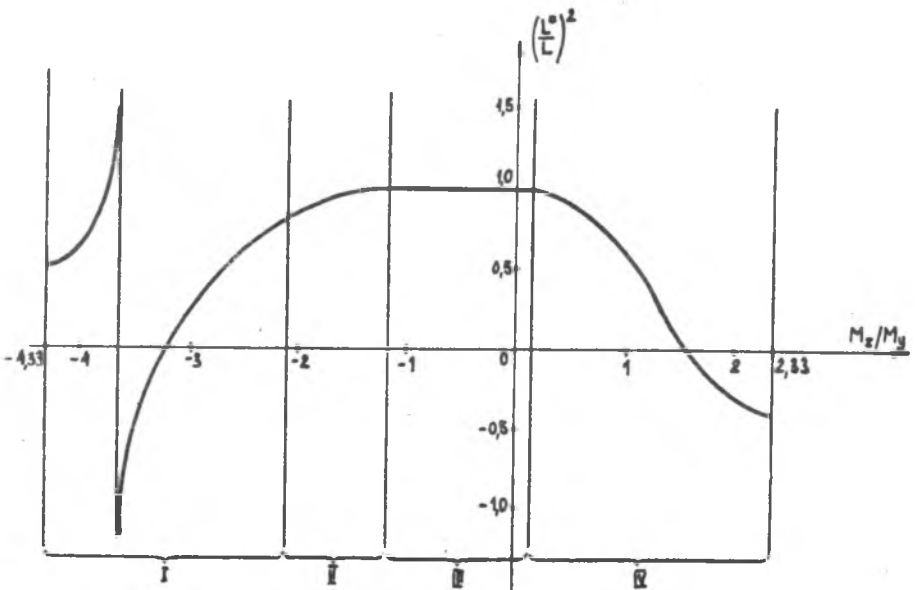
Zgodnie z warunkiem (9) musi być  $\text{tg}\phi_z^* = \text{tg}\phi_z$  oraz  $f_{z0}^* = f_{z0}$ , skąd otrzymujemy

$$L^* = \sqrt{12 \frac{M}{P_z} \frac{f_{z0}}{\text{tg}\phi_z}} \quad (10)$$

$$s^* = \frac{P_z k}{f_{z0} L^*} \quad (11)$$



Rys. 3. Wykres zmienności współczynników  $M_a/P_a L$  i  $M_b/P_b L$  w funkcji stosunku  $M_z/M_y$  dla przykładu omawianego w tekście



Rys. 4. Wykres zmienności  $(L^*/L)^2$  w funkcji stosunku  $M_z/M_y$  dla przykładu omawianego w tekście

W tabelicy 2 podano również wzory opisujące zależność  $\left(\frac{L^*}{L}\right)^2$ , uzyskane z równania (10) przez podstawienie do niego równań na  $\operatorname{tg} \alpha_z$  i  $f_{z0}$  ujętych w tabelicy 2, zaś rysunek 4 pokazuje wykres tej zależności w funkcji stosunku  $M_z/M_y$ . Widać, że istnieją takie wartości  $M_z/M_y$ , dla których  $\left(\frac{L^*}{L}\right)^2 < 0$ . Zatem dla tych wartości nie ma rozwiązań układu równań (9) w sferze liczb rzeczywistych.

Wykazano więc, że istnieją przypadki, w których pojęcie przewodnicy zastępczej traci sens fizyczny. Rozdział obciążenia sań na poszczególne przewodnice metodą zakładającą równoważność przewodnic trójkątnej i płaskiej prowadzić musi zatem w tych przypadkach do błędnych wyników i wymaga zastosowania innej metody. Należy wobec tego opracować jednolitą metodę obliczania przewodnic, nie wymagającą używania pojęcia przewodnicy zastępczej, a równocześnie pozwalającą na rozwiązywanie wszystkich przypadków obciążenia.

Metoda taka została opracowana przez autora i jest przygotowywana do druku.

#### LITERATURA

- [1] KAMINSKAJA W.W., LEWINA Z.M., REŠETOW D.N.: Staniny i korpusnyje detali metalokoreżuščich stankow. Moskwa 1960.
- [2] AČERKAN N.S.: Rasčet i konstruirowanie metalokoreżuščich stankow. Moskwa 1949.
- [3] WROTYNY L.T.: Podstawy budowy obrabiarek. Warszawa 1964.

АНАЛИЗ ЦЕЛИ ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЯ ЗАМЕЩАТЕЛЬНОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ  
К ВЫЧИСЛЕНИЯМ НАПРАВЛЯЮЩИХ

С о д е р ж а н и е

Введение понятия замещающей направляющей облегчило вычисления давления на поверхностях треугольной направляющей. Однако существуют случаи когда понятие это теряет свой физический смысл. В статье находится метод доказательства этого и пример.

ANALYSIS OF EXPEDIENCY USED THE IDEA OF SUBSTITUTIONAL SLIDEWAY  
IN CALCULATIONS SLIDEWAY

S u m m a r y

Used the idea of substitutional slideway was simplified calculations pressures on areas of triangular slideway. However, series cases are existing, where this idea hasn't physical meaning. In this article method demonstrative of this fakt and example are presenting.