ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: MECHANIKA z. 82 Nr kol. 845

Tadeusz Burczyński

Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
Politechnika Śląska

Tomasz Adamczyk

Instytut Transportu
Politechnika Śląska

GENEROWANIE OPTYMALNEGO KSZTAŁTU KONSTRUKCJI METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono rozwiązanie problemu kształtowania optymalnego brzegu konstrukcji stosując procedury numeryczne metody elementów brzegowych. Zagadnienie sformułowano w sposób ogólny dla dwóch typów funkcjonałów jakości. Wektor zmiennych kształtowych generujący optymalny kształt konstrukcji wyznaczono z warunków optymalności, które wyrażono przez zmienne stanu układu podstawowego i układów sprzężonych. Przedstawiono przykład numeryczny kształtowania ze względu na kryterium maksymalnej sztywności.

1. Wstęp

Określenie optymalnego kształtu konstrukcji stanowi jeden z istotnych etapów procesu konstruowania. Uniwersalną drogą uzyskania rozwiązania tego zagadnienia jest zastosowanie metod numerycznych. Metoda elementów brzegowych zyskująca sobie coraz szersze zastosowanie do problemów analizy [1,2] jest wygodnym narzędziem służącym do modelowania konstrukcji w problemach syntezy kształtu.

Sformułowanie i zastosowanie metody elementów brzegowych do problemów optymalizacji kształtu konstrukcji przedstawiono w pracach własnych [3, 4, 5]. W pracach [3, 4] problem optymalizacji kształtu dwu- i trójwymiarowych ciał sprężystych rozwiązano stosując metodę warunków optymalności i technikę elementów brzegowych, przyjmując za kryterium optymalności maksimum sztywności konstrukcji. W pracy [5] stosując to samo ujęcie rozwiązano zagadnienie optymalizacji kształtu przekroju poprzecznego pręta skręcanego. Niezależnie od wymienionych wyżej prac własnych pojawiły się także publikacje innych autorów poświęcone tej samej problematyce [6, 7]. W pracy [6] rozważany jest problem optymalizacji wałów ze względu na maksymalną sztywność na skręcanie przy zastosowaniu metody elementów brzegowych i programowania nieliniowego. Porównanie metody elementów brzegowych z metodą elementów skończonych w optymalizacji kształtu dwuwymiarowego ciała przy zastosowaniu kryterium minimum ciężaru przedstawione zos-

tało w pracy [7] .
Niniejsza praca jest pewnym uogólnieniem wcześniejszych prac własnych . Problem generowania optymalnego kształtu konstrukcji rozważono dla dwóch dowolnych funkcjonałów jakości zależnych od naprężeń i sił powierzchniowych lub od odkształceń i przemieszczeń brzegowych przy warunku ograniczającym objętość konstrukcji.

2. Sformułowanie problemu

Rozważaną konstrukcję uważać będziemy za ciało sprężyste o stałych λ, μ, zajmującą obszar V z brzegiem S. Niech brzeg ten składa się z dwóch części : S_1 ,na której zadane są przemieszczenia $u_i = u_i^o$ i S_2 , na której zadane jest zachowawcze pole sił powierzchniowych $t_i = t_i^o$. Oczywiście $S = S_1 \; S_2$ oraz $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Tak określony układ sprężysty nazywać będziemy dalej układem podstawowym (UP) . Zagadnienie analizy układu (UP) polegające na wyznaczeniu pola przemieszczeń (a także odkształceń i naprężeń) przy zadanych warunkach brzegowych opisane jest brzegowym równaniem całkowym:

$$c_{ik}(y)u_i(y) = \int_S U_{ik}(x,y)t_i(x)dS(x) - \int_S T_{ik}(x,y)u_i(x)dS(x) , \quad (1)$$

gdzie

$$U_{ik}(x,y) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left(\frac{1}{r}\right)\left[(3-4\nu)\delta_{ik} + r_{,i}r_{,k}\right] \quad (2a)$$

$$T_{ik}(x,y) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^2}\right)\left\{\left[(1-2\nu)\delta_{ik} + 3r_{,i}r_{,k}\right]\frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_k - r_{,k}n_i)\right\}$$

dla zagadnień przestrzennych,

$$U_{ik}(x,y) = \frac{-1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ik} - r_{,i}r_{,k}\right\} \quad (2b)$$

$$T_{ik}(x,y) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r}\right)\left\{\left[(1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,i}r_{-k}\right]\frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_k - r_{,k}n_i)\right\}$$

dla zagadnień płaskich (płaski stan odkształcenia) ,
przy czym

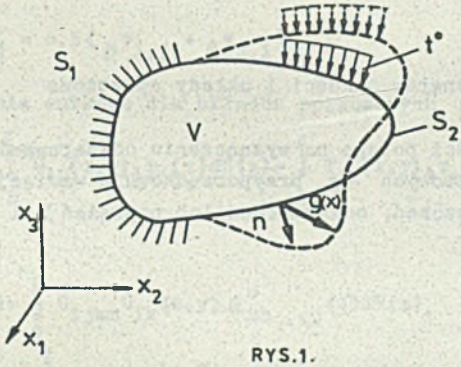
$$r = \left[(x_i - y_i)(x_i - y_i)\right]^{1/2}$$

$$c_{ik}(y) = \begin{cases} \delta_{ik} & \text{dla } y \in V \\ 0,5\delta_{ik} & \text{dla } y \in S \end{cases}$$

ν - liczba Poissona .

Problem optymalizacji kształtu konstrukcji jest bardziej złożony od problemu analizy. Część parametrów określających kształt konstrukcji tworzy zbiór zmiennych projektowania. Zmienne te będące zmiennymi kształtowymi są poszukiwanymi niewiadomymi funkcjami, które generują optymalną postać geometryczną konstrukcji. Wartości zmiennych kształtowych są określane w procesie syntezy w ten sposób, aby zadane warunki ograniczające zostały spełnione, a przyjęty funkcjonał jakości konstrukcji osiągał ekstremum. Zakładamy, że powierzchnia S_1 jest brzegiem ustalonym, natomiast kształt powierzchni S_2 generowany jest wektorem $g(x) = (g_i(x))$ odmierzanym od pewnego brzegu bazowego tak, że punkt x przechodzi do punktu x_g według zależności (rys.1) :

$$x_g = x + g(x) \tag{4}$$



RYS.1.

Składowe $g_i(x)$ $(i=1,2,3)$ są zmiennymi kształtowymi i należą do przestrzeni C^2. W takim przypadku zarówno obszar zajmowany przez konstrukcję V, jak i brzeg S_2 zależą od zmiennych kształtowych.

Problem generowania optymalnego kształtu konstrukcji rozwiążemy dla dwóch typów funkcjonałów jakości:

- dla funkcjonału $_1J$ zależnego od naprężeń i sił powierzchniowych

$$_1J = \int_{V(g)} \Psi(\sigma)dV + \int_{S_1} \varphi(t)dS_1 \tag{5}$$

- dla funkcjonału $_2J$ zależnego od odkształceń i przemieszczeń

$$_2J = \int_{V(g)} \Phi(\varepsilon)dV + \int_{S_2(g)} \varphi(u,S_2)dS_2, \tag{6}$$

gdzie $\Psi(\sigma)$ i $\Phi(\varepsilon)$ są pewnymi funkcjami naprężeń i odkształceń określonymi na zmiennym obszarze $V(g)$; $\varphi(t)$ jest pewną funkcją sił powierzchniowych

określoną na ustalonym brzegu S_1, natomiast $\varphi(\underline{u}, S_2)$ jest pewną funkcją przemieszczeń oraz konfiguracji brzegu S_2 i określoną na powierzchni S_2. W charakterze warunku ograniczającego przyjmujemy ograniczenie obszaru zajmowanego przez konstrukcję $V = V_0$, gdzie V_0 jest pewną z góry zadaną objętością konstrukcji.
Jeśli ograniczenie objętości nie gwarantuje istnienia rozwiązania problemu, to można przyjąć dodatkowo ograniczenie na wektor $\underline{g}(x)$ w postaci $|\underline{g}(x)| \leq d$, gdzie d jest pewną stałą.
W procesie generowania optymalnego kształtu konstrukcji poszukujemy takich wartości zmiennych projektowania $g_i(x)$, dla których funkcjonał jakości $_\beta J (\beta = 1,2)$ będzie osiągał minimum a objętość konstrukcji jest ograniczona, tzn. $\min_\beta J$ przy $V = V_0$.
W celu znalezienia dla tak sformułowanego problemu koniecznych warunków optymalności niezbędne jest określenie wrażliwości funkcjonałów jakości konstrukcji.

3. Wariacje funkcjonałów jakości i układy sprzężone

Analiza wrażliwości polega na wyznaczeniu odwzorowania, które wariacjom zmiennych kształtowych δg przyporządkowuje wariacje zmiennych stanu δq (np. przemieszczeń, odkształceń lub naprężeń) i funkcjonałów jakości $\delta_\beta J$:

$$\delta q = A_q \, \delta g \,, \qquad \delta_\beta J = {}_\beta A \, \delta g \,, \tag{7}$$

gdzie A_q i $_\beta A$ są operatorami wrażliwości.
Wariację funkcjonału jakości wyrazić można przez wariację zmiennych projektowania i operator wrażliwości A_q. Jawną postać operatora A_q jest trudno ustalić i dlatego przy ocenie wrażliwości funkcjonałów $_\beta J$ posłużyć się można pojęciem układów sprzężonych (por. np. Mróz-Mirnov [8], Dems [9], Dems-Mróz [10], Haug [11], Szefer [12] - dla problemów dynamicznych).
Układ sprzężony $_\beta(US)(\beta = 1,2)$ jest ciałem o konfiguracji i właściwościach fizycznych jak układ podstawowy (UP). Na brzegu S_1 układu $_\beta(US)$ zadane są przemieszczenia $_\beta \underline{v} = {}_\beta \underline{v}^0$, a na brzegu S_2 siły powierzchniowe $_\beta \underline{p} = {}_\beta \underline{p}^0$. Ponadto w układach $_\beta(US)$ istnieć mogą odkształcenia wstępne $_\beta \underline{\varepsilon}^0$ i naprężenia wstępne $_\beta \underline{\sigma}^0$, które są źródłem fikcyjnych pseudosił masowych. Warunki brzegowe oraz odkształcenia i naprężenia wstępne zależą od postaci funkcjonałów jakości w sposób następujący:

$$
\begin{array}{lll}
 & {}_1(US): & {}_2(US): \\
S_1: & {}_1v^o = -\varphi(t)_{,t} & {}_2v^o = 0 \\
S_2: & {}_1p^o = 0 & {}_2p^o = \varphi(u)_{,u} \\
V: & {}_1\varepsilon^o = \Psi(\sigma)_{,\sigma} & {}_2\sigma^o = \Phi(\varepsilon)_{,\varepsilon}
\end{array}
\tag{8}
$$

W przypadku ogólnym pole odkształceń wstępnych ${}_1\varepsilon^o$ w układzie ${}_1(US)$ jest niespójne. Naprężenia wstępne ${}_2\sigma^o$ w układzie ${}_2(US)$ powodują także powstanie niespójnego pola odkształceń ${}_2\varepsilon^o$. W takim przypadku tensor niezgodności jest różny od zera, tzn. $\mathrm{Inc}\,{}_\beta\varepsilon^o \neq 0$ i więzy nakazujące układowi ${}_\beta(US)$ pozostawać spójnym powodują powstanie odkształceń sprężystych ${}_\beta\varepsilon$ takich, że pole odkształceń całkowitych ${}_\beta\varepsilon^T = {}_\beta\varepsilon^o + {}_\beta\varepsilon$ jest polem spójnym [13]. Przemieszczenia układu ${}_\beta(US)$ związane są z odkształceniami całkowitymi następującą relacją:

$$
{}_\beta\varepsilon^T_{ij} = 0{,}5\left({}_\beta v_{i,j} + {}_\beta v_{j,i}\right) \quad . \tag{9}
$$

Brzegowe równania całkowe dla układów sprzężonych ${}_\beta(US)$ mają postać:

$$
c_{ik}(y)\,{}_\beta v_i(y) = \int_S U_{ik}(x,y)\,{}_\beta p_i(x)\,dS(x) - \int_S T_{ik}(x,y)\,{}_\beta v_i(x)\,dS(x) + {}_\beta H_k(y), \tag{10}
$$

gdzie:

$$
{}_1H_k(y) = \int_V C_{ijmn} U_{ik}(z,y)\,\varepsilon^o_{mn\,,,j}(z)\,dV(z) \quad , \tag{11}
$$

$$
{}_2H_k(y) = \int_V U_{ik}(z,y)\,\sigma^o_{ij,,j}(z)\,dV(z) \quad , \tag{12}
$$

$$
C_{ijmn} = \lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu\left(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}\right) \quad , \tag{13}
$$

$$
\varepsilon^o_{mn\,,,j} = \frac{\partial^2\Psi(\sigma)}{\partial\sigma_{mn}\partial\sigma_{pq}}\,\sigma_{pq,j} + \frac{\partial^2\Psi(\sigma)}{\partial\sigma_{mn}\partial x_j} \quad , \tag{14}
$$

$$
\sigma^o_{ij,,j} = \frac{\partial^2\Phi(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{pq}}\,\varepsilon_{pq,j} + \frac{\partial^2\Phi(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial x_j} \quad . \tag{15}
$$

Odwzorowanie $V \to V_\varepsilon = V(\varepsilon)$ zdefiniowane równaniem (4) określone jest na zmiennym obszarze i dlatego analiza wrażliwości funkcjonałów ${}_\beta J$ prowadzi do zagadnień wariacyjnych dla nieustalonych obszarów [14]. Całkowite wariacje pól przemieszczeń, odkształceń i naprężeń określone są następująco:

$$
\delta q_i = \delta\bar{q}_i + q_{i,k}\,\delta\varepsilon_k \quad , \quad q = u, \varepsilon, \sigma \quad , \tag{16}
$$

gdzie $\delta \bar{q}_i$ jest wariacją zmiennych stanu dla ustalonego obszaru, zaś drugi składnik wyraża wariację zmiennych stanu q spowodowaną zmianą kształtu brzegu S_2.
Pierwsze wariacje funkcjonałów jakości ${}_\beta J$ wyrażają się następującymi zależnościami (por. [9, 10]) :

$$\delta_1 J = \int_V \Psi_{,\sigma} \delta\bar{\sigma} dV + \int_{S_2} \Psi\, n_k \delta g_k dS_2 + \int_{S_1} \varphi_{,t} \delta t dS_1 \quad , \tag{17}$$

$$\delta_2 J = \int_V \Phi_{,\varepsilon} \delta\bar{\varepsilon} dV + \int_{S_2} \Phi\, n_k \delta g_k dS_2 + \int_{S_2} \Big\{ \varphi_{,n} \delta\bar{u} + \\ + \big[(\varphi_{,n} - 2\varphi H) n_k + \varphi_{,u} u_{,k} - \varphi_{,k} \big] \delta g_k + \delta_{S_2} \varphi \Big\} dS_2 \quad , \tag{18}$$

gdzie H jest średnią krzywizną powierzchni S_2 , $\delta_{S_2}\varphi$ jest wariacją funkcji φ wywołaną zmianą brzegu S_2 (dalej zakładamy, że φ jest zależna od pola przemieszczeń i położenia punktu brzegowego $\varphi(u, S_2) = \varphi(u, x)$.
Uwzględniając (8) w (17) i (18) otrzymujemy po przekształceniach:

$$\delta_\beta J = \int_{S_2} {}_\beta F n \cdot \delta g dS_2 \quad , \tag{19}$$

gdzie :

$${}_1F = \Psi + (t^o_{\cdot 1} v)_{,n} - 2 t^o_{\cdot 1} v H - \sigma_{\cdot 1} \varepsilon^T \quad , \tag{20}$$

$${}_2F = \Phi + (\varphi + t^o_{\cdot 2} v)_{,n} - 2(\varphi + t^o_{\cdot 2} v) H - \sigma_{\cdot 2} \varepsilon^T \quad , \tag{21}$$

przy czym σ i t^o są naprężeniami i siłami powierzchniowymi układu podstawowego (UP) , natomiast ${}_\beta v$ i ${}_\beta \varepsilon^T$ są przemieszczeniami i odkształceniami całkowitymi układów sprzężonych ${}_\beta$(US) .
Warto zwrócić uwagę, że wymienione wyżej wielkości jak i pierwsze wariacje funkcjonałów ${}_\beta J$ określone są wyłącznie na optymalizowanym brzegu S_2.
Wyrażenia (20) i (21) znacznie się upraszczają, gdy funkcjonały jakości ${}_\beta J$ wyrażają energię uzupełniającą lub energię potencjalną. Wówczas funkcje ${}_\beta F$ zależą tylko od zmiennych stanu układu podstawowego. Natomiast, jeśli funkcjonały jakości (5) i (6) określone są tylko całkami brzegowymi, to odkształcenia wstępne ${}_1\varepsilon^o$ i naprężenia wstępne ${}_2\sigma^o$ są równe zero, co znacznie upraszcza analizę układów sprzężonych, gdyż całki objętościowe (11) i (12) znikają.

4. Warunki optymalności

Sformułowany uprzednio problem optymalizacji kształtu konstrukcji sprowadzić można do znalezienia warunku stacjonarności funkcjonału

$$ {}_{\beta}I = {}_{\beta}J + \omega(V - V_o) \quad , \tag{22} $$

gdzie ω jest mnożnikiem Lagrange'a.
Konieczny warunek stacjonarności funkcjonału Lagrange'a ${}_{\beta}I$ otrzymujemy przyrównując do zera jego pierwszą wariację:

$$ \delta_{\beta}I = \delta_{\beta}J + \omega\delta V + \delta\omega(V - V_o) = 0 \quad . \tag{23} $$

Stąd otrzymujemy:

$$ \begin{aligned} &\delta_{\beta}I = \delta_{\beta}J + \omega\delta V = 0 \quad , \\ &V = \int_V dV = V_o \quad , \end{aligned} \tag{24} $$

przy czym wariacja objętości określona jest następująco:

$$ \delta V = \int_{S_2} \mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{g}\, dS_2 \quad . \tag{25} $$

Związek (24) określa konieczne warunki optymalności. Wykorzystując wyrażenie na pierwszą wariację funkcjonału ${}_{\beta}J$ (19) warunki optymalności przyjmują postać:

$$ \begin{aligned} &\delta_{\beta}I = \int_{S_2} {}_{\beta}\mathbf{P}\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{g}\, dS_2 = 0 \quad , \\ &V = V_o \quad , \end{aligned} \tag{26} $$

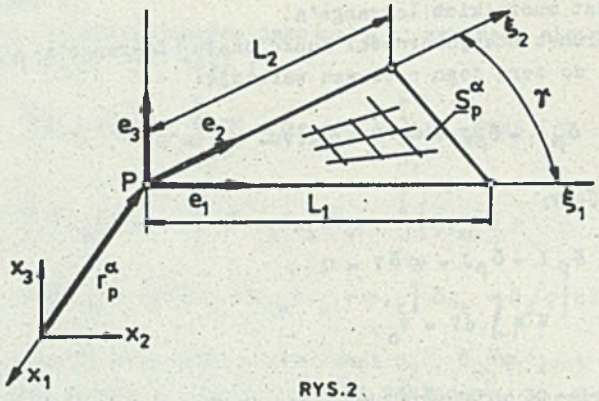
gdzie

$$ {}_{\beta}P = {}_{\beta}F + \omega \tag{27} $$

Warto zwrócić uwagę, że podobnie jak wyrażenie na wariację funkcjonału jakości tak i konieczne warunki optymalności określone są tylko na brzegu, który podlega optymalizacji.

5. Dyskretyzacja warunków optymalności elementami brzegowymi

Optymalnego obszaru będziemy poszukiwać wśród rodziny wielościanów o trójkątnych bokach. Boki te są utworzone przez elementy brzegowe. Zbiór wszystkich elementów $S^{\alpha}(\alpha = 1,2,\ldots,n)$ przedstawiamy jako sumę tylu n podzbiorów, ile jest węzłów, tzn. $\{S^{\alpha}\} = \bigcup_{p=1}^{n}\{S_p^{\alpha}\}$, gdzie $\{S_p^{\alpha}\}$ jest zbiorem tych wszystkich elementów, które zbiegają się w p-tym węźle (rys.2). Funkcję generującą optymalny brzeg wygodnie jest teraz przedstawić dla każdego elementu S_p^{α} w postaci parametrycznej:



RYS.2.

$$\mathbf{g}_p^\alpha(\xi_1,\xi_2) = \mathbf{a}_p\left(1 - \frac{1}{L_1}\xi_1 - \frac{1}{L_2}\xi_2\right) + \frac{1}{L_1}\xi_1\mathbf{a}_p^1 + \frac{1}{L_2}\xi_2\mathbf{a}_p^2 \quad , \tag{28}$$

$$\alpha = 1,2,\ldots,m_o \quad ; \quad p = 1,2,\ldots,n_o \quad ,$$

gdzie L_1 i L_2 są długościami boków elementu brzegowego (rys.2). Wektorowe parametry kształtu $\mathbf{a}_p$, $\mathbf{a}_p^1$, $\mathbf{a}_p^2$ zdefiniowane są równaniem:

$$\mathbf{g}_p^\alpha(\xi_1,\xi_2) = \begin{cases} \mathbf{a}_p & \text{dla} \quad \xi_1 = \xi_2 = 0 \\ \mathbf{a}_p^1 & \text{dla} \quad \xi_1 = L_1 \ , \xi_2 = 0 \\ \mathbf{a}_p^2 & \text{dla} \quad \xi_1 = 0 \ , \xi_2 = L_2 \end{cases} \tag{29}$$

$$\mathbf{a}_p = \{a_{ip}\} \quad i=1,2,3 \quad ; \quad p=1,2,\ldots,n_o \quad .$$

Wynika z tego, że jeżeli na optymalizowanej powierzchni znajduje się m_o elementów i n_o węzłów, to optymalizowany brzeg generowany jest przez $3n_o$ parametrów kształtu a_{ip}. Warunek optymalności może być teraz przedstawiony w postaci :

$$\delta_\beta I = \int_{S_2} \beta \mathbf{P}\mathbf{n}\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial a_{ip}}\,\delta a_{ip}\,dS_2 = \sum_{\alpha=1}^{m_o}\int_{S^\alpha} \mathbf{P}\mathbf{n}\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial a_{ip}}\,\delta a_{ip}\,dS = 0 \quad . \tag{30}$$

Przez odpowiednie pogrupowanie wyrażeń rów. (30) przyjmuje postać:

$$\delta_\beta I = \sum_{p=1}^{n_o}\sum_{j=1}^{\alpha_p}\int_{S_p^{\alpha_j}} \beta \mathbf{P}\mathbf{n}\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial a_{i\underline{p}}}\,\delta a_{i\underline{p}}\,dS_{\underline{p}}^{\,j} = 0 \quad . \tag{31}$$

W rów. (31) nie obowiązuje konwencja sumacyjna względem podkreślonych wskaźników. Przez α_p oznaczono liczbę elementów zbiegających się w

p-tym węźle. Podstawiając zależność (28) do równania (31) oraz uwzględniając dowolność wariacji δa_{ip} otrzymujemy:

$$\sum_{j=1}^{\alpha_p} \int_{S_p^{\alpha j}} \beta^{Pn_i}\left(1 - \frac{1}{L_1}\xi_1 - \frac{1}{L_2}\xi_2\right)\sin\gamma\, d\xi_1 d\xi_2 = 0 \quad , \tag{32}$$

gdzie skorzystano z zależności $dS_p^{\alpha j} = \sin\gamma d\xi_1 d\xi_2$, przy czym γ jest kątem między wektorami bazowymi lokalnego układu współrzędnych e_i leżącymi na elemencie $S^{\alpha j}$ w węźle p (rys.2) . Równanie (32) należy uzupełnić jeszcze o warunek (24_2) . Warunek ten wygodnie jest przedstawić w postaci całki powierzchniowej:

$$\int_V dV = \frac{1}{3}\int_S \mathbf{r}\mathbf{n}dS = \frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{m}\int_{S^\alpha} \mathbf{r}^\alpha\cdot\mathbf{n}^\alpha dS \quad . \tag{33}$$

Uwzględniając, że położenie dowolnego punktu na elemencie S^α przedstawia wektor wodzący

$$\mathbf{r}^\alpha(\xi_1,\xi_2) = \mathbf{r}_p^\alpha + \xi_i \mathbf{e}_i \quad , \tag{34}$$

to równanie (33) przyjmuje postać:

$$\frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{m} \mathbf{r}_p^\alpha\cdot\mathbf{n}^\alpha|S^\alpha| = V_o \quad , \tag{35}$$

gdzie $|S^\alpha|$ jest polem powierzchni elementu S^α , natomiast $\mathbf{r}_p^\alpha$ jest wektorem wodzącym węzła p, w którym zaczepiony jest lokalny układ współrzędnych na elemencie S^α .

Równania (32) i (35) tworzą układ $3n_o + 1$ nieliniowych równań algebraicznych, z których można wyznaczyć parametry kształtu a_{ip}, generujące optymalny brzeg oraz mnożnik Lagrange'a ω .

W przypadku problemów dwuwymiarowych optymalnego obszaru szukamy wśród rodziny wielokątów. Boki wielokąta utworzone są z prostoliniowych odcinków o długości L_p, będących elementami brzegowymi (rys.3) . Wówczas warunek optymalności po dyskretyzacji elementami brzegowymi ma postać:

$$\frac{1}{L_p}\int_0^{L_p} \beta^P(L_p - \xi)n_p d + \frac{1}{L_{p-1}}\int_0^{L_{p-1}} \beta^P(L_{p-1} - \xi)n_{p-1}d\xi = 0 \quad , \tag{36}$$

$$p = 1,2,\ldots,n_o \quad .$$

Natomiast warunek zachowania stałego pola wielokąta ma postać:

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \mathbf{r}_p\mathbf{n}_p L_p = A_o \quad , \tag{37}$$

gdzie A_o oznacza zadane z góry pole wielokąta.

Równania (36) i (37) tworzą układ $2n_0+1$ nieliniowych równań algebraicznych względem parametrów kształtu i mnożnika Lagrange'a.
Nieliniowe algebraiczne równania (32) i (33) (dla przypadku przestrzennego) lub (36) i (37) (dla przypadku płaskiego) można zapisać:

$$\mathcal{F}_r(b_q) = 0 \quad , \tag{38}$$

gdzie:

$$b_{3p-2} = a_{1p} \; , \quad b_{3p-1} = a_{2p} \; ; \quad b_{3p} = a_{3p} \; ; \quad b_{3n_0+1} = \omega$$

$(r,q = 1,2,\ldots,3n_0+1)$ dla przypadku przestrzennego,

$$b_{2p} = a_{2p} \; , \quad b_{2p-1} = a_{1p} \; , \quad b_{2n_0+1} = \omega$$

$(r,q = 1,2,\ldots,2n_0+1)$ dla przypadku płaskiego.

Nieliniowe funkcje $\mathcal{F}_r$ zależą w sposób niejawny od parametrów b_q oraz od zmiennych stanu σ i t^0 układu podstawowego (UP) oraz ${}_\beta v$ i ${}_\beta \varepsilon^T$ $(\beta = 1,2)$ układów sprzężonych β(US) określonych na S_2, które można wyznaczyć poprzez analizę tych układów metodą elementów brzegowych.

6. Analiza układu podstawowego i układów sprzężonych metodą elementów brzegowych

Podstawą analizy układu (UP) jest brzegowe równanie całkowe (1). W celu jego rozwiązania dzielimy brzeg S na m elementów brzegowych, a w przypadku występowania sił masowych wnętrze obszaru V dzielimy na e komórek wewnętrznych (ang. internal cells [1,2]). W przypadku zagadnienia trójwymiarowego elementy brzegowe są trójkątnymi elementami powierzchniowymi (rys.2), a komórki wewnętrzne czworościanami. Gdy mamy do czynienia z zagadnieniem dwuwymiarowym elementami brzegowymi są odcinki prostej (rys.3), a komórkami wewnętrznymi - płaskie trójkąty. Dalej zakładamy, że przemieszczenia $\mathbf{u}$ i siły powierzchniowe $\mathbf{t}$ zmieniają się liniowo na każdym elemencie brzegowym S^α

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\alpha(\xi) &= \mathbf{N}^\alpha(\xi)\mathbf{u}_w \quad , \\ \mathbf{t}^\alpha(\xi) &= \mathbf{N}^\alpha(\xi)\mathbf{t}_w \quad , \\ \xi &= (\xi_j) \quad , \quad \alpha = 1,2,\ldots,m \quad , \end{aligned} \tag{39}$$

gdzie $\mathbf{N}^\alpha(\xi)$ jest funkcją kształtu, $\mathbf{u}_w$ i $\mathbf{t}_w$ są wartościami węzłowymi przemieszczeń i sił powierzchniowych.

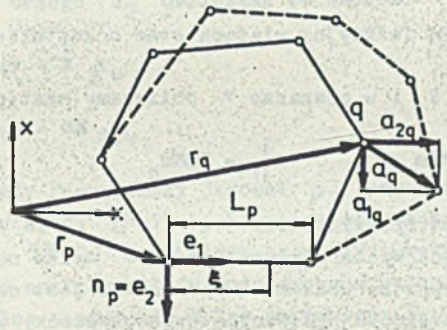
Jeśli istnieją jakieś funkcje $\mathbf{b}(x)$, $x \in V$, określone wewnątrz obszaru V, to aproksymujemy je liniowo w każdej komórce wewnętrznej $V^l (l=1,2,\ldots,e)$ za pomocą wartości węzłowych $\mathbf{b}_w$ i funkcji kształtu $\mathbf{M}^l$

$$\mathbf{b}^l = \mathbf{M}^l \mathbf{b}_w \quad , \qquad l = 1,2,\ldots,e \; . \tag{40}$$

Brzegowe równanie całkowe po dyskretyzacji przyjmuje postać:

$$\mathbf{cu} = \sum_{\alpha=1}^{m} \left\{ \left[\int_{S^\alpha} \mathbf{U}^{\alpha\gamma} \mathbf{N}^\alpha dS \right] \mathbf{t}_w - \left[\int_{S^\alpha} \mathbf{T}^{\alpha\gamma} \mathbf{N}^\alpha dS \right] \mathbf{u}_w \right\} , \tag{41}$$

gdzie $\mathbf{U}^{\alpha\gamma}$ i $\mathbf{T}^{\alpha\gamma}$ są macierzami utworzonymi z elementów $U_{ij}(x^\alpha, y^\gamma)$ i $T_{ij}(x^\alpha, y^\gamma)$, natomiast $\mathbf{u}^\gamma$ jest wektorem przemieszczeń reprezentatywnym dla γ-tego elementu brzegowego.



RYS.3

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\mathbf{Ut} - \mathbf{Tu} = 0 \quad , \tag{42}$$

gdzie $\mathbf{t}$ i $\mathbf{u}$ są macierzami kolumnowymi węzłowych sił powierzchniowych i przemieszczeń, natomiast macierze kwadratowe $\mathbf{U}$ i $\mathbf{T}$ zależą odpowiednio od całek brzegowych z jądrami $\mathbf{U}^{\alpha\gamma}$ i $\mathbf{T}^{\alpha\gamma}$ i stałej $\mathbf{c}$.
Równanie (42) przedstawić można w postaci:

$$\mathbf{KX} = \mathbf{LY} \quad , \tag{43}$$

gdzie $\mathbf{X}$ jest macierzą kolumnową nieznanych sił węzłowych na brzegu S_1 i przemieszczeń na brzegu S_2 , $\mathbf{Y}$ jest macierzą kolumnową znanych przemieszczeń węzłowych na brzegu S_1 i sił węzłowych na brzegu S_2 , natomiast macierze $\mathbf{K}$ i $\mathbf{L}$ zależą od macierzy $\mathbf{U}$ i $\mathbf{T}$.
Rozwiązując układ równań algebraicznych (43) znajdujemy macierz $\mathbf{X}$. W ten sposób znamy wszystkie wartości węzłowe przemieszczeń i sił powierzchniowych na brzegu S , które określone są w lokalnym układzie współrzędnych z bazą $\mathbf{e}_i$. Przemieszczenia wewnątrz obszaru V obliczamy

z równania (1), gdy $y \in V$. Po dyskretyzacji otrzymujemy:

$$u(y^l) = \sum_{\alpha=1}^{m} \left\{ \left[\int_{S^\alpha} U(x^\alpha, y^l) N^\alpha dS \right] t_w - \left[\int_{S^\alpha} T(x^\alpha, y^l) N^\alpha dS \right] u_w \right\} , \quad (44)$$

gdzie $u(y^l)$ jest wektorem przemieszczeń reprezentatywnym dla l-tej ($l = 1,2,\ldots,e$) komórki wewnętrznej V^l. Jeśli teraz przez u_n oznaczymy wszystkie składowe wektora przemieszczeń węzłowych wewnątrz komórki wewnętrznej V^l, to przemieszczenie w dowolnym punkcie ma postać:

$$u = Nu_n . \quad (45)$$

Pole odkształceń określić można na brzegu S i wewnątrz obszaru V:

$$\varepsilon|_S = BNu_w , \qquad \varepsilon|_V = BNu_n , \quad (46)$$

gdzie B jest macierzą funkcyjną wiążącą stan odkształcenia ze stanem przemieszczeń.
Naprężenia na brzegu S i w obszarze V obliczamy następująco:

$$\sigma|_S = D\varepsilon = DBNu_w , \qquad \sigma|_V = DBNu_n , \quad (47)$$

gdzie D jest macierzą sprężystości.
Do warunków optymalności wystarczy znajomość σ tylko na brzegu S_2. Znajomość ε i σ wewnątrz obszaru V potrzebna jest do analizy układów sprzężonych. Analizę układów sprzężonych przeprowadzamy w celu obliczenia ${}_\beta v$ i ${}_\beta e$ ($\beta = 1,2$) na brzegu S_2. Podział układu ${}_\beta(US)$ na elementy brzegowe S^α i komórki wewnętrzne V^l przeprowadzamy w sposób identyczny jak układu (UP). Przemieszczenia ${}_\beta v$ i siły powierzchniowe ${}_\beta p$ aproksymujemy podobnie:

$$\begin{aligned} {}_\beta v^\alpha(\xi) &= N^\alpha(\xi)\,{}_\beta v_w , \\ {}_\beta p^\alpha(\xi) &= N^\alpha(\xi)\,{}_\beta p_w . \end{aligned} \quad (48)$$

Wielkości występujące wewnątrz obszaru V aproksymujemy według zależności (40). Wówczas dyskretna postać brzegowego równania całkowego (10) opisana jest zależnością:

$$c\,{}_\beta v^\gamma = \sum_{\alpha=1}^{m} \left\{ \left[\int_{S^\alpha} U^{\alpha\gamma} N^\alpha dS \right] {}_\beta p_w - \left[\int_{S^\alpha} T^{\alpha\gamma} N^\alpha dS \right] {}_\beta v_w \right\} + {}_\beta H^\gamma , \quad (49)$$

gdzie ${}_\beta H^\gamma$ jest wartością całki objętościowej (11) lub (12) dla ustalonego y^γ.
Równanie (49) przedstawić można następująco:

$$U\,{}_\beta p - T\,{}_\beta v = {}_\beta H , \quad (50)$$

gdzie macierze kwadratowe $\mathbf{U}$ i $\mathbf{T}$ określone są tak samo jak w rów. (42), natomiast ${}_{\beta}\mathbf{P}$ i ${}_{\beta}\mathbf{V}$ są macierzami kolumnowymi węzłowych sił i przemieszczeń na brzegu S. Macierz kolumnowa ${}_{\beta}\mathbf{H}$ zależy od całki objętościowej, pochodnych funkcji Ψ lub Φ oraz od naprężeń $\sigma|_V$ lub odkształceń $\varepsilon|_V$ wewnątrz układu (UP). Równanie (50) sprowadzić można do postaci:

$$\mathbf{K}\,{}_{\beta}\mathbf{X} = \mathbf{L}\,{}_{\beta}\mathbf{Y} + {}_{\beta}\mathbf{H} \quad , \tag{51}$$

gdzie ${}_{\beta}\mathbf{X}$ jest macierzą kolumnową nieznanych sił węzłowych na brzegu S_1 i przemieszczeń na brzegu S_2, ${}_{\beta}\mathbf{Y}$ jest macierzą kolumnową znanych przemieszczeń i sił węzłowych określonych przez warunki (8). Macierze $\mathbf{K}$ i $\mathbf{L}$ określone są identycznie jak w równaniu (43).
Rozwiązując układ równań algebraicznych (51) znajdujemy macierz $\mathbf{X}$ i w ten sposób będziemy znać wartości węzłowe przemieszczeń ${}_{\beta}\mathbf{V}_w$ i sił powierzchniowych ${}_{\beta}\mathbf{P}_w$ na brzegu S. Interesujące nas przemieszczenia i odkształcenia na brzegu S_2 obliczamy ze wzorów:

$$\begin{aligned} {}_{\beta}\mathbf{V} &= \mathbf{N}\,{}_{\beta}\mathbf{V}_w \quad , \\ {}_{\beta}\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{BN}\,{}_{\beta}\mathbf{V}_w \quad . \end{aligned} \tag{52}$$

W przypadku, gdy funkcjonały jakości ${}_{\beta}J$ przedstawiają sobą odpowiednio energię uzupełniającą ($\beta=1$) jako miarę podatności konstrukcji lub energię potencjalną ($\beta=2$) jako miarę sztywności konstrukcji, wystarczy przeprowadzić tylko analizę układu podstawowego wyznaczając przemieszczenia, odkształcenia lub naprężenia tylko na brzegu S_2. Gdy w funkcjonałach jakości $\Psi = \Phi = 0$, to przy analizie układu podstawowego pomijamy etap wyznaczania przemieszczeń, odkształceń i naprężeń wewnątrz układu, a przy analizie układów sprzężonych macierz ${}_{\beta}\mathbf{H} = 0$. W tym przypadku analiza układów (UP) i ${}_{\beta}$(US) sprowadza się tylko do wyznaczenia zmiennych stanu na brzegu.

7. Algorytm generowania optymalnego kształtu konstrukcji

W celu rozwiązania układu nieliniowego równań algebraicznych (38) stosujemy metodę Newtona-Raphsona:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}_r^{(i)}}{\partial b_q}\right]\left\{\Delta b_q\right\} = -\left\{\mathcal{F}_r^{(i)}\right\} \quad , \tag{53}$$

gdzie Δb_q są przyrostami parametrów b_q. Nowe wartości parametrów w $(i+1)$ iteracji określamy za pomocą wzoru:

$$b_q^{(i+1)} = b_q^{(i)} + \Delta b_q \quad . \tag{54}$$

Macierz pochodnych $[\partial \mathcal{F}_r^{(i)}/\partial b_q]$ może być obliczona wprost przez bezpośrednie różniczkowanie metodą różnic skończonych lub przez różniczkowanie odpowiednich warunków optymalności. Stosując pierwsze podejście korzystamy ze wzoru:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial b_q} \approx \frac{\mathcal{F}_r(b_1,\ldots,b_{q-1},b_q+\delta b_q\ldots) - \mathcal{F}_r(b_1,\ldots,b_{q-1},b_q-\delta b_q\ldots)}{2\delta b_q}, \quad (55)$$

gdzie δb_q jest małym przyrostem parametru b_q.
Drugie podejście sprowadza się do określenia pochodnych przemieszczeń węzłowych i wektorów wodzących $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x,y,z) = \mathbf{r}(x_1,x_2,x_3)$ węzłów elementów brzegowych. Wektor wodzący p-tego węzła w $(i+1)$ iteracji wynosi:

$$\mathbf{r}_p^{(i+1)} = \mathbf{r}_p^{(i)} + \mathbf{u}_p^{(i)} . \quad (56)$$

Różniczkując zależność (56) względem parametrów b_q otrzymujemy:

$$x_{p,q}^{(i+1)} = \delta_q^{3p-2} ; \quad y_{p,q}^{(i+1)} = \delta_q^{3p-1} ; \quad z_{p,q}^{(i+1)} = \delta_q^{3p} , \quad (57)$$

gdzie δ_q^s jest deltą Kroneckera.
Pochodne przemieszczeń węzłowych znajdujemy różniczkując równania (43) i (51). Wówczas wartości pochodnych przemieszczeń węzłowych znajdujemy rozwiązując następujące układy równań algebraicznych:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\,\mathbf{X}_{,q} &= \mathbf{L}_{,q}\mathbf{Y} + \mathbf{L}\,\mathbf{Y}_{,q} - \mathbf{K}_{,q}\mathbf{X} , \\ \mathbf{K}\,{}_\beta\mathbf{X}_{,q} &= \mathbf{L}_{,q}{}_\beta\mathbf{Y} + \mathbf{L}_\beta\mathbf{Y}_{,q} - \mathbf{K}_{,q}{}_\beta\mathbf{X} + {}_\beta\mathbf{H}_{,q} . \end{aligned} \quad (58)$$

Biorąc za punkt wyjścia pewny początkowy kształt brzegu S_2 określamy funkcję $\mathcal{F}_r$ i $\partial \mathcal{F}_r/\partial b_q$ dla układu podstawowego (UP) i układu sprzężonego ${}_\beta$(US). Następnie rozwiązujemy układ równań algebraicznych (53) i otrzymujemy przyrosty Δb_q. Na ich podstawie określamy kształt nowego brzegu S_2, który jest podstawą kolejnej iteracji procesu analizy-syntezy. Proces generowania optymalnego kształtu konstrukcji zostaje przerwany, gdy w dwóch kolejnych krokach iteracji otrzymuje się dostatecznie bliskie wartości parametrów b_q.

8. Kształtowanie ze względu na maksymalną sztywność. Przykład numeryczny

Rozważmy funkcjonał jakości konstrukcji ${}_2J$ określony równaniem (6), gdzie $\Phi(\varepsilon) = W(\varepsilon)$ jest gęstością energii sprężystej (potencjał odkształceń), natomiast $\varphi(\mathbf{u},S_2) = -\mathbf{t}^0\cdot\mathbf{u}$. Wówczas funkcjonał ${}_2J$ ma postać:

$${}_2J = \int_{V(\varepsilon)} W\varepsilon\, dV - \int_{S_2(\varepsilon)} \mathbf{t}^0\cdot\mathbf{u}\, dS_2 . \quad (59)$$

Funkcjonał ${}_2J$ wyraża energię potencjalną i jest miarą globalnej sztywności konstrukcji. Dalsze rozważania ograniczymy do zagadnienia generowania optymalnego kształtu konstrukcji przy kryterium maksymalnej sztywności, stosując technikę elementów brzegowych [3,4,5]. Wówczas problem optymalizacji formułujemy następująco : $\max {}_2J$ przy $V = V_0$. Przyjęcie funkcjonału ${}_2J$ w postaci (59) powoduje, że w układzie sprzężonym ${}_2$(US) zachodzi:

- dla obszaru V: ${}_2\sigma^0 = \Phi(\varepsilon)_{,\varepsilon} = W(\varepsilon)_{,\varepsilon} = \sigma$

  oraz ${}_2\sigma = -\sigma$ więc ${}_2\sigma^T = 0$ i ${}_2\varepsilon^T = 0$
- dla brzegu S: ${}_2\underline{v}^0 = 0$, S_2: ${}_2P^0 = \varphi(u)_{,n} = -t^0$

Załóżmy dalej, że brzeg S_2 składa się z części $S_{2'}$, na której zadane są obciążenia $t^0 \neq 0$ oraz $S_{2''}$, na której $t^0 = 0$, oczywiście zachodzi $S_2 = S_{2'} \cup S_{2''}$. Wówczas przy generowaniu swobodnego brzegu konstrukcji $S_{2''}$ warunek optymalności przyjmuje postać:

$$\delta_2 I = \int_{S_{2''}} {}_2P n \delta g \, dS_{2''} = 0 \quad , \tag{60}$$

gdzie $${}_2P = W(\varepsilon) - \omega \quad . \tag{61}$$

Jak widać, warunek optymalności wyraża się w tym przypadku tylko przez zmienne stanu układu podstawowego (UP).

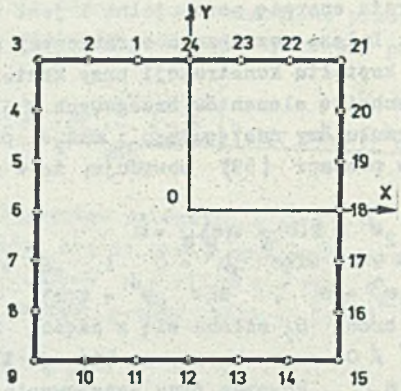
W charakterze przykładu numerycznego rozpatrzmy zagadnienie generowania optymalnego kształtu przekroju poprzecznego pręta skręcanego przy kryterium maksymalnej sztywności [5]. Zagadnienie jest dwuwymiarowe i warunek optymalności po dyskretyzacji ma postać (36), a warunek ograniczający powierzchnię przekroju poprzecznego określony jest zależnością (37). Potencjał odkształceń ma postać :

$$W(\varepsilon) = 2\mu(\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) \quad , \tag{62}$$

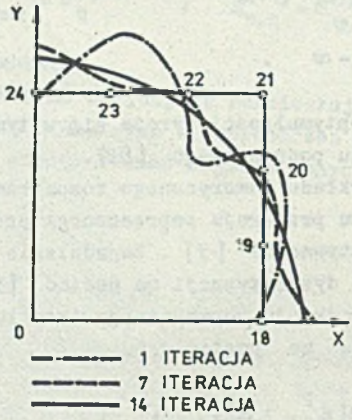
natomiast układ podstawowy opisany jest brzegowym równaniem całkowym:

$$\frac{1}{2} u(y) = \int_S \frac{dR(x,y)}{dn} u(x) dS(x) - \int_S R(x,y) \frac{du(x)}{dn} dS(x) \quad , \tag{63}$$

gdzie $u(y)$ jest funkcją deplanacji , $R(x,y)$ jest rozwiązaniem podstawowym równania Laplace'a $\nabla^2 u = 0$ i wyraża się zależnością $R(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln r$, a warunek brzegowy jest typu Neumanna $\frac{du}{dn} = x_2 n_1 - x_1 n_2$. Kwadratowy brzeg przekroju poprzecznego pręta podzielono na 24 elementy brzegowe (rys.4) . Obliczenia przeprowadzono dla różnych wartości A_0 . Wyniki obliczeń współrzędnych węzłowych elementów brzegowych w kilku wybranych iteracjach dla $A_0 = 100\ mm^2$ przedstawiono na rys.5.



RYS.4.



RYS.5.

3. Uwagi końcowe

Metoda elementów brzegowych jest wyjątkowo dogodną i naturalną techniką numeryczną modelowania konstrukcji przy optymalizacji jej postaci geometrycznej. Połączenie metody układów sprzężonych z metodą elementów brzegowych umożliwia sformułowanie problemu optymalizacji kształtu konstrukcji dla szerokiej klasy funkcjonałów jakości. Ponieważ zarówno całkowe warunki optymalności, jak i brzegowe równania całkowe układu podstawowego i układów sprzężonych określone są na brzegu konstrukcji, więc w całym procesie syntezy kształtu niewiadome występują na powierzchni. Ma to istotne znaczenie w cyfrowej realizacji metody i jest użyteczne w komputerowo wspomaganej optymalizacji kształtu konstrukcji.

LITERATURA

[1] Banerjee P.K., Butterfield R. : Boundary element methods in engineering science. Mc Graw Hill, London 1981.

[2] Brebbia C.A., Telles J., Wrobel L. : Boundary element techniques-theory and applications in engineering . Springer-Verlag, Berlin 1984.

[3] Burczyński T., Adamczyk T. : Zastosowanie metody elementów brzegowych do optymalnego projektowania kształtu konstrukcji. Zb. ref. IV Konferencji Metody i Środki Projektowania Automatycznego, Warszawa 1983.

[4] Burczyński T., Adamczyk T. : The boundary element formulation for multiparameter structural shape optimization. Applied Mathematical Modelling (in press) .

[5] Burczyński T., Adamczyk T. : Wieloparametrowa optymalizacja kształtu przekroju poprzecznego pręta skręcanego przy zastosowaniu metody elementów brzegowych. Zb. ref. XXIII Sympozjonu Modelowanie w Mechanice, PTMTS, Gliwice-Szczyrk 1984.

[6] Mota Soares C.A., Rodrigues H.C., Oliveira Faria L.M., Haug E.J. : Optimization of the shape of solid and hollow shafts using boundary elements. Proc. 5th Inter. Conference on BEM (Eds. C.A. Brebbia T.Futugami, M. Tanaka) Springer-Verlag 1983.

[7] Żochowski A., Mizukami K. : A comparison of BEM and FEM in minimum weight design. Proc. 5th Inter. Conference on BEM, Springer-Verlag 1983.

[8] Mróz Z., Mironov A. : Optimal design for global mechanical constrains. Archiwum Mechaniki Stosowanej, Vol. 32, No. 4, 1980.

[9] Dems K. : Wieloparametrowa optymalizacja kształtu konstrukcji. Zeszyty Naukowe Pol. Łódzkiej, Nr 371, Rozpr. Naukowe Nr 20, Łódź 1980.

[10] Dems K., Mróz Z. : Metody wariacyjne w problemach optymalnej syntezy i identyfikacji konstrukcji. Prace Naukowe Inst. Inżynierii Lądowej Pol. Wrocławskiej Nr 28, V Konferencja Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji, Tom 3, Referaty Problemowe, Wrocław 1981.

[11] Haug E.J. : Optymalizacja kształtu sprężystych elementów konstrukcji. W : Optymalizacja wytrzymałościowa konstrukcji, Ossolineum, Wrocław- Warszawa 1983,ss. 203 - 210.

[12] Szefer G. : Analiza wrażliwości i optymalizacja układów dynamicznych z rozłożonymi parametrami. Z.N. AGH, Nr 942, Mechanika , Tom 1, Z. 4, Kraków 1982.

[13] Mossakowska Z. : Samonaprężenia i dyslokacje. W : Sprężystość. Mechanika Techniczna, Tom IV (Red. M. Sokołowski) PWN, Warszawa 1978.

[14] Gelfand I.M., Fomin S.W. : Rachunek wariacyjny. PWN, Warszawa 1979.

GENERATION OF OPTIMAL SHAPE OF STRUCTURES BY MEANS OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

S u m m a r y

The problem of optimum design of the shape of structure in terms of the boundary element method was presented. The problem was formulated for two kind of cost funktionals. The vector of shape variables which generates the optimal shape of the structures was evaluated from optimality conditions. The optimality conditions were expressed by state variables of an original systems and adjoint systems. The numerical exemple of optimal shaping using a maximal stiffnes criterion was presented.

ГЕНЕРИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ КОНСТРУКЦИИ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Р е з ю м е

В работе рассматривается проблема оптимального проектирования формы конструкции с помощью метода граничных элементов. В качестве критерия оптимальности принято два виды функционалов. Вектор параметров формы, который определяет оптимальную форму конструкции, выведено из условий оптимизации. Условия оптимизации выражено при помощи переменных состояния фундаментальной системы и ассоциированных систем. Представлено численный пример оптимизации формы при применении критерия максимум жесткости конструкции.