

REMIGIUSZ CŹWIK

ZAGADNIENIE OPTIMALIZACJI WYMIARÓW PRZEKROJU ZGINANYCH ELEMENTÓW DŹWIGNIC

Streszczenie: Omówiono zagadnienie doboru wymiarów przekroju poprzecznego elementów zginanych. Jako kryterium przyjęto ich minimalny ciężar, przy jednoczesnym spełnieniu warunku wytrzymałości i stateczności miejscowej. Wyprowadzono wzory pozwalające w prosty sposób wyznaczyć wymiary przekroju ceowego i teowego przy czystym zginaniu. Wzory te mogą być wykorzystane i dla zginania swobodnego, jeżeli naprężenia styczne przy zginaniu są niewielkie.

1. Wstęp

Wybór podstawowych form i wymiarów ustroju nośnego i jego elementów dla projektowanych konstrukcji wykazuje bezpośredni wpływ na ich ciężar i pracę pod działaniem obciążeń statycznych i dynamicznych, koszty wytwarzania i eksploatacji jak również stwarzany przez nie efekt architektoniczny. Zagadnienie to staje się szczególnie ważne dla konstrukcji, w których podstawowym kryterium poprawności rozwiązania i pracy jest niski ciężar własny. Do konstrukcji tych należą między innymi urządzenia dźwigowe, mosty kolejowe i drogowe, belki podsuwnicowe itp.

Większość elementów ustroju nośnego stanowią dźwigary, dla których głównym obciążeniem jest moment zginający. Typowym przykładem mogą być dźwigary główne i czołowe mostu suwnicy.

Dźwigary takie mogą być wykonane z profili walcowanych, giętych lub jako blachownice nitowane i spawane.

Ustalenie przekroju poprzecznego dźwigarów staje się więc problemem szczególnie ważnym.

2. Ustalenie optymalnych wymiarów przekroju

Ustalenie optymalnego przekroju przeprowadzimy przyjmując jako kryterium minimalny ciężar dźwigara (minimalny przekrój), przy spełnieniu jednocześnie warunków wytrzymałości i stateczności miejscowej jego elementów. Rozpatrujemy dźwigar o przekroju ceowym i teowym, symetryczny względem osi $y-y$, o stałej grubości pólki i średnika. Dźwigar jest dostatecznie długi i posiada stałą lub prawie stałą wysokość wzdłuż rozpiętości. Materiał dźwigara jest sprężysty i podlega prawu Hooke'a. Grubości pólki g_b i średnika g_h są w porównaniu do szerokości pólki b i wysokości średnika h bardzo małe, co pozwala przyjąć następujący wzór dla powierzchni przekroju

$$F = 2 b g_b + h g_h = F(b, g_b, h, g_h) \quad (1)$$

oraz dla wartości statycznych:

$$I = \frac{b g_b h^2}{2} + \frac{g_h h^3}{12} \quad (2)$$

i

$$W = b g_b h + \frac{1}{6} g_h h^2 \quad (3)$$

Przy czystym zginaniu (rys. 1) warunek wytrzymałości jednolity dla pasów i środka zapisujemy w postaci

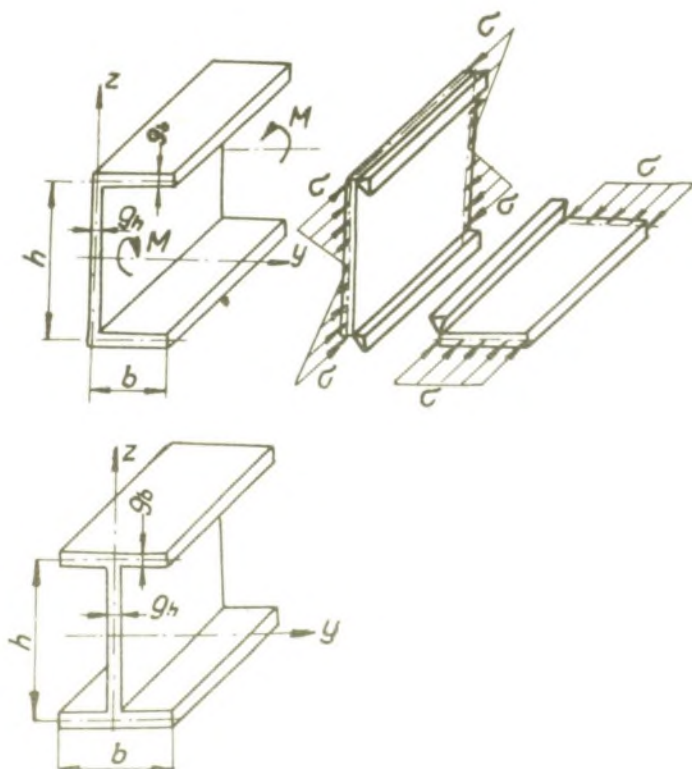
$$\sigma = \sigma_b = \sigma_h = \frac{M}{b g_b h + \frac{1}{6} g_h h^2} \leq K \quad (4)$$

gdzie:

M - moment zginający,

K - naprężenie dopuszczalne lub graniczne,

σ - naprężenie rzeczywiste.



Rys. 1.

Warunek stateczności dla zakresu sprężystego ma postać odpowiednio dla pasów

$$\sigma_{kr,b} = k_b \frac{\pi^2 E}{12 (1 - \nu^2)} \left(\frac{g_b}{b}\right)^2 \geq \sigma_n, \quad (5)$$

dla środka

$$\sigma_{kr,h} = k_h \frac{\pi^2 E}{12 (1 - \nu^2)} \left(\frac{g_h}{h}\right)^2 \geq \sigma_n, \quad (6)$$

gdzie:

σ_{kr} - naprężenie krytyczne,

E - moduł sprężystości podłużnej,

ν - współczynnik Poisson'a,

n - współczynnik pewności przy stateczności miejscowej,

k_b, k_h - współczynniki zależne od sposobu podparcia krawędzi płyt tworzących ścianki dźwigara, ich wymiarów poprzecznych i sposobu obciążenia. Przyjmując, że krawędzie środka są swobodnie podparte (daje to pewien margines bezpieczeństwa), jako minimalną wartość można przyjąć $k_h = 23,9$, a dla pasa przy jednej krawędzi swobodnie podpartej i drugiej niepodpartej minimalna wartość $k_b = 0,456$ [2].

Przy podanych założeniach dla określenia optymalnych wymiarów przekroju poprzecznego należy znaleźć ekstremum wyrażenia

*) Wzór (5) podano dla ceownika. Dla dwuteownika w miejsce b należy wstawić $\frac{b}{2}$.

(1), przy spełnieniu warunków dodatkowych, określonych równaniami (4) ÷ (6).

Z uwagi na liniową zależność tej funkcji od wszystkich parametrów osiągnie ona swoje ekstremum jeżeli przynajmniej jeden, dwa, trzy lub wszystkie jednocześnie osiągną swoje wartości ekstremalne.

Równania (5) i (6), przy żądaniu jednoczesnej utraty stateczności pasów i środniczka, możemy zastąpić równaniem:

$$\mu = \frac{\delta_{kr,b}}{\delta_{kr,h}} = \frac{k_b}{k_h} \left(\frac{g_b}{b} \cdot \frac{h}{g_h} \right)^2 = \mathcal{H} \left(\frac{g_b}{b} \cdot \frac{h}{g_h} \right)^2 = 1, \quad (7)$$

gdzie:

$$\mathcal{H} = \frac{k_b}{k_h} \quad (8)$$

Spełnienie tego warunku ($\mu = 1$) praktycznie napotyka na trudności, jednak, jak łatwo wykazać z równań (1), (2) i (5), dla pełnego wykorzystania nośności tworzywa winno być $\mu \geq 1$.

Wyznamy w pierwszej kolejności pole przekroju określone warunkiem stateczności. Porównanie prawych stron równości (4) i (6) daje:

$$k_h \frac{\pi^2 E}{12 (1 - \nu^2)} \left(\frac{g_h}{h} \right)^2 = \frac{M}{b g_b h + \frac{1}{6} g_h h^2} n. \quad (9)$$

Stąd

$$b g_b = \frac{12 (1 - \nu^2)}{k_h \pi^2 E} M n \frac{h}{g_h} - \frac{1}{6} g_h h. \quad (10)$$

Podstawiając (10) do (1) otrzymamy szukane pole przekroju określone z warunku stateczności:

$$F_s = 2 h \left[\frac{12 (1 - \nu^2)}{k_h \pi^2 E} M n \frac{1}{2} + \frac{1}{3} g_h \right], \quad (11)$$

które jest funkcją dwóch zmiennych parametrów przekroju: g_h i h . Ekstremum tej funkcji wynika z warunku

$$\frac{\partial F}{\partial g_h} = 0, \quad (12)$$

z którego otrzymamy:

$$g_h = 2 \left[\frac{9 (1 - \nu^2)}{k_h \pi^2 E} M n \right]^{\frac{1}{3}} = g_{h \text{ opt}}. \quad (13)$$

Podstawiając (13) do (11) otrzymujemy minimalne pole przekroju, przy którym jeszcze warunek stateczności jest spełniony

$$F_s = 2 \left[\frac{9 (1 - \nu^2)}{k_h \pi^2 E} M n \right]^{\frac{1}{3}} h. \quad (14)$$

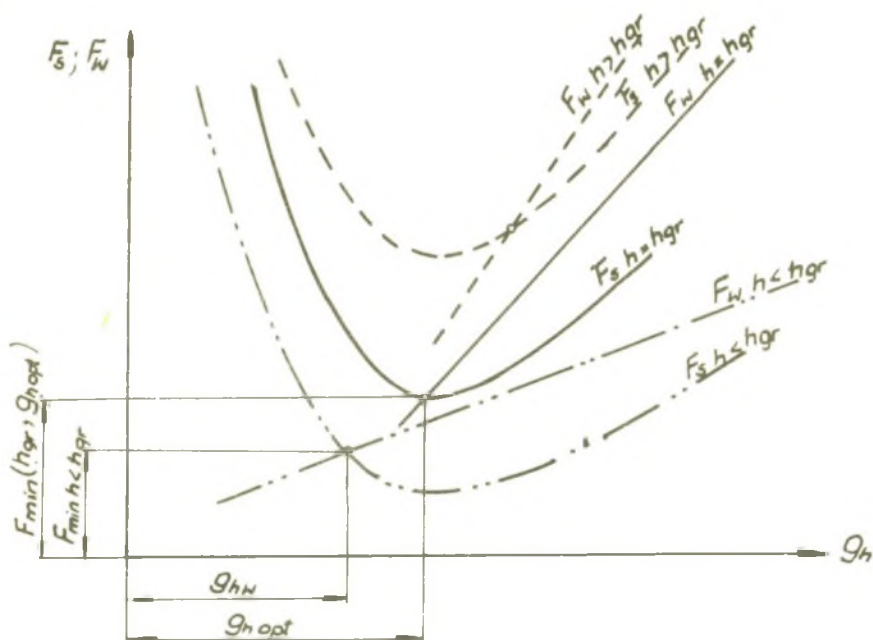
Pole przekroju wynikające z warunku wytrzymałości otrzymamy wyznaczając z (4):

$$b g_b = \frac{M}{K h} + \frac{1}{3} g_h h \quad (15)$$

i wstawiając do (1): wówczas otrzymujemy

$$F_w = 2 \left(\frac{M}{k h} + \frac{1}{3} g_h h \right). \quad (16)$$

Na rys. 2 przedstawiono wykresy funkcji $F_2 = F_S (g_h)$ wg (11) i funkcji $F_w = F_w (g_h)$ wg (16) dla zadanego momentu gnące-



Rys. 2

ego oraz przy ustalonych wartościach h . Z wykresów widać, że krzywa obrazująca funkcję $F_S (g_h)$, jako krzywa drugiego stopnia, posiada swoje minimum przy $g_h = g_{h \text{ opt}}$, określonym równaniem (13), zaś pole określone z warunku stateczności zmienia się liniowo wraz z g_h .

Podstawiając (13) do (16) otrzymamy pole przekroju określone z warunku wytrzymałości przy $\varepsilon_h = \varepsilon_{h \text{ opt}}$:

$$F_w = 2 \left\{ \frac{M}{K h} + \frac{2}{3} \left[\frac{9 (1 - \nu^2)}{k_h \pi^2 E} M n \right] \right\}^{\frac{1}{3}} h. \quad (17)$$

Podstawiając

$$F_w = F_s \quad (18)$$

z równań (14) i (17) otrzymamy graniczną wartość $h = h_{gr}$, przy której obydwa pola są równe:

$$h = \left[3 \frac{k \pi^2 E}{(1 - \nu^2)} \frac{M^2}{K^3 n} \right]^{\frac{1}{6}} = h_{gr}. \quad (19)$$

Wielkość tego pola wynosi:

$$F_{s \text{ min}} = F_{w \text{ min}} = 4 \left[\frac{243 (1 - \nu^2)}{k_h \pi^2 E} \frac{M^4 n}{K^3} \right]^{\frac{1}{6}} = F_{\text{min}} (h_{gr}, \varepsilon_{h \text{ opt}}). \quad (20)$$

Pole środnika z równań (13) i (18):

$$F_h = \varepsilon_{h \text{ opt}} h_{gr} = \left[\frac{432 (1 - \nu^2)}{k_h \pi^2 E} \frac{M^4 n}{K^3} \right]^{\frac{1}{6}} \quad (21)$$

Pole pasa z równań (20), (21) i (1):

$$F_b = \frac{1}{2} \left[F_{\text{min}} (h_{gr}, \varepsilon_{h \text{ opt}}) - \varepsilon_{h \text{ opt}} h_{gr} \right]. \quad (22)$$

Zatem jeżeli: $h = h_{gr}$, $g_h = g_{h\ opt}$

1

$$F_s (g_{h\ opt}, h_{gr}) = F_w (g_{h\ opt}, h_{gr}),$$

wówczas przekrój ceowy lub dwuteowy dźwigara redukuje się do przekroju pełnego o szerokości

$$b = g_h. \quad (23)$$

Jeżeli $h > h_{gr}$, to

$$F_s (g_{h\ opt}, h > h_{gr}) < F_w (g_{h\ opt}, h > h_{gr}),$$

a zatem minimalne pole określać należy z warunku stateczności, czyli z równania (14).

Jeżeli $h < h_{gr}$ to przy doborze wielkości określających pole przekroju decyduje warunek wytrzymałości. Parametry przekroju, przy którym pole będzie najmniejsze, należy określać z przecięcia się krzywej F_s równanie (11) i prostej F_w równanie (16).

Podstawiając przeto $F_s = F_w$ otrzymujemy

$$2 h \left[\frac{12 (1 - \nu^2)}{k_h \pi^2 E} M n \frac{1}{g_h^2} + \frac{1}{3} g_h \right] = 2 \left(\frac{M}{K h} + \frac{1}{3} g_h h \right). \quad (24)$$

Stąd znajdujemy grubość środnika

$$g_h = \sqrt{\frac{12 (1 - \nu^2)}{k_h \pi^2 E} K n h} = g_{hw}. \quad (25)$$

Podstawiając (25) do (16) otrzymujemy:

$$F_w = 2 \left[\frac{M}{K h} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{12 (1 - \nu^2)}{k_h \pi^2 E} K n h^2} \right], \quad (26)$$

optymalną wysokość wyznaczmy z warunku:

$$\frac{\partial F_w}{\partial h} = 2 \left[-\frac{M}{K h^2} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{12 (1 - \nu^2)}{k_h \pi^2 E} K n h} \right] = 0. \quad (27)$$

Stąd:

$$h = \left[\frac{27 (1 - \nu^2)}{k_h \pi^2 E} \frac{M^2}{K^3 n} \right]^{\frac{1}{6}} = h_{w \text{ opt}} \quad (28)$$

Pole przekroju dla $g_h = g_{hw}$ i $h = h_{w \text{ opt}}$ z równań (28) i (26) będzie:

$$F_w = 2 \left[\frac{243 (1 - \nu^2)}{4 k_h \pi^2 E} \frac{M^4 n}{K^3} \right]^{\frac{1}{6}} = F_{\min h} < h_{gr}. \quad (29)$$

Z równań (20) i (29) wynika, że:

$$F_{\min} (h_{gr}, g_{h \text{ opt}}) > F_{\min h} < h_{gr}, \quad (30)$$

a najmniejszy stosunek tych pól

$$\frac{F_{\min} (h_{gr}, g_{h \text{ opt}})}{F_{\min h} < h_{gr}} = 2 (2)^{\frac{1}{3}}. \quad (31)$$

Z przytoczonych równań wynika, że minimalne pole przekroju określa równanie (29). Parametry tego przekroju, który przyjmujemy za optymalny dla zadanego momentu zginającego, wyznaczamy z następujących równań:

Wysokość z równania (28).

Grubość środnika otrzymamy wstawiając (28) do (25):

$$\varepsilon_h = \left[\frac{18 (1 - \nu^2)}{k_h \pi^2 E} M_n \right]^{\frac{1}{3}}$$

Pole środnika z równań (28) i (32):

$$F_h = \varepsilon_h h = \left[\frac{243 (1 - \nu^2)}{4 k_h \pi^2 E} \frac{M^4 n}{K^3} \right]^{\frac{1}{6}} \quad (33)$$

Pole pasa z równań (30) i (33):

$$\begin{aligned} F_b = \varepsilon_b b &= \frac{1}{2} (F_{\min h < hgr} - \varepsilon_h h) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{243 (1 - \nu^2)}{4 k_h \pi^2 E} \frac{M^4 n}{K^3} \right]^{\frac{1}{6}} \end{aligned} \quad (34)$$

Stosunek:

$$\frac{F_b}{F_{\min h < hgr}} = \frac{1}{4} \quad (35)$$

oraz

$$\frac{F_h}{F_{\min} h} < hgr = \frac{1}{2}. \quad (36)$$

Rozkład momentów bezwładności będzie wówczas następujący:

$$\begin{aligned} 2I_b &= \frac{3}{4} I, \\ I_h &= \frac{1}{4} I, \end{aligned} \quad (37a, b)$$

gdzie:

$$\left. \begin{array}{l} I_b - \text{moment bezwładności pasa,} \\ I_h - \text{moment bezwładności środka} \end{array} \right\} \text{względem osi } y-y.$$

Dla wyznaczenie nieznanych jeszcze parametrów przekroju g_b i b wykorzystamy równanie (7), które po uwzględnieniu (28) i (32) zapiszemy w postaci:

$$\left(\frac{b}{g_b}\right)^2 \leq \left(\frac{h}{g_h}\right)^2 = \mathcal{H} \left(\sqrt{\frac{k \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{K n}} \right)^2. \quad (38)$$

Dla celownika z równania (38) otrzymujemy

$$\frac{b}{g_b} \leq \sqrt{\mathcal{H} \frac{k_h \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{K n}}. \quad (39)$$

Dla dwuteownika

$$\frac{b}{g_b} \leq 2 \sqrt{\frac{k_h \pi^2 E}{12 (1 - \nu^2)}} \frac{1}{K n} \quad (40)$$

Z równań (34) i (39) otrzymujemy parametry półki dla ceownika

$$g_b = \frac{1}{\sqrt{2} (\pi l)^{\frac{1}{4}}} \left[\frac{18 (1 - \nu^2)}{k_h \pi^2 E} M n \right]^{\frac{1}{3}} \quad (41)$$

i

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi l)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{3}{16} \frac{k_h \pi^2 E}{(1 - \nu^2)} \frac{M^2}{K^3 n} \right]^{\frac{1}{6}} \quad .$$

Z równań (34) i (40) mamy dla dwuteownika

$$g_b = \frac{1}{2} (\pi l)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{18 (1 - \nu^2)}{k_h \pi^2 E} M n \right]^{\frac{1}{3}} \quad (43)$$

i

$$b = \frac{1}{2} (\pi l)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{3 k_h \pi^2 E}{16 (1 - \nu^2)} \frac{M^2}{K^3 n} \right]^{\frac{1}{6}} \quad . \quad (44)$$

Odpowiednie stosunki wymiarowe będą:

dla ceownika

$$\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi l)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{0,456}{23,9} \right)^{\frac{1}{4}} = 0,260 \quad , \quad (45)$$

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(\mathcal{H})^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{23,9}{0,456} \right)^{\frac{1}{4}} = 1,90 ; \quad (46)$$

dla dwuteownika

$$\frac{b}{h} = \frac{1}{2} (\mathcal{H})^{\frac{1}{4}} = 0,185 , \quad (47)$$

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_h} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\mathcal{H})^{\frac{1}{4}}} = 1,35 . \quad (48)$$

3. Określenie naprężeń dopuszczalnych i współczynników pewności

Miejscowa stateczność płyt tworzących dźwigar będzie zapewniona, jeżeli naprężenie wywołane obciążeniem zewnętrznym spełnia warunek stateczności

$$\sigma \leq \frac{\sigma_{kr}}{n} , \quad (49)$$

gdzie:

σ - naprężenie wywołane obciążeniem zewnętrznym,

σ_{kr} - naprężenie krytyczne,

n - współczynnik pewności przy stateczności miejscowej.

Ponieważ dla spełnienia warunku wytrzymałości, naprężenie wywołane obciążeniem zewnętrznym nie może z kolei przekroczyć wartości

$$\frac{R_e}{z} \leq K , \quad (50)$$

gdzie:

R_e - granica plastyczności materiału,

K - naprężenie dopuszczalne lub graniczne,

z - współczynnik pewności względem granicy plastyczności materiału.

Z równań (49) i (50) mamy:

$$\sigma_{kr} \geq \frac{R}{z} n. \quad (51)$$

A zatem utrata stateczności zachodzi w zakresie sprężystym gdy

$$\sigma_{kr} \leq R_H$$

czyli

$$R_H \geq \frac{R_e}{z} n \quad (52 \text{ a, b, c})$$

lub

$$\frac{R_H}{R_e} \geq \frac{n}{z};$$

tutaj R_H jest granicą sprężystości materiału.

Znając przeto stosunek $\frac{R_H}{R_e}$ dla materiału, z którego będzie wykonana konstrukcja, łatwo wyznaczmy współczynnik z dla przyjętego współczynnika n , a następnie wartość naprężeń dopuszczalnych.

Rozpatrzmy dobór współczynników pewności i naprężeń dopuszczalnych w oparciu o PN-62/B-03200.

Dla stali St3 mamy:

$$R_e = 24 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}, \quad R_H = 19,4 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$$

zatem

$$\frac{R_H}{R_e} = \frac{19,4}{24} = 0,81$$

Przy wymiarowaniu metodą naprężeń dopuszczalnych dla I rodzaju naprężeń $n_I = 1,4$, $k_I = 1500 \text{ kG/cm}^2$, dla II rodzaju naprężeń $n_{II} = 1,2$, $k_{II} = 1700 \text{ kG/cm}^2$; tutaj przyjęto $K = k_I$ lub k_{II} . Współczynnik pewności ze względu na wytrzymałość obliczamy z równania (52b):

$$z_I \geq n_I \frac{R_e}{R_H} = 1,4 \frac{1}{0,81} = 1,73 ,$$

$$z_{II} \geq n_{II} \frac{R_e}{R_H} = 1,2 \frac{1}{0,81} = 1,48$$

i odpowiednio naprężenia dopuszczalne

$$k_I \leq \frac{R_e}{z_I} = \frac{2400}{1,73} = 1390 \text{ kG/cm}^2 ,$$

$$k_{II} \leq \frac{R_e}{z_{II}} = \frac{2400}{1,48} = 1620 \text{ kG/cm}^2 .$$

Przy wymiarowaniu metodą naprężeń granicznych $n = 1,1$; $K = 2100 \text{ kG/cm}^2$

$$z \geq n \frac{R_e}{R_H} = 1,1 \frac{1}{0,81} = 1,36 ,$$

naprężenie graniczne

$$K \leq \frac{R_e}{z} = \frac{2400}{1,36} = 1760 \text{ kG/cm}^2 .$$

Jak wynika z przeprowadzonych przeliczeń przy wymiarowaniu metodą naprężeń dopuszczalnych, wyznaczone naprężenie dopuszczalne dla przyjętego współczynnika pewności n wg PN nieznacznie odbiegają od wartości przewidzianych normą. Zatem stosując wzory określające parametry przekroju wyprowadzone dla zakresu sprężystego niemal całkowicie wykorzystujemy wytrzymałość konstrukcji. W przypadku wymiarowania metodą nośności granicznej odpowiednie wzory należałoby wyprowadzić dla zakresu sprężysto-plastycznego. Wymaga to jednak oddzielnego opracowania.

4. Uwagi końcowe

Mimo, że wzory określające optymalne parametry przekroju zostały wyprowadzone dla czystego zginania, to mogą one być stosowane również w przypadku zginania swobodnego, jeżeli udział naprężeń ścinających w wyężeniu materiału jest niewielki.

Przedstawione postępowanie można zastosować również dla wyznaczenia przekrojów otwartych o jednakowych grubościach pólki i średników oraz dla prostokątnych przekrojów skrzynekowych.

LITERATURA

- [1] Dietrych J.: Konstrukcja i konstruowanie, Warszawa 1968 WNT.
- [2] Timoshenko S.P. i Gere J.M.: Teoria stateczności sprężystej, Warszawa 1963 Arkady.
- [3] PN-62/B-03200 Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie. Wydanie IV. Warszawa. Wydawnictwa Normalizacyjne.

ПРОБЛЕМА ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗМЕРОВ СЕЧЕНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КРАНОВ

Р е з ю м е

В работе разрешена проблема размеров поперечного сечения изгибаемых элементов кранов из условия их наименьшего веса. Решение производится с учетом прочности и местной устойчивости. Даются простые формулы для установления размеров сечения швеллера у двутавра. Приведенные формулы относятся к чистому изгибу, ими можно пользоваться также и в случае поперечного изгиба, когда касательные напряжения малы по сравнению с нормальными.

THE ASSORTMENT PROBLEM OF BENDING SECTIONS DIMENSION OF CRANE ELEMENTS

S u m m a r y

The present paper discusses the assortment problem of cross-sections dimension of bending elements. As a criterion their minimal weight has been assumed, on the condition that strength and stability requirements are kept. Formulae have been derived, permitting in a simple way to indicate dimensions of channel bar and T-bar section at pure bending. The said formulae can be applied to free bending, if at bending shear stresses are slight towards pure bending stresses.