

Ewald Macha

Wyższa Szkoła Inżynierska, Opole
Instytut Budowy Maszyn

OBLICZANIE TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ ELEMENTÓW MASZYN METODĄ SYMULACJI CYFROWEJ

Streszczenie. Sformułowano algorytm oceny trwałości zmęczeniowej i stopnia uszkodzenia zmęczeniowego elementów maszyn pozostających pod wpływem wieloosiowych obciążeń losowych. Rozpatrywano punkt, w którym znany jest stan naprężenia oraz charakterystyki zmęczeniowej materiału. Sformułowany algorytm został użyty w warunkach symulowanego, losowego, trójosiowego stanu naprężenia. Przeanalizowano cztery kryteria wyłączenia zmęczeniowego. Zliczanie cykli przeprowadzono metodą Rain Flow. Amplitudy cykli transformowano ze względu na różne towarzyszące im wartości średnie i częstotliwości. Uszkodzenia zmęczeniowe kumulowane według hipotez Palmgren-Minera i Haibacha. Potwierdzono przydatność metody symulacji cyfrowej do obliczenia trwałości zmęczeniowej w wybranych punktach elementów maszyn.

1. Wprowadzenie

Brak zadowalających rozwiązań teoretycznych, a także niedostateczny stan badań eksperymentalnych sprawia, że oceny trwałości zmęczeniowej lub stopnia uszkodzenia zmęczeniowego elementów maszyn i konstrukcji pozostających pod wpływem losowych obciążeń eksploatacyjnych można obecnie dokonywać jedynie w sposób przybliżony. Wystarczy wspomnieć, że dotychczas brak jakichkolwiek testowych badań zmęczeniowych materiałów w warunkach wieloosiowych obciążeń losowych [8,9]. Dostępne wyniki takich badań dotyczą obciążeń o charakterze sinusoidalnym, a znane badania przy obciążeniach losowych dotyczą tylko obciążeń jednoosiowych.

W tych warunkach formułowanie nawet z konieczności uproszczonych procedur postępowania może czasem zaspokoić potrzeby praktyki inżynierskiej, na przykład wtedy, gdy z kilku proponowanych rozwiązań konstrukcji należy wybrać to, które będzie się charakteryzować największą trwałością zmęczeniową.

Nie ulega też wątpliwości, że aby sensownie zaplanować bardzo kosztowne badania zmęczeniowe materiałów w warunkach wieloosiowych obciążeń losowych, trzeba formułować różne koncepcje algorytmów i weryfikować je wstępnie możliwie najdokładniej poprzez ustalenia teoretyczne i obliczenia.

Celem niniejszej pracy jest wykorzystanie metody symulacji cyfrowej do przewidywania trwałości zmęczeniowej elementów maszyn na podstawie zaproponowanych algorytmów. Algorytmy te wymagają znajomości stanu naprężenia

i charakterystyk zmęczeniowych materiałów. Czyniąc zatem stosowne założenia dotyczące wyżej wymienionych wymagań, dąży się do praktycznego zilustrowania przebiegu symulacji cyfrowej na wybranym przykładzie i do porównania ze sobą proponowanych algorytmów oceny trwałości zmęczeniowej.

2. Algorytm wyznaczania trwałości zmęczeniowej

Zakłada się, że w analizowanym punkcie konstrukcji lub maszyny występuje losowy złożony stan naprężenia jako rezultat działania różnych sił zewnętrznych o charakterze losowym. Procedura wyznaczania trwałości zmęczeniowej rozpoczyna się od generowania losowego tensora stanu naprężenia o żądanych charakterystykach statystycznych. Losowy tensor naprężenia jest generowany w postaci sześciowymiarowego procesu wektorowego o żądanych rozkładach prawdopodobieństwa i macierzy kowariancji lub macierzy gęstości widmowej.

Losowy tensor naprężenia jest opisywany w kategoriach teorii korelacyjnej i przyjmuje się, że jest to proces stacjonarny i ergodyczny:

$$X(t) = [X_1(t), \dots, X_6(t)], \quad (1)$$

gdzie przez X_k / $k=1, \dots, 6$ / oznaczono jednowymiarowe procesy stochastyczne, będące składowymi tensora naprężenia $\sigma_{ij}(t)$, / $i, j = x, y, z$ /.

Szczegółowy opis metody generacji losowego tensora naprężenia oraz sposobu kształtowania jego charakterystyk statystycznych został zawarty w pracy [10].

Przejście ze złożonego do jednoosiowego losowego stanu naprężenia odbywa się na podstawie jednego z kryteriów wytężenia zmęczeniowego, zaproponowanych w pracach [7, 8, 9]. Przewodnią ideą leżącą u podstaw tych kryteriów polega na przyjęciu, że o złomie zmęczeniowym materiałów decydują jedynie te składowe stanu naprężenia lub odkształcenia, które działały w płaszczyźnie zaistniałego złomu zmęczeniowego /lub działają w oczekiwanej płaszczyźnie złomu zmęczeniowego/.

Naprężenie zredukowane, wyznaczone na podstawie wspomnianych kryteriów, przybiera następujące wartości, zależne od zastosowanego kryterium:

I. Kryterium maksymalnego naprężenia normalnego w płaszczyźnie złomu

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{red}(t) = & \hat{n}_1^2 \bar{\sigma}_{xx}(t) + \hat{m}_1^2 \bar{\sigma}_{yy}(t) + \hat{n}_1^2 \bar{\sigma}_{zz}(t) + 2\hat{l}_1 \hat{m}_1 \bar{\sigma}_{xy}(t) + \\ & + 2\hat{l}_1 \hat{n}_1 \bar{\sigma}_{xz}(t) + 2\hat{m}_1 \hat{n}_1 \bar{\sigma}_{yz}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

II. Kryterium maksymalnego odkształcenia w kierunku prostopadłym do płaszczyzny złomu

$$\begin{aligned} \sigma_{redII}(t) = & [\hat{l}_1^2 (1 + \nu) - \hat{m}_{xx}^2] \sigma_{xx}(t) + [\hat{m}_1^2 (1 + \nu) - \hat{m}_{yy}^2] \sigma_{yy}(t) + \\ & + [\hat{n}_1^2 (1 + \nu) - \hat{m}_{zz}^2] \sigma_{zz}(t) + 2(1 + \nu) [\hat{l}_1 \hat{m}_1 \hat{m}_{xy}(t) + \hat{l}_1 \hat{n}_1 \hat{m}_{xz}(t) + \\ & + \hat{m}_1 \hat{n}_1 \hat{m}_{yz}(t)] \end{aligned} \quad (3)$$

III. Kryterium maksymalnego naprężenia stycznego w płaszczyźnie złomu

$$\begin{aligned} \sigma_{redIII}(t) = & (\hat{l}_1^2 - \hat{l}_3^2) \sigma_{xx}(t) + (\hat{m}_1^2 - \hat{m}_3^2) \sigma_{yy}(t) + \\ & + (\hat{n}_1^2 - \hat{n}_3^2) \sigma_{zz}(t) + 2(\hat{l}_1 \hat{m}_1 - \hat{l}_3 \hat{m}_3) \sigma_{xy}(t) + 2(\hat{l}_1 \hat{n}_1 - \hat{l}_3 \hat{n}_3) \sigma_{xz}(t) + \\ & + 2(\hat{m}_1 \hat{n}_1 - \hat{m}_3 \hat{n}_3) \sigma_{yz}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

IV. Kryterium maksymalnych naprężeń stycznych i normalnych w płaszczyźnie złomu

$$\begin{aligned} \sigma_{redIV}(t) = & \frac{1}{1+K} \{ [\hat{l}_1^2 - \hat{l}_3^2 + K(\hat{l}_1 + \hat{l}_3)^2] \sigma_{xx}(t) + [\hat{m}_1^2 - \hat{m}_3^2 + \\ & + K(\hat{m}_1 + \hat{m}_3)^2] \sigma_{yy}(t) + [\hat{n}_1^2 - \hat{n}_3^2 + K(\hat{n}_1 + \hat{n}_3)^2] \\ & \sigma_{zz}(t) + 2[(\hat{l}_1 \hat{m}_1 - \hat{l}_3 \hat{m}_3) + K(\hat{l}_1 + \hat{l}_3)(\hat{m}_1 + \hat{m}_3)] \sigma_{xy}(t) + \\ & + 2[(\hat{l}_1 \hat{n}_1 - \hat{l}_3 \hat{n}_3) + K(\hat{l}_1 + \hat{l}_3)(\hat{n}_1 + \hat{n}_3)] \sigma_{xz}(t) + \\ & + 2[(\hat{m}_1 \hat{n}_1 - \hat{m}_3 \hat{n}_3) + K(\hat{m}_1 + \hat{m}_3)(\hat{n}_1 + \hat{n}_3)] \sigma_{yz}(t) \} \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

ν, K - stałe materiałowe

$$\hat{l}_n = \cos \hat{\alpha}_n = \cos(\sigma_n^{\wedge}, x)$$

$$\hat{m}_n = \cos \hat{\beta}_n = \cos(\sigma_n^{\wedge}, y), \quad (n = 1, 2, 3)$$

$$\hat{n}_n = \cos \hat{\gamma}_n = \cos(\sigma_n^{\wedge}, z)$$

Analizując wzory (2) - (5) należy zauważyć, że naprężenie zredukowane $\sigma_{red}(t)$ zależy liniowo od składowych stanu naprężenia σ_{ij} , ($i, j = x, y, z$) a w związku z tym funkcja rozkładu gęstości prawdopodobieństwa procesu losowego $\sigma_{red}(t)$ będzie typu normalnego $N(0, \mu_{\sigma_{red}})$, o ile łączny rozkład losowego tensora naprężenia (1) jest typu normalnego /o zerowych wartościach średnich/.

Położenie oczekiwanej płaszczyzny złomu zmęczeniowego jest opisywane za pomocą wartości średnich kosinusów kierunkowych $\hat{l}_n, \hat{m}_n, \hat{n}_n$ osi głównych naprężeń $\sigma_1 \gg \sigma_2 \gg \sigma_3$, a proces uśredniania odbywa się na wartościach kątów z użyciem wag $w(t)$:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_n &= \frac{1}{W} \int_0^T \alpha_n(t) w(t) dt, \\ \hat{\beta}_n &= \frac{1}{W} \int_0^T \beta_n(t) w(t) dt, \quad (n = 1, 2, 3) \\ \hat{\gamma}_n &= \frac{1}{W} \int_0^T \gamma_n(t) w(t) dt,\end{aligned}\quad (6)$$

gdzie:

$$W = \int_0^T w(t) dt,$$

T - czas uśredniania.

Poszukiwania właściwej spośród kilkunastu zaproponowanych rodzajów wag przeprowadzono metodą symulacji komputerowej, uwzględniając dostępne wyniki badań testowych materiałów przy wieloosiowych obciążeniach sinusoidalnych, zgodnych w fazie i z różnymi kątami przesunięcia fazowego [13, 17]. Między innymi bardzo dobrą zgodność przewidywania oczekiwanego płaszczyzny złomu zmęczeniowego z rezultatami testowych badań zmęczeniowych uzyskano dla materiałów w stanie elastokruchym /żeliwo/ przy użyciu następującej wagi [1, 6]:

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \sigma_1(t) < a\sigma_{az} \\ \left(\frac{\sigma_1(t)}{a\sigma_{az}}\right)^m & \text{gdy } \sigma_1(t) > a\sigma_{az} \end{cases} \quad (7)$$

Waga ta uwzględnia jedynie te położenia osi głównych, w których wartości maksymalnego naprężenia głównego $\sigma_1(t)$ są większe od pewnego ułamka $a/a = 0,5$ /naprężenia granicznego σ_{az} , przy czym ich udział w procesie uśredniania zależy o granicy zmęczenia σ_{az} i nachylenia m wykresu Wöhlera.

Krzywa zmęczenia Wöhlera jest opisana następującym równaniem:

$$N(\sigma_a) = \begin{cases} N_G \left(\frac{\sigma_{az}}{\sigma_a}\right)^m & \text{gdy } \sigma_a > \sigma_{az} \\ \infty & \text{gdy } \sigma_a < \sigma_{az} \end{cases}, \quad (8)$$

w którym: $N(\sigma_a)$ - liczba cykli naprężeń harmonicznym do zniszczenia zależna od amplitudy σ_a

N_G - graniczna liczba cykli odpowiadająca granicy σ_{az} ,

m - stała.

Aby skorzystać z określonych za pomocą krzywej zmęczenia Wöhlera właściwości materiałów, przebieg losowy naprężenia $\sigma_{red}(t)$ dzielimy na cykle i

półcykle i zliczamy je. Stosuje się tu takie metody, jak: Rain Flow, Range Pair, Full Cycles i inne [3, 14, 18]. Wymienione metody dają bliskie sobie rezultaty liczbowe przy zliczaniu cykli. W niniejszej pracy posłużymy się metodą Rain Flow.

Przed rozpoczęciem zliczania cykli i półcykli przebieg czasowy naprężenia podlega kompresji czasowej. Celem tej operacji jest przede wszystkim wyeliminowanie stałych w czasie fragmentów realizacji naprężenia, które w istocie nie powodują zmęczenia materiału, a także uniknięcie zliczania w komputerze cyfrowym cykli o znikomo małych amplitudach. Operacja kompresji czasowej polega na pominięciu powtarzających się po sobie wartości nie różniących się od wartości poprzedzających je o wartość większą niż $\Delta\sigma$. Przyjeto:

$$\Delta\sigma = 5 \times 10^{-3} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}), \quad (9)$$

gdzie:

σ_{\max} , σ_{\min} - odpowiednio maksymalna i minimalna wartość naprężenia σ , występująca w analizowanej realizacji czasowej.

Sposób zliczania półcykli i cykli metodą płynącego deszczu /Rain Flow/ przedstawiono na rys. 1.

Przebieg naprężenia najlepiej rozpatrywać z osią czasu zwróconą ku dołowi, a linie łączące ekstrema traktować jako dachy pagód. Wtedy sposób postępowania daje się obrazowo kojarzyć ze spływem strumieni wody deszczowej po tych dachach. Spływ strumienia wody /zliczanie półcykli i cykli/ rozpoczyna się od początku przebiegu, a następnie kolejno od wewnątrz każdego ekstremum i trwa do momentu, gdy:

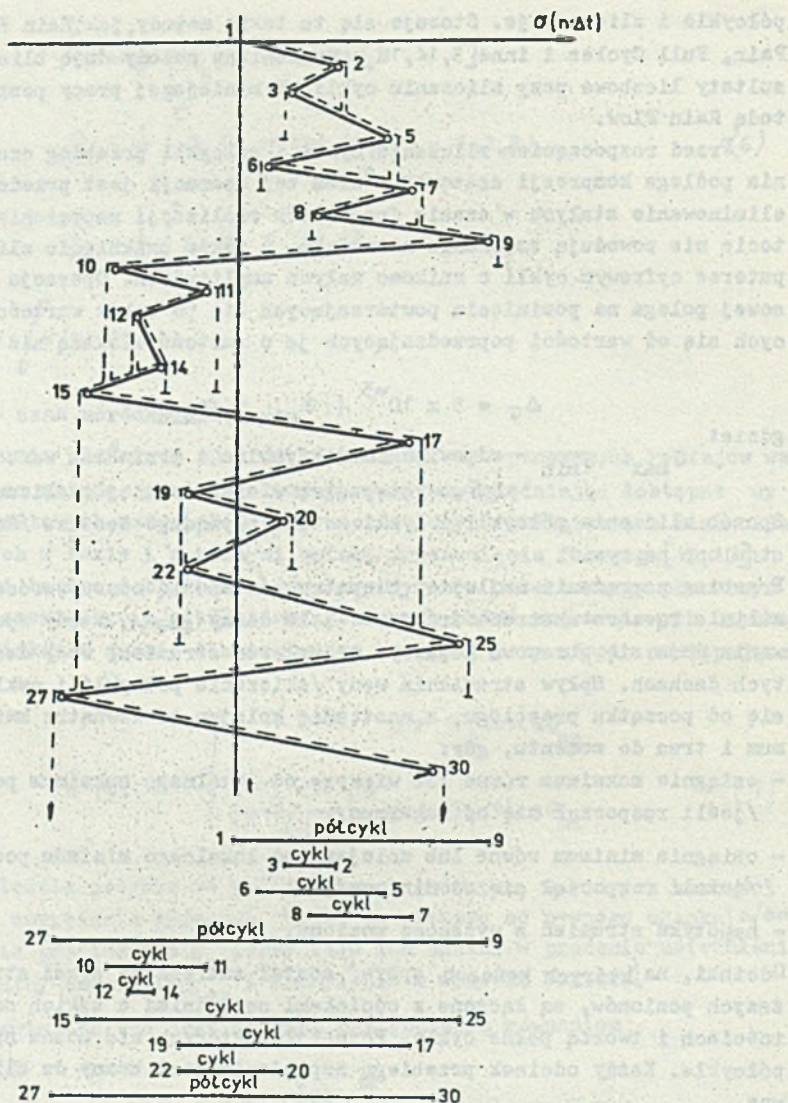
- osiągnie maksimum równe lub większe od lokalnego maksimum początkowego /jeśli rozpoczął się od maksimum/,
- osiągnie minimum równe lub mniejsze od lokalnego minimum początkowego /jeżeli rozpoczął się od minimum/,
- napotyka strumień z wyższego poziomu.

Odcinki, na których końcach spływ został zatrzymany przez strumienie z wyższych poziomów, są łączone z odcinkami sąsiednimi o takich samych rozpiętościach i tworzą pełne cykle. Pozostałe, których nie można sparować, tworzą półcykle. Każdy odcinek przebiegu naprężenia jest brany do zliczania tylko raz.

W odniesieniu do każdego półcyklu i cyklu oblicza się wartość amplitudy σ_a , wartość średnia σ_m i częstotliwość f według następujących wzorów:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max}(n \cdot \Delta t) - \sigma_{\min}[(n^+ - m)\Delta t]}{2}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max}(n \cdot \Delta t) + \sigma_{\min}[(n^+ - m)\Delta t]}{2} \quad (10)$$



Rys.1. Przykład zliczania półcykli i cykli metodą płynącego deszczu /Rain Flow/

$$f = \begin{cases} \frac{1}{2 m \cdot \Delta t} & \text{dla półcykli} \\ \frac{1}{m \cdot \Delta t} & \text{dla cykli,} \end{cases}$$

gdzie:

n - numery ekstremów w przebiegu naprężenia

m - liczba okresów próbkowania Δt pomiędzy ekstremami.

Transformowanie wartości amplitud półcykli i cykli $\sigma_a(f)$ o różnych częstotliwościach na ekwiwalentne wartości amplitud $\sigma_{aTf}(f_h)$, odpowiadające jednej częstotliwości f_h , przy której wyznaczono wykres zmęczenia Wöhlera danego materiału, odbywa się według zależności [7]:

$$\sigma_{aTf} = \begin{cases} \sigma_a(f) - \sigma_{az} \cdot F(f) \\ 0 \text{ gdy } \{\sigma_a(f) - \sigma_{az} \cdot F(f)\} < 0. \end{cases} \quad (11)$$

Funkcja $F(f)$ opisuje wpływ częstotliwości f na granicę zmęczenia $\sigma_{az}(f)$ zgodnie z relacją:

$$\frac{\sigma_{az}(f)}{\sigma_{az}(f_h)} - F(f) = 1 \quad (12)$$

i spełnia warunek $F(f) \big|_{f=f_h} = 0$.

Transformowanie wartości amplitud półcykli i cykli σ_a o różnych wartościach średnich $\sigma_m \neq 0$ na ekwiwalentne wartości amplitud σ_{aTm} o $\sigma_m = 0$ odbywa się według wzoru [7]:

$$\sigma_{aTm} = \sigma_a + \sigma_{az} \left[p \left(\left| \frac{\sigma_m}{R_m} \right| \right) + (1-p) \left(\frac{\sigma_m}{R_m} \right)^2 \right], \quad (13)$$

gdzie:

R_m - granica wytrzymałości przy rozciąganiu,

p - stała materiałowa występująca w zależności Troosta i El-Magda [19].

Dla $p = 0$ zależność Troosta i El-Magda przechodzi w zależność Gerbera, a dla $p = 1$ w zależność Goodmana.

Obliczenie trwałości zmęczeniowej T_R i stopnia uszkodzenia zmęczeniowego $S(T)$ według wybranej hipotezy kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych odbywa się na podstawie histogramu amplitud naprężenia uzyskanego w procesie zliczania cykli oraz wykresu Wöhlera danego materiału T_0 - czas obserwacji realizacji naprężenia/.

Spośród wielu znanych hipotez kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych materiałów najczęściej stosuje się hipotezy Palmgrena-Minera [15, 12], Serensena - Kogajewa [18], Cortena-Dolana [2], a ostatnio Haibacha [5]. W niniejszej pracy do obliczenia trwałości zmęczeniowej T_R i stopnia uszkodzenia zmęczeniowego $S(T)$ posłużymy się hipotezami Palmgrena-Minera i Haibacha.

Według hipotezy Palmgrena-Minera:

$$S_{P-M}(T_0) = \begin{cases} \sum_{i=1}^j \frac{n_i}{N_G} \left(\frac{\sigma_{az}}{\sigma_{ai}} \right)^m & \text{dla } \sigma_{ai} > \sigma_{az} \\ 0 & \text{dla } \sigma_{ai} < \sigma_{az} \end{cases} \quad (14)$$

$$T_{RP-M} = \frac{T_0}{S_{P-M}(T_0)} \quad (15)$$

Według hipotezy Haibacha:

$$S_H(T_0) = \sum_{i=1}^j \frac{n_i}{N_G \left(\frac{\sigma_{az}}{\sigma_{ai}} \right)^m} + \sum_{i=j+1}^k \frac{n_i}{N_G \left(\frac{\sigma_{az}}{\sigma_{ai}} \right)^{2m-1}}, \quad (16)$$

przy czym:

$$i = \begin{cases} 1, \dots, j & \text{dla } \sigma_{ai} > \sigma_{az} \\ j+1, \dots, k & \text{dla } \sigma_{ai} < \sigma_{az} \end{cases}$$

$$T_{RH} = \frac{T_0}{S_H(T_0)} \quad (17)$$

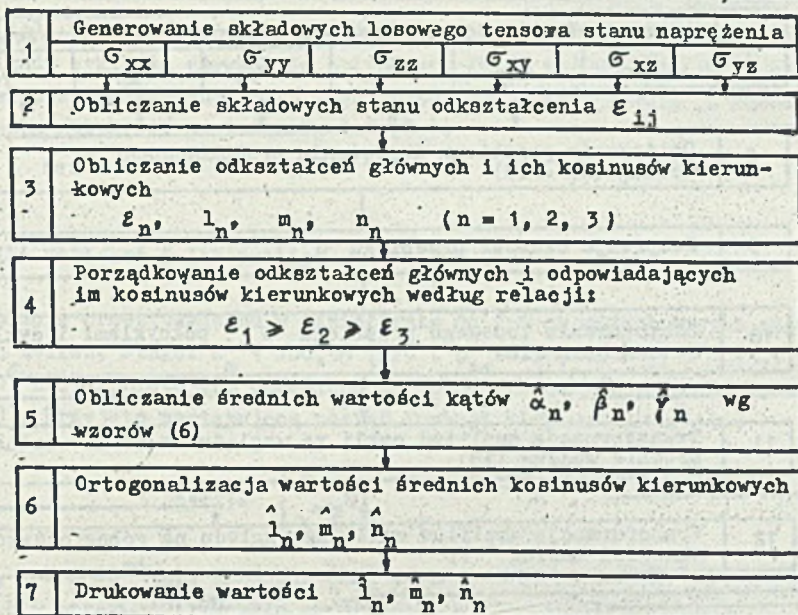
3. Przykład symulacji cyfrowej

Proces symulacji przebiega w dwóch etapach. W pierwszym etapie wyznacza się średnie kosinusy kierunkowe osi głównych odkształceń, a przez to i oczekiwane położenie płaszczyzny złomu zmęczeniowego /rys.2/, w drugim zaś etapie oblicza się trwałość zmęczeniową materiału /rys.3/.

Symulacja rozpoczyna się od generowania losowego tensora stanu naprężenia /blok 1/. Każda ze składowych stanu naprężenia posiada rozkład normalny $N(0,1)$ i szerokopasmowe widmo częstotliwości pokazane na rys.4.

W celu operowania realnymi wartościami naprężeń każdy z sześciu losowych ciągów liczb pomnożono przez wspólny współczynnik skali wynoszący 30 [MPa]. W badaniach wygenerowano $N = 2^{14} = 16384$ realizacji losowego tensora stanu naprężenia. Przy przyjętym okresie próbkowania $\Delta t = 375 \times 10^{-6}$ odpowiada to czasowi obserwacji realizacji naprężenia zredukowanego $T_0 = (N-1) \Delta t = 6,14$ [s]. Obliczona macierz kowariancji wygenerowanego tensora stanu naprężenia przyjęła następujące wartości:

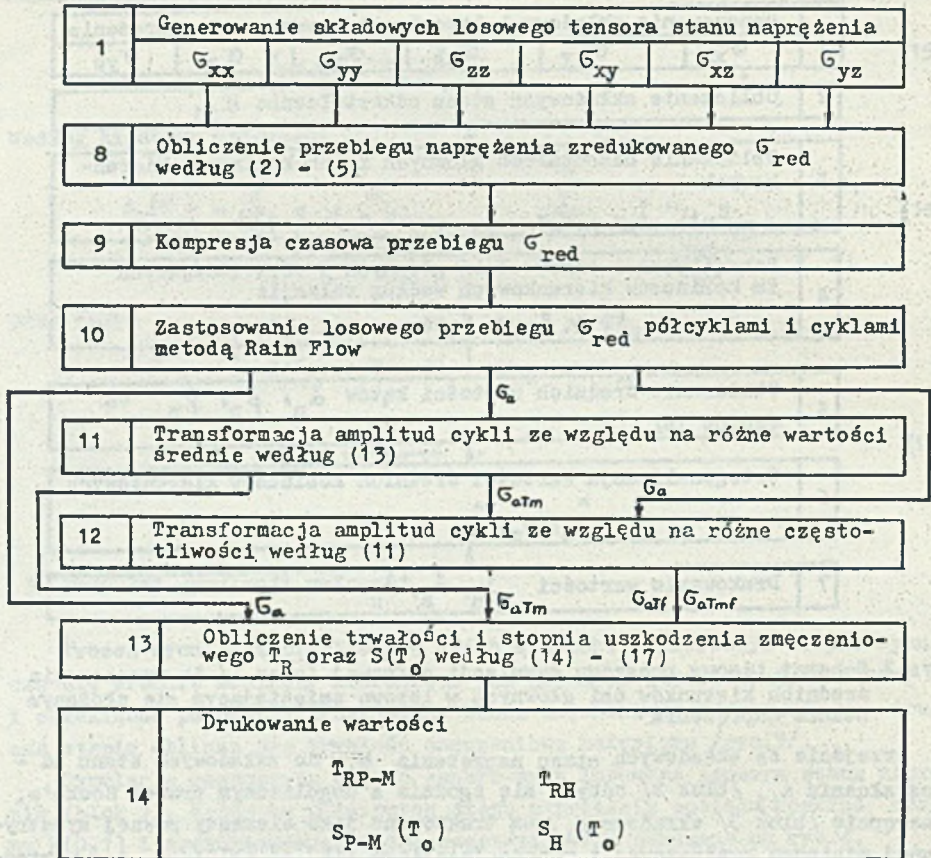
902,8	455,4	274,5	-274,6	-455,5	51,9
455,4	864,9	133,2	-133,2	-864,9	36,0
274,5	133,2	853,2	-853,3	-133,3	171,3
-274,6	-133,2	-853,3	853,3	133,3	-171,3
-455,5	-864,9	-133,3	133,3	864,9	-36,0
51,9	36,0	171,3	-171,3	-36,0	892,8



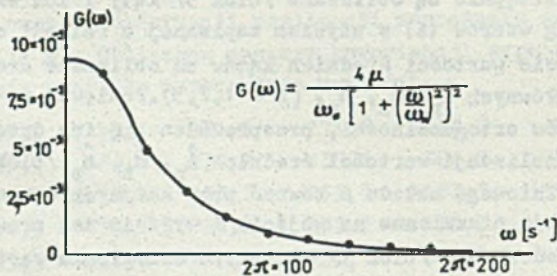
Rys.2 Schemat ideowy programu symulacji cyfrowej /etap I/ do wyznaczenia średnich kierunków osi głównych w losowo zmieniającym się złożonym stanie naprężenia

Przejęcie ze składowych stanu naprężenia σ_{ij} do składowych stanu odkształcenia ϵ_{ij} /blok 2/ odbywa się zgodnie z uogólnionym prawem Hooke'a. Następnie /blok 3/ składowe ϵ_{ij} są traktowane jako elementy pewnej symetrycznej macierzy kwadratowej i metodą Jacobiego [16] są obliczane jej wartości i wektory własne. Wartości własne odpowiadają odkształceniom głównym, a wektory własne - ich kosinusom kierunkowym. Odkształcenia główne i odpowiadające im kosinusy kierunkowe są porządkowane /blok 4/ według relacji $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$, a następnie są obliczane /blok 5/ kąty i ich wartości średnie $\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n, \hat{\gamma}_n$ według wzorów (6) z użyciem zapisanej w relacji odkształceń wagi (7). Na podstawie wartości średnich kątów są obliczane średnie kosinusy kierunkowe osi głównych $\hat{l}_n, \hat{m}_n, \hat{n}_n$, ($n = 1, 2, 3$). Ponieważ na ogół nie spełniają one warunków ortogonalności, przeprowadza się ich ortogonalizację. Procedura ortogonalizacji wartości średnich $\hat{l}_n, \hat{m}_n, \hat{n}_n$ /blok 6/ polega na rozwiązaniu nieliniowego układu 6 równań przy zadanych wartościach $\hat{l}_1, \hat{m}_2, \hat{n}_3$, które pozostają niezmiennie na wejściu i wyjściu tej procedury. Pierwszy etap symulacji kończy się /blok 7/ wydrukiem dziewięciu wartości macierzy kosinusów kierunkowych.

Wartości tej macierzy są wykorzystywane w drugim etapie symulacji, w którym oblicza się trwałość zmęczeniową T_R i stopień uszkodzenia zmęczeniowego $S(T_0)$ materiału /rys.3/. Etap ten rozpoczyna się również od generowania losowego tensora stanu naprężenia - identycznego jak w etapie pierwszym - przy czym tutaj składowe tensora są użyte do obliczania /blok 8/ naprężenia zredukowanego σ_{red} według cytowanych kryteriów wyłączenia zmęczeniowego.



Rys.3. Schemat ideowy programu symulacji cyfrowej /etap II/ do obliczenia trwałości i stopnia uszkodzenia zmęczeniowego materiału w losowo zmieniającym się złożonym stanie naprężenia



Rys.4 Wykres funkcji gęstości widmowej $G(\omega)$ generowanych ciągów losowych składowych stanu naprężenia $\mu = 1$, $\omega = 418,9 [s^{-1}]$

Z kolei przebieg losowy naprężenia zredukowanego podlega kompresji czasowej /blok 9/i zastępowany jest przez pojedyncze półcykle i cykle /blok 10/. Następnie amplitudy półcykli i cykli są transformowane ze względu na różne towarzyszące im wartości średnie/blok 11/według(13)i częstotliwości/blok12/

według (11). Nietransformowane i jednokrotnie lub dwukrotnie transformowane amplitudy cykli są używane do obliczania /blok 13/ wartości T_R i $S(T_0)$ według hipotez Palmgren-Minera i Haibacha. Drugi etap symulacji kończy się drukowaniem /blok 14/ wartości T_R i $S(T_0)$.

4. Wyniki obliczeń i ich analiza

Symulację przeprowadzono w odniesieniu do danych materiałowych odpowiadających żeliwu. Stałe: $R_m = 180,99$ [MPa], $\sigma_{az} = 96,14$ [MPa], $m = 19,4$, $n_G = 1,9 \times 10^6$ zaczerpnięto lub określono na podstawie danych przytoczonych w pracy [13]. Przyjęto następującą postać funkcji $F(f)$ we wzorze (11):

$$F(f) = \begin{cases} 0 & \text{dla } f \leq f_h \\ A_f f & \text{dla } f > f_h \end{cases} \quad (18)$$

Stałe $A_f = 2 \times 10^{-4}$ [s], $f_h = 160$ [Hz] określono na podstawie danych zamieszczonych w pracy [4]. Ponadto przyjęto: $E = 11 \times 10^4$ [MPa], $\nu = 0,25$, $\rho = 1$ i $K = 0,8979$ wg Mataka [11] w zależności (5).

W wyniku zrealizowania pierwszego etapu symulacji według schematu z rys. 2 uzyskano następujące wartości średnich kosinusów kierunkowych osi głównych:

$$\begin{array}{lll} \hat{m}_1 = -0,17727 & \hat{m}_1 = 0,92392 & \hat{m}_1 = 0,33903 \\ \hat{m}_2 = -0,31134 & \hat{m}_2 = -0,37945 & \hat{m}_2 = 0,37125 \\ \hat{m}_3 = 0,93362 & \hat{m}_3 = 0,048894 & \hat{m}_3 = 0,35492 \end{array}$$

Łatwo sprawdzić, że spełniają one warunki ortogonalności.

Uzyskane w drugim etapie symulacji /według schematu z rys.3/ wartości trwałości zmęczeniowej materiału T_R i stopnia uszkodzenia zmęczeniowego $S(T_0)$ w czasie $T_0 = 6,14$ [s] zestawiono odpowiednio w tab. 1 i 2.

Tab.1. Wartości trwałości zmęczeniowej materiału T_R w warunkach symulowanego locowego trójosiowego stanu naprężenia

	T_R [s]			
	σ_{redI}	σ_{redII}	σ_{redIII}	σ_{redIV}
σ_a	$T_{RP-M} = 34218,4$	112223,6	1077,2	301308,7
	$T_{RH} = 35935,7$	107902,7	1077,0	281098,1
σ_{aTf}	34195,7		1076,6	301756,0
	33913,5		1076,4	281079,2
σ_{aTm}	25080,4	71878,0	668,9	148703,5
	24855,9	70449,9	668,7	145269,7
σ_{aTmf}	25089,6	72178,9	660,3	149452,3
	24866,0	70613,5	660,1	146158,4

Tab.2 Wartości stopnia uszkodzenia zmęczeniowego $S(T)$ w warunkach symulowanego losowego trójosiowego stanu naprężenia

		$S(T_0), T_0 = 6,14 [s]$			
		σ_{redI}	σ_{redII}	σ_{redIII}	σ_{redIV}
σ_a	$S_{P-M}(T_0) = 0,17354 \times 10^{-3}$	$0,54745 \times 10^{-4}$	$0,57031 \times 10^{-2}$	$0,20356 \times 10^{-4}$	
	$S_H(T_0) = 0,18104 \times 10^{-3}$	$0,56937 \times 10^{-4}$	$0,57043 \times 10^{-2}$	$0,21856 \times 10^{-4}$	
σ_{aTf}	$0,17966 \times 10^{-3}$		$0,57063 \times 10^{-2}$	$0,20357 \times 10^{-4}$	
	$0,18116 \times 10^{-3}$		$0,57076 \times 10^{-2}$	$0,21857 \times 10^{-4}$	
σ_{aTm}	$0,24496 \times 10^{-3}$	$0,85473 \times 10^{-4}$	$0,91844 \times 10^{-2}$	$0,41315 \times 10^{-4}$	
	$0,24717 \times 10^{-3}$	$0,87206 \times 10^{-4}$	$0,91873 \times 10^{-2}$	$0,42291 \times 10^{-4}$	
σ_{aTmf}	$0,24487 \times 10^{-3}$	$0,85117 \times 10^{-4}$	$0,93041 \times 10^{-2}$	$0,41108 \times 10^{-4}$	
	$0,24707 \times 10^{-3}$	$0,87004 \times 10^{-4}$	$0,93069 \times 10^{-2}$	$0,42034 \times 10^{-4}$	

- Oznaczenia: σ_a - nietransformowane amplitudy cykli
 σ_{aTf} - amplitudy cykli po transformacji ze względu na różne częstotliwości wg wzorów (11) i (18)
 σ_{aTm} - amplitudy cykli po transformacji ze względu na różne wartości średnie wg (13)
 σ_{aTmf} - amplitudy cykli po transformacji ze względu na różne wartości średnie i częstotliwości wg (13), (11), (18).

W tabeli 3 zestawiono wartości parametrów rozkładów prawdopodobieństwa na -prężenia zredukowanego σ_{red} według różnych kryteriów wyłączenia zmęczeniowego

Tab.3 Parametry rozkładów prawdopodobieństwa σ_{red} według różnych kryteriów

	$\sigma_{red \min}$	$\sigma_{red \max}$	$\sigma_{red \text{sr}}$	$\mu_{\sigma_{red}}$	$\sqrt{\mu_{\sigma_{red}}}$
	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa] ²	[MPa]
σ_{redI}	-125,7	125,9	0,15	1629,87	40,37
σ_{redII}	-118,1	122,9	0,48	1451,38	38,10
σ_{redIII}	-158,1	151,9	0,19	2241,08	47,34
σ_{redIV}	-109,1	122,0	0,84	1256,60	35,45

Operacja kompresji czasowej przebiegów naprężenia zredukowanego wg kryteriów (2) - (5) eliminowała zgodnie z (9) odpowiednie następujące liczby wartości dyskretnych: 2651, 2721, 2794, 2861 z ogólnej liczby 16384 wartości. W procesie zliczania półcykli i cykli wzięły udział odpowiednie następujące liczby ekstremów: 2406, 2401, 2423, 2375. Według metody płynącego czasu wyróżniono dla kolejnych kryteriów następujące liczby amplitudy półcykli: 15, 14, 10, 16 i pełnych cykli: 1195, 1193, 1206, 1179, które następnie łącznie sklasyfikowano w 100 przedziałach o szerokościach odpowiednio: 1, 258,

[1,199, 1,549, i 1,55 [MPa]. Z takimi samymi krokami obliczono też według hipotez Palmgrena-Minera i Haibacha uszkodzenia odpowiadające nietransformowanym amplitudom. Kroki stosowane w dyskretyzacji amplitud transformowanych różniły się od wyżej wymienionych.

W analizowanym przypadku największą wariancję σ_{red} ma przebieg σ_{redIII} . W ślad za tym uzyskano też największą wartość uszkodzenia zmęczeniowego $S(T_0)$ i najmniejszą trwałość zmęczeniową T_R materiału. Najmniejszą wariancję μ_{red} ma natomiast przebieg σ_{redIV} , czemu odpowiada najmniejsza wartość $S(T_0)$ i największa wartość T_R . Znaczne różnice w uzyskanych wartościach σ_{red} , $S(T_0)$ i T_R są wynikami odmiennych postaci wyrażeń analitycznych, służących do obliczania $\sigma_{red}(t)$ według poszczególnych kryteriów, przy czym istotne znaczenie mają też obliczone wartości średnich kosinusów kierunkowych osi głównej, determinujące oczekiwane położenie płaszczyzny złomu zmęczeniowego.

Wpływ częstotliwości f cykli na stopień uszkodzenia zmęczeniowego $S(T_0)$ i trwałości T_R materiału w analizowanym przypadku okazał się - zgodnie z oczekiwaniami - nieistotny:

Uwzględnienie różnych od zera wartości średnich poszczególnych cykli wpływa na zwiększenie stopnia uszkodzenia $S(T_0)$, a to zmniejsza trwałość zmęczeniową materiału T_R .

Kumulacja uszkodzeń zmęczeniowych przeprowadzona według hipotez Palmgrena-Minera i Haibacha dała - w analizowanym przypadku - bardzo bliskie sobie wartości $S(T_0)$ i T_R . Generalnie jednak, stosując hipotezę Haibacha, uzyskuje się mniejszą trwałość zmęczeniową niż wg hipotezy Palmgrena-Minera.

5. Uwagi końcowe

1. Obliczenia nie ujawniły istotnych przeszkód i trudności w stosowaniu sformułowanego algorytmu do oceny trwałości zmęczeniowej elementów maszyn, w których występuje losowy złożony stan naprężenia. Uzyskane wartości trwałości zmęczeniowej dla żeliwa są prawdopodobne, choć różnice uzyskane w wyniku zastosowania poszczególnych kryteriów wyczerpania zmęczeniowego i transformacji amplitud cykli - jak się okazało w analizowanym przypadku - są znaczne.

2. Metoda symulacji cyfrowej okazała się bardzo użyteczna i wygodna do oceny trwałości zmęczeniowej według różnych modeli matematycznych, praktycznie w dowolnie generowanych stanach naprężeń, w tym szczególnie w takich stanach, które bardzo trudno w sposób kontrolowany zrealizować w rzeczywistości w próbkach podczas laboratoryjnych testów zmęczeniowych.

3. Opracowany pakiet programów dla badań symulacyjnych może być wykorzystany do przewidywania trwałości zmęczeniowej materiałów podczas badań zmęczeniowych próbek lub elementów maszyn, jeżeli zastąpimy generowane przebiegi składowych stanu naprężenia rzeczywistymi wynikami pomiarów realizacji składowych stanu odkształcenia. Tym samym może on ułatwić prakty-

czną weryfikację sformułowanego w [niniejszej] pracy algorytmu obliczeń.

LITERATURA

- [1] Achtelik H., Macha E., Jakubowska I.: Actual and estimated directions of fatigue fracture plane in ZL 250 grey cast iron under combined alternating bending and torsion. *Studia Geotechnica et Mechanica*, Vol.V, No2, 1983, pp 9-30
- [2] Corten H.T., Dolan J.T.: Cumulative fatigue damage, *Proc.Int.Conf. on Fatigue of Metals*, London, 1956, pp-235-246
- [3] Dowling N.E.: Fatigue failure predictions for complicated stress-strain histories, *Journal of Materials*, JMSA, Vol.7, No 1, March 1972, pp.71-87
- [4] Frost N.E., Marsh K.J., Pook L.P.: *Metal fatigue*, Clarendon Press, Oxford, 1974, p.499
- [5] Haibach E.: Modifizierte Lineare Schadensakkumulations-Hypothese zur Berücksichtigung des Dauerfestigkeitsabfalls mit fortschreitender Schädigung, *Laboratorium für Betriebsfestigkeit, Darmstadt*, TM Nr 50/70, Juli 1970, s.15
- [6] Jakubowska I., Macha E.: Prediction of the orientation of the fatigue fracture plane under complex state of stress by a digital simulation method, in: 8th Congress on Material Testing, Budapest, 28 Sept.-1 Oct. 1982, *Lectures II Vol. OMIKK-TECHNOINFORM*, Budapest 1982, pp.1153 - 1157
- [7] Macha E.: Modele matematyczne trwałości zmęczeniowej materiałów w warunkach losowego złożonego stanu naprężenia. *Prace Nauk.Inst.Mater.i Mech. Tech.Pol.Wrocł.Nr 41, Seria: Monografie Nr 13*, Wrocław 1979, s.99
- [8] Macha E.: Fatigue failure criteria for materials under random triaxial state of stress, *Advances in Fracture Research Proc.of the 6th Inter. Conf.on Fracture*, New Delhi, India, 4-10 Dec.1984, Eds. S.R.Valluri, D.H.R.Taplin, ..., Vol.3 Pergamon Press, pp.1895-1902
- [9] Macha E.: Simulation of a material life-time under random triaxial stress state, in: *Simulation Systems 79*, L.Dekker, G.Savastano, C.C.Vansteenkiste, Ed. North-Holland Publishing Company, 1980, pp.425-435
- [10] Macha E.: Statistical characteristics of strains, principal stresses and direction cosines in random stress state, *Studia Geotechnica et Mechanica*, Vol.VI No.2, 1984, pp.21-54
- [11] Nataka T.: An explanation on fatigue limit under combined stress, *Bulletin of the JSME*, Vol.20, No 141, March 1977, pp.257-263
- [12] Miner M.A.: Cumulative damage in fatigue, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.12, 1945, pp.159-164
- [13] Nishihara T., Kawamoto M.: The strength of metals under combined alternating bending and torsion with phase difference, *Memoirs of the College of Engineering*, Kyoto Imperial University, Vol.XI No 4, 1945, pp.85-112
- [14] Okamura H., Sakai S., Susuki I.: Cumulative fatigue damage under random loads, *Fatigue of engineering materials and Structures*, Vol.1, 1979, pp. 409-419
- [15] Palmgren A.: Die Lebensdauer von Kugellagern, *VDI-Z*, Bd.68, 1924 ss.339-341
- [16] Ralston A., Wilf H.S.: *Mathematical methods for digital computers*, Wiley, London, 1962
- [17] Rotvel F.: Biaxial fatigue tests with zero mean stresses using tabular specimens, *Int.J.Mech.Sci.*, Vol.12, 7, 1970, pp.697-613

- [18] Serensen S.V., Kogaev V.P., Schnejderovitz R.M.M.: Nesuščaja sposobnost i rasčet detalej mašin[na pročnōst., Izd.3, Masinostroenie 1975 s.488
- [19] Troost A., El-Magd E.: Allgemeine Formulierung der Schwingfestigkeitsamplitude in Haigscher Darstellung, Materialprüfung 17, No 2 1975, ss.47-49

EVALUATING THE FATIGUE LIFE OF MACHINE ELEMENTS BY THE DIGITAL SIMULATION METHOD

S u m m a r y

The algorithm of evaluation of the fatigue life and fatigue failure has been formulated for machine elements under multiaxial random loadings. The point, at which the stress state and the fatigue characteristics of material are known, has been considered. The formulated algorithm is used in case of the simulated random triaxial stress state. Four strength criteria have been analysed. The cycles are counted by the Rain Flow method. The amplitudes of cycles are transformed in consideration of various mean values and frequencies. Fatigue failures have been cumulated according to the hypotheses by Palmgren-Miner and Haibach. It has been noticed that digital simulation method is useful for estimating the fatigue life at the selected points of machine elements.

РАСЧЕТ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ ЧАСТЕЙ МАШИН МЕТОДОМ ЦИФРОВОЙ СИМУЛЯЦИИ

Р е з ю м е

Сформулировано алгоритм оценки усталостной прочности и степени усталостного повреждения частей машин, находящихся под влиянием многоосевых случайных нагрузок. Рассмотрено точку, в которой известны напряженное состояние, а также усталостные характеристики материала. Сформулированный алгоритм употреблено в условиях симулированного, случайного, трехосевого напряженного состояния. Проанализировано четыре критерия усталостного напряжения материала. Счет циклов проведено методом Rain Flow. Амплитуды циклов трансформировано, учитывая разные сопровождающие средние значения и частоты. Усталостные проведениа кумулировано по гипотезам Palmgren-Minera i Haibacha. Подтверждено пригодность метода цифровой симуляции для расчета усталостной прочности в избранных точках частей машин.