

Tomasz ADAMCZYK
Tadeusz BURCZYŃSKI

METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ZAGADNIENIACH PRZESTRZENNEGO KONTAKTU Z TARCIEM

Streszczenie. W pracy przedstawiono zagadnienie przestrzennego statycznego kontaktu dwóch ciał liniowo-sprężystych w ujęciu metody elementów brzegowych. Sformułowano brzegowe równania całkowe dla obu ciał w formie przyrostowej. W strefie styku wyróżniono strefę adhezyjną i poślizgu. Przyjęto model tarcia uwzględniający własności fizykochemiczne materiałów oraz względny poślizg obu kontaktujących się powierzchni ciał. Na przyrosty przemieszczeń i sił powierzchniowych nałożono więzy geometryczne i fizyczne kontaktu. Uwzględniając brzegowe warunki kontaktu otrzymano układ sześciu osobliwych równań całkowych. Po dyskretyzacji powierzchni ciał elementami brzegowymi i aproksymacji przyrostów przemieszczeń i sił powierzchniowych przy pomocy funkcji kształtu i wartości węzłowych otrzymano układ równań algebraicznych względem nieznanych przyrostów przemieszczeń węzłowych i węzłowych sił powierzchniowych. Rozwiązując ten układ dla każdego kroku przyrostu obciążenia można analizować dyskretny rozwój kontaktu. Omówiono sposób doboru przyrostów obciążenia zewnętrznego tak aby warunki kontaktu obu stykających się ciał pozostały niezmiennione.

1. Wstęp

Zagadnienie kontaktu ciał odkształcalnych jest z jednej strony istotnym problemem inżynierskim występującym w projektowaniu i konstruowaniu maszyn, z drugiej zaś strony stanowi ważne zadanie z zakresu mechaniki ciał odkształcalnych.

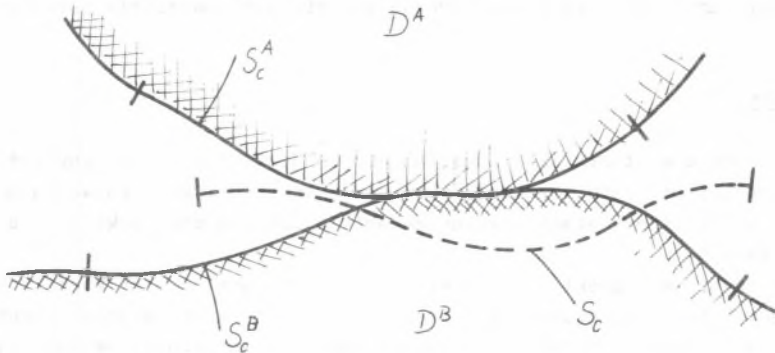
Analiza niehertzowskiego kontaktu, uwzględniająca dowolny kształt kontaktujących się powierzchni ciał stałych wraz z towarzyszącym mu tarcie, możliwa jest obecnie dzięki zastosowaniu metod numerycznych mechaniki, w szczególności metody elementów skończonych (por. np. [1-4]).

Metoda elementów skończonych w przestrzennych zagadnieniach kontaktu złożonych i dużych konstrukcji jest jednak mało efektywna. Alternatywą dla zastosowań metody elementów skończonych do problemów kontaktowych jest metoda elementów brzegowych [5], [6] (MEB). Główną jej zaletą jest zmniejszenie o jeden rząd wymiaru rozwiązywanego zadania, co ma szczególne znaczenie w zagadnieniach przestrzennych. Dzięki temu programy komputerowe oparte na tej metodzie zajmują na ogół mniej miejsca w pamięci maszyny cyfrowej niż programy oparte na metodzie elementów skończonych, a wyraźne zmniejszenie ilości wprowadzonych danych, odnoszących się wyłącznie do

brzegu ciała przy braku sił masowych, znacznie ułatwia ich eksploatację. Oryginalny dorobek przystosowania MEB do rozwiązywania dwuwymiarowych zagadnień kontaktu wniosła praca Anderssona [7]. Możliwość wykorzystania MEB do analizy kontaktu rozpatruje także Witkowski [8], traktując jednak MEB tylko jako narzędzie służące do określenia podatności ciała. Tymczasem MEB wnosi nowej jakości w formułowaniu zagadnienia kontaktu, co zostanie poniżej zaprezentowane.

2. Podstawowe założenia

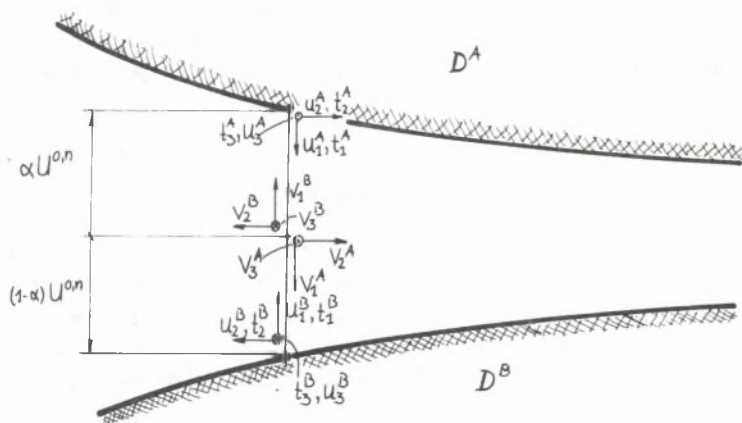
Rozważmy dwa liniowo-sprężyste ciała zajmujące odpowiednio obszary D^A i D^B ograniczone powierzchniami S^A i S^B . Niech ciała te pod wpływem czynników zewnętrznych podlegają zbliżeniu. Skutki tego zbliżenia obserwować będziemy od położenia ciał odpowiadających ich zetknięciu; stan ten nazwiemy chwilą początkową. Od tego momentu wraz ze wzrostem obciążenia wzrastać będzie pole powierzchni, na której oba ciała się stykają. Powierzchnię tę oznaczymy przez S_C (rys. 1). Jej położenie jest na razie nie znane. Można jedynie w chwili początkowej wyróżnić na brzegach obu ciał zbiory S_C^A i S_C^B , których pewna część w następnych chwilach wejdzie w kontakt.



Rys. 1

Wprowadźmy następnie na powierzchniach obu ciał lokalne ortonormalne układy współrzędnych ξ_1^A i ξ_1^B w ten sposób, aby osie ξ_1^A i ξ_1^B miały kierunek normalnych do brzegów, odpowiednio S^A i S^B . Ponieważ będziemy stosować metodę przyrostową, więc przyrosty obciążeń zewnętrznych $\Delta t_i^{K,n}$ ($K=A,B$; $i=1,2,3$) generować będą w obu ciałach odpowiednie przyrosty przemieszczeń $\Delta u_i^{K,n}$ ($K=A,B$); wskaźnik n oznacza n -ty przyrost obciążenia. Inaczej postąpimy ze wszystkimi wielkościami na powierzchniach S_C^A i S_C^B , czyli w spodziewanej strefie kontaktu. Tutaj bowiem, przy analizie rozwoju kontaktu nie-

zbędne będzie porównywanie przemieszczeń i sił na powierzchniach obu ciał. Konieczny jest zatem w tej strefie wspólny lokalny układ współrzędnych. Wprowadzimy go tak jak na rys. 2.



Rys. 2

Parametr α przedstawiony na rys. 2 wskazuje miejsce zaczepienia nowego układu współrzędnych (α zadawane jest a priori, np. 0, 0.5, 1), natomiast $U^{0,n}$ jest odległością między powierzchniami obu ciał w n -tym kroku obciążenia. W nowych układach współrzędnych zdefiniujemy nowe przyrosty przemieszczeń w sposób następujący:

$$\Delta v_1^{A,n} = \Delta u_1^{A,n} - \alpha U^{0,n-1}$$

$$\Delta v_1^{B,n} = \Delta u_1^{B,n} - (1 - \alpha) U^{0,n-1} \quad (1)$$

$$\Delta v_1^{K,n} = \Delta u_1^{K,n}; \quad K = A, B; \quad i = 2, 3.$$

W interpretacji fizycznej składowe $\Delta v_1^{K,n}$ oznaczają odległości, jakie muszą przebyć punkty brzegowe, aby osiągnąć punkt zaczepienia układu współrzędnych (nowego układu).

Całkowitą wartość przemieszczeń i sił określimy następująco:

$$u_1^{K,n} = \Delta u_1^{K,n} + u_1^{K,n-1}$$

(2)

$$t_1^{K,n} = \Delta t_1^{K,n} + t_1^{K,n-1}; \quad K = A, B; \quad i = 1, 2, 3.$$

Oczywiście wzór ten może być zastosowany jedynie wówczas, gdy rozpatrywane ciało jest ciałem Clapeyrona. Tak niestety nie jest, bowiem z samej istoty zagadnienia wynika, że podczas obciążenia tworzą się nowe więzy ograniczające odkształcalność ciała. Trudność tę można ominąć, gdy zastosujemy dla obu ciał modele dyskretne. Istotnie, jeżeli pokryjemy powierzchnię S_C^A i S_C^B płaskimi elementami brzegowymi, wówczas będą istniały takie przyrosty obciążeń, przy których przejście do nowego stanu odbywać się będzie przy niezmiennych warunkach kontaktu. Problem znalezienia odpowiednich przyrostów zewnętrznych obciążeń przedstawiony zostanie dalej.

3. Tarcie między powierzchniami kontaktu

Jeżeli założyć, że w pewnych strefach powierzchni styku obu ciał występuje poślizg, to chcąc uwzględnić to zjawisko, należy wiedzieć, jak zmieniają się siły styczne wraz ze zmianą obciążenia. Najprostszym sposobem uwzględnienia tarcia jest przyjęcie modelu Coulomba, w którym siły styczne t związane są ze współczynnikiem tarcia μ i siłą normalną t_1 , następująco:

$$t_{\tau} = \mu \cdot t_1, \quad t_{\xi} = [(t_2)^2 + (t_3)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad \mu = \text{const.} \quad (3)$$

Przyjęcie do obliczeń powyższego wzoru może jednak prowadzić do mało dokładnych wyników. Z badań trybologicznych wiadomo bowiem, że współczynnik tarcia zależy między innymi od wartości nacisku, geometrii powierzchni, własności fizykochemicznych materiału i innych (por. [9]). Przyjmijmy za pracę [3] następujący związek na współczynnik tarcia:

$$\mu(v_{\xi}, h) = \mu_g \left[1 - \frac{\mu_0}{\mu_g} \exp(-hv_{\xi}) \right], \quad (4)$$

gdzie:

v_{ξ} - względny poślizg obu powierzchni.

Po n -krokach obciążenia V^n można obliczyć ze wzoru:

$$V_{\xi}^n = \left[(U_2^{A,n} + U_2^{B,n})^2 + (U_3^{A,n} + U_3^{B,n})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

We wzorze (4) liczba tarcia zależy bezpośrednio od współczynnika twardości h , stykających się powierzchni i od ich względnego poślizgu. Uwzględnione są zatem pewne własności mechaniczne ciał oraz nacisk. Gdy wartości

początkowego (μ_0) i granicznego (μ_g) współczynnika tarcia są sobie równe, otrzymujemy model Coulomba.

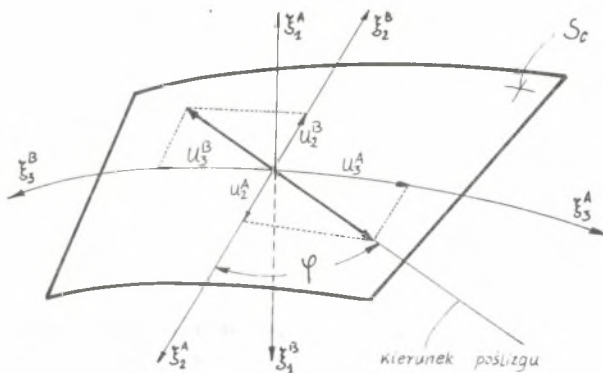
Ponieważ μ zmienia się w sposób ciągły wraz z obciążeniem, więc fakt ten powinien być uwzględniony w obliczaniu przyrostów sił stycznych. Przyjmujemy, że siły styczne związane są z normalnymi naciskami następującymi zależnościami:

$$t_i = \mu_i t_{1i} \quad i=1,2,3; \quad (6)$$

gdzie:

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = \mu \cos \varphi, \mu_3 = \mu \sin \varphi.$$

Parametr φ (rys. 3) określa kierunek wypadkowej siły stycznej i wyznaczany będzie w sposób przedstawiony poniżej.



Rys. 3

Założmy, że po n -krokach obciążania na części powierzchni S_c występuje poślizg. Wówczas w $n+1$ kroku przyjmujemy, że kierunek siły tarcia jest taki sam jak siły stycznej do powierzchni w n -tym kroku.

Przyjmujemy, że:

$$\cos \varphi = t_2^n / t_0^n$$

$$\sin \varphi = t_3^n / t_0^n$$

(7)

W każdym następnym kroku, np. w $n+2$, przyjmiemy, że kierunek siły tarcia pokrywa się z kierunkiem poślizgu, tj.:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= - (u_2^{A,n+1} + u_2^{B,n+1}) / v_c^{n+1} \\ \sin \varphi &= - (u_3^{A,n+1} + u_3^{B,n+1}) / v_c^{n+1}.\end{aligned}\quad (8)$$

Znak minus we wzorach (8) oznacza, że zwroty sił tarcia mają być przeciwne do względnego poślizgu.

Przyrosty sił stycznych wyrazimy następująco:

$$\Delta t_1^n = \Delta t_1^{\mu,n} + \mu_1^{n-1} \Delta t_1^n; \quad i=1,2,3, \quad (9)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\Delta t_1^{\mu,n} &= \Delta \mu_1^{n,n} t_1^n, \\ \Delta \mu_1^n &= \mu_1^{n-1} - \mu_1^{n-2}, \\ \mu_1^n &= \mu_1 (v_c^n, h).\end{aligned}$$

W powyższych zależnościach przyrosty współczynnika tarcia określono na podstawie poprzedniego kroku obciążenia. Obliczenie tego przyrostu dla tego samego kroku wymagałoby wprowadzenia dodatkowej procedury iteracyjnej, co w znacznym stopniu wydłużyłoby obliczenia. Należy nadmienić, że w zagadnieniach dwuwymiarowych uproszczenie to nie wpływało na poprawność wyników (por. [7]).

4. Brzegowe warunki kontaktu

Przyjmijmy, że na tych częściach powierzchni S_c^A i S_c^B , dla których $U^{0,n} = 0$, a więc tam, gdzie zachodzi kontakt, można wyróżnić dwie strefy: adhezyjną S_{ca}^A i S_{ca}^B oraz poślizgu S_{cs}^A i S_{cs}^B . Oczywiście, $S_c^K \supset S_{ca}^K \cup S_{cs}^K$ i $S_{ca}^K \cap S_{cs}^K = \emptyset$, $K=A,B$.

Aby kontakt mógł się rozwijać poprawnie, należy założyć pewne więzy geometryczne i fizyczne ograniczające dowolną deformację ciał. Więzy geometryczne narzucają wymóg, aby wartości przemieszczeń normalnych, punktów będących w kontakcie były przeciwne. To samo dotyczy przemieszczeń stycznych

w strefie adhezyjnej. Jest to zatem wymóg zgodności przemieszczeń. Więzy fizyczne narzucają ograniczenia, aby w strefie poślizgu siły styczne były związane z normalnymi prawem tarcia, natomiast same siły normalne były ujemne. Powyższe ograniczenia zapiszemy w postaci następujących brzegowych warunków kontaktu:

$$S_{C_a}^K \cup S_{C_s}^K : \Delta v_1^A + \Delta v_2^B = 0, \quad \Delta t_1^A - \Delta t_1^B = 0,$$

$$t_1^K < 0, \quad i=1,2,3,$$

(10)

$$S_{C_a}^K : \Delta v_i^A + \Delta v_i^B = 0, \quad i=2,3,$$

$$S_{C_s}^K : \Delta t_1^K = \Delta t_1^A + \mu_1 \Delta t_1^B; \quad i=1,2,3, \quad K=A,B.$$

5. Brzegowe równania całkowe zagadnienia kontaktu

Dla każdego z ciał znajdującego się w kontakcie można ułożyć odpowiednie brzegowe równanie całkowe (por. [5]), które zapiszemy w następującej postaci przyrostowej:

$$\int_{S^K} H_{ij}^K(x,y) \Delta u_j^K(y) dS^K(y) = \int_{S^K} U_{ij}(x,y) \Delta t_j^K(y) dS^K(y) \quad (11)$$

gdzie:

$$(x,y) \in S^K, \quad K = A,B,$$

$$H_{ij}^K(x,y) = T_{ij}^K(x,y) + \frac{1}{2} \delta(x-y) \delta_{ij}. \quad (12)$$

$\delta(x-y)$ - jest deltą Diraca, δ_{ij} - jest deltą Kroneckera. Ponadto T_{ij}^K i U_{ij}^K są rozwiązaniami podstawowymi równań przemieszczeniowych teorii sprężystości (por. [6]) przetransponowanymi do lokalnych układów współrzędnych ξ_1^K .

Uwzględniając teraz w równaniach (11) brzegowe warunki kontaktu (10) oraz zależności (1) i (9), oraz po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\Delta v_1^A = -\Delta v_1^B = \Delta v_1, \quad \Delta t_1^A = \Delta t_1^B = \Delta t_1 \text{ na } S_{c_a}^K \cup S_{c_s}^K, \quad i=1,2,3, \quad (13)$$

$$\Delta v_i^A = -\Delta v_i^B = \Delta v_i \quad \text{na } S_{c_s}^K, \quad i=1,2, \quad K = A,B,$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \int_{S^A \setminus S_c^A} H_{ij}^A \Delta u_j^A \, dS + \int_{S_{c_a}^A} H_{ij}^A \Delta v_j \, dS + \int_{S_{c_s}^A} (H_{11}^A \Delta v_1 + H_{12}^A \Delta v_2 + H_{13}^A \Delta v_3) \, dS = \\ & = \int_{S^A \setminus S_c^A} U_{ij}^A \Delta t_j^A \, dS + \int_{S_{c_a}^A} U_{ij}^A \Delta t_j \, dS + \int_{S_{c_s}^A} U_{ik}^A \mu_k^{n-1} \Delta t_1 \, dS - \\ & - \int_{S_c^A} \alpha H_{11}^A u^{0,n-1} \, dS + \int_{S_{c_s}^A} U_{ik}^A \Delta t_k^{\mu,n} \, dS, \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} & \int_{S^B \setminus S_c^B} H_{ij}^B \Delta u_j^B \, dS - \int_{S_{c_a}^B} H_{ij}^B \Delta v_j \, dS + \int_{S_{c_s}^B} (-H_{11}^B \Delta v_1 + H_{12}^B \Delta v_2 + H_{13}^B \Delta v_3) \, dS = \\ & = \int_{S^B \setminus S_c^B} U_{ij}^B \Delta t_j^B \, dS + \int_{S_{c_a}^B} U_{ij}^B \Delta t_j \, dS + \int_{S_{c_s}^B} U_{ik}^B \mu_k^{n-1} \Delta t_1 \, dS - \\ & - \int_{S_c^B} (1-\alpha) H_{11}^B u^{0,n-1} \, dS + \int_{S_{c_s}^B} U_{ik}^B \Delta t_k^{\mu,n} \, dS. \end{aligned} \quad (14b)$$

Równania (14a) i (14b) tworzą układ sześciu brzegowych równań całkowych zagadnienia kontaktu.

Pokryjmy obecnie powierzchnie S^A i S^B elementami brzegowymi. Problem ten został szeroko omówiony w pracach [5, 6]. Jak tam pokazano, do dyspozycji mamy dużą ilość rozmaitego kształtu elementów brzegowych i związanych z nimi funkcji kształtu. Niestety, nie wszystkie mogą być wykorzystane przy rozpatrywaniu zagadnienia kontaktu. Poważnym ograniczeniem jest żądanie, aby

$$\{Y\} = \left\{ \begin{array}{l} -\alpha H_1^A u^{0,n-1} + U^A \Delta t_k^n \\ - (1-\alpha) H_1^B u^{0,n-1} + U_k^B \Delta t_k^n \end{array} \right\}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} U^A & 0 \\ 0 & U^B \end{bmatrix}, \quad \{\Delta T\} = \begin{bmatrix} \Delta t^A \\ \Delta t^B \end{bmatrix}$$

przy czym Δt^A i Δt^B są kolumnami znanych wartości sił zewnętrznych w węzłach.

Jeżeli powierzchnia kontaktu, a ściślej strefy: adhezyjna i poślizgu nie będą się zmieniały podczas przyrostu obciążenia, to wzięwszy pod uwagę fakt, że oba ciała są liniowo sprężyste, można stosować zasadę superpozycji. Tak więc, zamiast rozwiązywać układ równań (16), można rozpatrywać dwa poniższe układy:

$$[G] \{X_1\} = \{Y\} \quad (17)$$

$$[G] \{X_2\} = [U] \{\Delta T\}. \quad (18)$$

przy czym rozwiązanie zagadnienia będzie sumą rozwiązań $\{X\} = \{X_1\} + \{X_2\}$. Układy równań (17), (18) rozwiązywane będą w sposób przedstawiony poniżej. Najpierw, powiedzmy w n-tym kroku obliczeń, rozwiążemy układ (17), którego prawa strona zależy od odległości ($u^{0,n-1}$) między węzłami powierzchni mających wejść w kontakt oraz od residualnych sił stycznych powstałych w wyniku uwzględnienia zmian liczby tarcia. W wyniku tego otrzymamy po uwzględnieniu (13) i (1) następujące wielkości na powierzchni kontaktu: $\Delta u_1^{K,n}$, $\Delta t_1^{K,n}$ ($i=1,2,3$; $K=A,B$).

Następnie rozwiązujemy układ (18) w następującej postaci:

$$[G] \beta \{X_2\} = [U] \beta \{\Delta T\} \quad (19)$$

gdzie przez $\{\Delta T\}$ oznaczono dowolny przyrost obciążenia zewnętrznego (dalej przyrost ten będziemy nazywać próbnym przyrostem obciążenia). W wyniku tego otrzymamy wielkości $\beta \Delta u_1^{T,K,n}$ oraz $\beta \Delta t_1^{T,K,n}$.

Całkowita wartość przyrostów sił i przemieszczeń będzie równa:

$$\Delta u_1^{K,n} = \Delta^0 u_1^{K,n} + \beta \Delta^T u_1^{K,n} \quad (20)$$

$$\Delta t_1^{K,n} = \Delta^0 t_1^{K,n} + \beta \Delta^T t_1^{K,n}$$

Należy teraz dobrać współczynnik skalowania β , tzn. tak dobrać przyrost sił zewnętrznych, aby warunki kontaktu pozostały niezmienione. Zaistnieć mogą trzy przypadki:

- a) dobieramy współczynnik β tak, aby najmniejsza z różnych od zera odległości $u^{0,n}$ była równa zero. Odpowiada to takiemu obciążeniu, przy którym kolejny element brzegowy wchodzi w kontakt. Korzystając z zależności (1), (20) otrzymamy:

$$\beta = \frac{u^{0,n-1} - \sum_{K=A,B} \Delta^0 u_1^{K,n}}{\Delta^T u_1^{A,n} + \Delta^T u_1^{B,n}}; \quad (21)$$

- b) po obciążeniu układu próbnym przyrostem sił okazało się, że normalne siły powierzchniowe w pewnym elemencie będącym poprzednio w kontakcie są większe od zera. Należy więc zmniejszyć $\{\Delta T\}$ tak, aby siły normalne były równe zero.

Z równań (2), (20) otrzymamy:

$$\beta = - \frac{t_1^{K,n-1} + \Delta^0 t_1^{K,n}}{\Delta^T t_1^{K,n}} \quad (22)$$

Oczywiście, w następnym kroku zakładamy, że elementy te już nie są w kontakcie;

- c) po obciążeniu układu próbnym przyrostem obciążenia okazało się, że w pewnym elemencie wypadkowa siła styczna jest większa od siły tarcia, tzn. $t_2 > \mu t_1^n$.

Należy więc zmniejszyć obciążenie tak, aby $t_2 = \mu t_1^n$. Uwzględniając zależności (3), (20), (2) otrzymamy równanie kwadratowe ze względu na β :

$$\begin{aligned} \beta^2 [(\Delta^T t_2^n)^2 + (\Delta^T t_3^n)^2] + 2\beta [(\Delta^0 t_2^n + t_2^{n-1}) \Delta^T t_2^n + \\ + (\Delta^0 t_3^n + t_3^{n-1}) \Delta^T t_3^n] + (\Delta^0 t_2^n + t_2^{n-1})^2 + \\ + (\Delta^0 t_3^n + t_3^{n-1})^2 - (\mu t_1^n)^2 = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Oczywiście, w następnym kroku obciążenia przyjmujemy, że na tym elemencie występuje poślizg.

6. Uwagi końcowe i wnioski

W niniejszej pracy przedstawiono metodę numeryczną analizy statycznej niehertzowskiego przestrzennego kontaktu dwóch ciał liniowo-sprężystych. Rozwiązanie zagadnienia otrzymano poprzez utworzenie układu brzegowych równań całkowych w formie przyrostowej, który uwzględni jednocześnie więzy geometryczne i fizyczne kontaktu. Dyskretyzacja ciał elementami brzegowymi prowadzi do układu równań algebraicznych, które są rozwiązywane sukcesywnie w miarę rozwoju kontaktu. Technika elementów brzegowych jest wyjątkowo dogodną i naturalną metodą rozwiązywania zagadnienia kontaktu. W całym procesie analizy posługujemy się bowiem wielkościami (przemieszczenia, siły) określonymi wyłącznie na brzegu ciała, a więc także na powierzchni styku. Wymaga to przygotowania i wprowadzenia do komputera znacznie mniejszej ilości danych dotyczących geometrii ciał niż w razie zastosowania innych znanych metod numerycznych. Ma to szczególne znaczenie przy rozwiązywaniu zagadnień przestrzennych. Z tego powodu przedstawiony sposób rozwiązania zagadnienia kontaktu ma z jednej strony ważne znaczenie praktyczne [11], z drugiej zaś umożliwia analizę nowych i ciekawych problemów mechaniki ciał odkształcalnych.

LITERATURA

- [1] Chan S.H., Tuba I.S.: A finite element method for contact problems of solid bodies. *Int. J. of Mech. Science*, 13, 1971.
- [2] Schäfer H.: A contribution to the solution of contact problems with the aid of bond elements. *Comp. Meth. in Appl. and Eng.*, 6, 1975.
- [3] Fredriksson B.: On elastostatic contact problems with friction. A finite element analysis. *Linköping Studies in Science and Technology, Dissertations*, 6, 1976.
- [4] Oden J.T., Pires E.B.: Numerical analysis of certain contact problems in elasticity with non-classical friction laws. *Comp. and Struct.*, 16, 3, 1983.
- [5] Brebbia C.A., Walker S.: *Boundary element techniques in Engineering*. News-Butterworths, London 1980.
- [6] Bangerjee P.K., Butterfield R.: *Boundary element methods in Engineering science*. Mc Graw Hill, London 1981.
- [7] Andersson T.: Boundary elements in two-dimensional contact and friction. *Linköping Studies in Science and Technology, Dissertations*, 85, 1983.
- [8] Witkowski J.: Zagadnienia kontaktu ciał odkształcalnych. *Prace naukowe, Mechanika z. 53*, Wyd. Pol. Warszawskiej, Warszawa 1978.
- [9] Pytko S.: *Problemy wytrzymałości kontaktowej*. PWN, Warszawa 1982.
- [10] Backlund J., Aronsson G.G.: Effects of geometrical incompatibilities on stress intensity factors calculated by the finite element method. *Proc. First Int. Con. on Numerical Meth. in Fracture Mech.* (eds. A.R. Luxmore and D.R. Owen), Swansea 9-13 Jan. 1978.

- [11] Bąk R., Burczyński T., Adamczyk T.: Zagadnienie kontaktu w mechanice kolejowego zestawu kołowego w ujęciu metody brzegowych równań całkowych. Prace naukowo-badawcze Instytutu Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Pol. Śląskiej, Problem węzłowy PAN 05.12, zad. 2.3 tematu: Racjonalne projektowanie kolejowych zestawów kołowych. Gliwice 1983.

Wpłynęło do Redakcji 17.10.85

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Józef NIZIOŁ

МЕТОД КРАЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАССМАТРИВАНИИ
ПРОСТРАНСТВЕННОГО КОНТАКТА С ТРЕНИЕМ

Р е з ю м е

В работе рассмотрена проблема пространственного статического контроля двух линейно-упругих тел по методу краевых элементов. Сформулированы краевые интегральные уравнения для обоих тел в форме приращений. В районе контакта выделены зоны адгезионная и скольжения. Принята модель трения, учитывающая физикохимические свойства материалов а также относительные скольжение обоих контактирующих поверхностей. На приращения перемещений и поверхностных сил наложены геометрические и физические связи от контакта. Учитывая краевые условия контактирования, получена система шести примечательных интегральных уравнений. После дискретизации поверхности тел краевыми элементами и аппроксимации приращений перемещений и поверхностных сил при помощи функции формы и узловых значений, получена система алгебраических уравнений для неизвестных узловых приращений перемещений и узловых поверхностных сил. Решая эту систему для каждого шага приращения нагрузки, можно анализировать дискретное развитие контакта. Оговорен метод подбора приращений нагрузки из вне таким образом, чтобы условия контактирования обоих соприкасающихся тел остались неизменными.

THE BOUNDARY ELEMENT METHOD IN THREE-DIMENSIONAL CONTACT
PROBLEMS WITH FRICTION

S u m m a r y

This paper presents the three-dimensional static contact for linear elastic bodies in terms of the boundary element method. Boundary integral equations in the incremental form are formulated. In the contact zone the adhesion and slip regions are separated. The assumed friction model takes into account physical and chemical properties and the relative slip of both contact surfaces. Increments of displacements and tractions fulfil geometrical and physical constraints. Taking into consideration boundary contact

conditions the system of six singular integral equations is obtained. Surfaces are discretized into boundary elements and increments of displacements and tractions are approximated by means of shape functions and nodal values. As a result the system of algebraic equation with respect to unknown increments of displacements and tractions is obtained. This system is solved for each load increments and enables to analyze a discrete evaluation of the contact process. The way of the choice of such increments of external loads which contact conditions might be invariant is described.