ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986
Seria: MECHANIKA z. 83 Nr kol. 879

Tadeusz BURCZYŃSKI
Antoni JOHN

ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH DO ZADAŃ BRZEGOWYCH TEORII LEPKOSPRĘŻYSTOŚCI

Streszczenie. W pracy sformułowano zagadnienie brzegowe teorii lepkosprężystości za pomocą metody elementów brzegowych. Brzegowe równania całkowe zostały wyprowadzone z zasady Bettiego przy wykorzystaniu analogii sprężysto-lepkosprężystej. W przypadku gdy rozważane są punkty brzegowe ośrodka lepkosprężystego, otrzymane równania tworzą układ brzegowych osobliwych równań całkowych względem nieznanych transformat Laplace'a przemieszczeń i sił powierzchniowych, natomiast gdy rozważa się punkty wewnętrzne ośrodka, otrzymuje się zależność będącą uogólnieniem wzoru Somigliany na zagadnienia lepkosprężystości. Brzegowe równania całkowe lepkosprężystości rozwiązuje się techniką elementów brzegowych. Brzeg ciała aproksymuje się elementami brzegowymi. Transformaty przemieszczeń i sił powierzchniowych aproksymuje się za pomocą funkcji kształtu i wartości węzłowych. W rezultacie otrzymuje się układ równań algebraicznych, który rozwiązuje się dla ciągu wartości parametru przekształcenia Laplace'a względem transformat nieznanych przemieszczeń i sił węzłowych. Następnie przeprowadza się transformatę odwrotną. Jako szczególny przypadek rozpatrzono jednowymiarowe układy lepkosprężyste.

1. Wprowadzenie

Metoda elementów brzegowych (zwana także metodą brzegowych równań całkowych) znajduje w ostatnich latach coraz szersze zastosowanie do rozwiązywania zagadnień brzegowych mechaniki [1, 2]. Metoda ta posiada szereg potencjalnych zalet i bywa z powodzeniem stosowana do tych zagadnień mechaniki, w których metoda elementów skończonych znalazła powszechne uznanie. Główną zaletą metody elementów brzegowych jest to, że liczba niewiadomych, a tym samym powstały w końcowym rezultacie układ równań algebraicznych, zależą tylko od dyskretyzacji brzegu ciała, w przeciwieństwie do metody elementów skończonych, w której dyskretyzacji podlega cały obszar zajmowany przez rozpatrywany układ. Dzięki tej zalecie metoda elementów brzegowych stała się alternatywną techniką numeryczną w stosunku do stosowanych do tej pory metod komputerowych mechaniki. Metoda elementów brzegowych z powodzeniem jest stosowana do rozwiązywania zagadnień brzegowych mechaniki ośrodków ciągłych, w których równania konstytutywne ośrodka nie zależą od czasu. Okazuje się jednak, że właściwości wielu tworzyw są takie, iż do ich opisu należy przyjąć równanie stanu zależne od czasu. Metoda elementów brzegowych nie znalazła na razie szerszego zastosowania do tej klasy problemów. Istnie-

je tylko kilka prac poświęconych zastosowaniu tej metody do liniowych zagadnień lepkosprężystości [3,2,4,5] oraz lepkoplastyczności [6].

W niniejszej pracy zaprezentowano sposób formułowania zagadnień brzegowo-początkowych teorii lepkosprężystości w ujęciu metody elementów brzegowych. Przedstawiono sposób rozwiązania zagadnienia w dziedzinie transformat Laplace'a oraz zastosowanie metody do jednowymiarowych układów lepkosprężystych.

2. Sformułowanie zadania brzegowo-początkowego lepkosprężystości

Weźmy pod uwagę ciało o objętości D i gładkiej powierzchni S. Niech na powierzchni S_1 zadane będą przemieszczenia, a na S_2 obciążenia (przy czym zachodzi $S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$).

Równania równowagi wewnętrznej dla zagadnień dynamicznych mają postać:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{1}$$

lub dla zagadnień quasi-statycznych, gdy pominięto człony inercyjne:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \tag{2}$$

Analizować będziemy teorię liniową geometrycznie, wtedy:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{3}$$

W przypadku zagadnień lepkosprężystych równania konstytutywne możemy zapisać w postaci splotu:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= 2\, G_1(t) * de_{ij} \\ \sigma_{kk} &= 3\, G_2(t) * d\varepsilon_{kk} \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie:

S_{ij} - dewiator stanu naprężenia,

$_{kk}$ - tensor kulisty stanu naprężenia,

e_{ij} - dewiator stanu odkształcenia,

σ_{kk} - tensor kulisty stanu odkształcenia,

natomiast $G_1(t)$ i $G_2(t)$ są odpowiednio funkcjami relaksacji dla ścinania i wszechstronnego ściskania (por. [7,8]).

Warunki brzegowe określimy następująco:

$$u_i = w_i \quad \text{na} \quad S_1 \times T \quad T = \{t : t \geq 0\}$$
$$t_i = g_i \quad \text{na} \quad S_2 \times T \tag{5}$$

Warunki początkowe mają postać:

$$u_{i/t=0} = g_i \qquad \left.\frac{\partial u_i}{\partial t}\right/_{t=0} = h_i \tag{6}$$

Dokonując transformacji Laplace'a równań od (1) do (4), a następnie uwzględniając w warunkach równowagi równania konstytutywne oraz związki między odkształceniami i przemieszczeniami, otrzymujemy ostatecznie:

- dla zagadnień dynamicznych lepkosprężystości:

$$(\bar{\lambda} + \bar{\mu})\, \bar{u}_{j,ij} + \bar{\mu}\, u_{i,jj} + \bar{X}_i^* = \varrho s^2 u_i \tag{7}$$

- oraz dla zagadnień quasistatycznych lepkosprężystości:

$$(\bar{\lambda} + \bar{\mu})\, \bar{u}_{j,ij} + \bar{\mu}\, u_{i,jj} + \bar{X}_i^* = 0 \tag{8}$$

gdzie:

$$\bar{\mu} = s\,\bar{G}_1, \qquad \bar{\lambda} = -\frac{2}{3}\, s\,\bar{G}_1 + s\,\bar{G}_2, \tag{9}$$

$$\bar{X}_i^* = \bar{X}_i + \varrho\left[s g_i + h_i\right]. \tag{10}$$

Równania (7) i (8) mają postać analogiczną do równań Naviera w elastodynamice i elastostatyce.

3. Brzegowe równanie całkowe lepkosprężystości

Podstawę do rozważań stanowią równania (7) i (8). Wykorzystując analogię sprężysto-lepkosprężystą, brzegowe równania całkowe lepkosprężystości wyprowadzamy z zasady Bettiego:

$$\int_D \left[\bar{X}_i^*(x,s)\,\bar{u}_i'(x,s) - \bar{X}_i^*(x,s)\,\bar{u}_i(x,s)\right] dD(x) + \tag{11}$$

$$+ \int_S \left[\bar{t}_i(x,s)\,\bar{u}_i'(x,s) - \bar{t}_i'(x,s)\,\bar{u}_i(x,s)\right] dS(x) = 0$$

Zakładając:

$$\bar{u}_i'(x,s) = \bar{U}_{ik}(x,y,s), \tag{12}$$

$$\bar{t}_i'(x,s) = \bar{T}_{ik}(x,y,s). \tag{13}$$

gdzie: $\bar{U}_{ik}(x,y,s)$ są rozwiązaniami podstawowymi następujących równań:

$$(\bar{\lambda} + \bar{\mu})\,\bar{U}_{ik,ij} + \bar{\mu}\,\bar{U}_{ik,jj} - \varrho s^2 \bar{U}_{ik} + \delta_{ik}\,\delta(x-y) = 0 \tag{14}$$

dla zagadnień dynamicznych lepkosprężystości oraz

$$(\bar{\lambda} + \bar{\mu})\,\bar{U}_{ik,ij} + \bar{\mu}\,\bar{U}_{ik,jj} + \delta_{ik}\,\delta(x-y) = 0 \tag{15}$$

dla zagadnień quasi-statycznych lepkosprężystości.

Rozwiązania podstawowe U_{ik} wyrażają się następującymi zależnościami:

- dla przestrzennych zagadnień dynamicznych:

$$\bar{U}_{ik} = \frac{1}{4\pi \bar{C}_2^2}\left[\delta_{ik}\frac{\exp(-sr/\bar{C}_2)}{r} + \frac{C_2^2}{s^2}\left(\frac{\exp(-sr/C_1)-\exp(-sr/\bar{C}_2)}{r}\right)_{ik}\right]$$

gdzie:

$$\bar{C}_1^2 = \frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\varrho}, \qquad \bar{C}_2^2 = \frac{\bar{\mu}}{\varrho} \tag{17}$$

- dla przestrzennych zagadnień quasi-statycznych:

$$\bar{U}_{ik} = \frac{1}{16\pi\bar{\mu}(1-\bar{\nu})}\left(\frac{1}{r}\right)\left[(3-4\bar{\nu})\,\delta_{ik} + r_{,i}\,r_{,k}\right], \tag{18}$$

przy czym w powyższych zależnościach przez r oznaczono odległość między punktami x i y, tzn.:

$$r = \sqrt{(x_i-y_i)(x_i-y_i)}$$

Tensor $\bar{T}_{ik}$ określa naprężenia w kierunku dowolnego wektora jednostkowego $n = n_i$ i określany jest wzorem:

$$\bar{T}_{ik} = \bar{F}_{ij} \cdot \bar{U}_{jk} \tag{19}$$

gdzie:

$$\bar{F}_{ij} = \bar{\lambda} n_i \frac{\partial}{\partial x_j} + \bar{\mu} n_j \frac{\partial}{\partial x_i} + \bar{\mu}\,\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial n} \tag{20}$$

Wstawiając (12) i (13) do (11) oraz uwzględniając, że $\bar{X}_i^* = \delta_{ik}\delta(x-y)$, otrzymujemy po przekształceniach:

$$C_{ik}(y)\,\bar{u}_k(y,s) + \int_S \bar{T}_{ik}(x,y,s)\,\bar{u}_i(x,s)\,dS(x) = \int_S \bar{U}_{ik}(x,y,s)\,\bar{t}_i(x,s)\,dS(x) + \bar{\Omega}_k(y,s), \tag{21}$$

gdzie:

$$\bar{\Omega}_k(y,s) = \int_D \bar{U}_{ik}(x,y,s)\,\bar{X}_i^*(x,s)\,d\,D(x),$$

$$C_{ik}(y) = \begin{cases} \delta_{ik} & \text{dla} \quad y \in D \\ 0{,}5\,\delta_{ik} & \text{dla} \quad y \in S \\ 0 & \text{dla} \quad y \notin D \cup S \end{cases} \tag{23}$$

Zależność (21), w przypadku gdy $y \in S$, jest układem brzegowych osobliwych równań całkowych względem nieznanych transformat przemieszczeń $\bar{u}_i(x,s)$ na brzegu S_2 $(x \in S_2)$ oraz nieznanych transformat sił powierzchniowych $\bar{t}_i$ (x,s) na brzegu S_1 $(x \in S_1)$. W tym przypadku ze względu na osobliwość jąder całki brzegowe w równaniu (21) należy rozumieć w sensie wartości głównych Cauchy'ego. W przypadku gdy $y \in D$, zależność (21) jest uogólnieniem wzoru Somigliany na zagadnienia lepkosprężystości.

4. Dyskretyzacja brzegowego równania całkowego lepkosprężystości elementami brzegowymi

Brzegowe równania całkowe lepkosprężystości (21) rozwiązać można efektywnie techniką elementów brzegowych. W tym celu brzeg ciała lepkosprężystego aproksymuje się elementami brzegowymi S^e w sposób następujący:

$$S = \sum_e S^e \tag{24}$$

W obrębie każdego elementu geometrię oraz transformaty przemieszczeń i sił powierzchniowych aproksymuje się przez wartości węzłowe oraz funkcje interpolacyjne (kształtu) $M^m(\xi)$ i $N^w(\xi)$ w sposób następujący:

$$\begin{aligned} x_i^e(\xi) &= M^m(\xi)\, x_i^{em} \\ \bar{u}_i^e(\xi,s) &= N^w(\xi)\, \bar{u}_i^{ew}(s) \\ \bar{t}_i^e(\xi,s) &= N^w(\xi)\, \bar{t}_i^{ew}(s) \end{aligned} \tag{25}$$

gdzie: $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [-1, 1]$ współrzędne lokalne dla elementu brzegowego, natomiast m i w węzły elementu brzegowego. Jądra $\bar{T}_{ik}(x,y,s)$ i $\bar{U}_{ik}(x,y,s)$ są także funkcją ξ, gdyż $y = y(\xi)$.
Przy numerycznym całkowaniu jąder elementy brzegowe transformowane są do współrzędnych lokalnych przez zastosowanie jakobianu:

$$J^e(\xi) = \frac{dS^e}{d\xi} = |d_1^e \times d_2^e| \tag{26}$$

gdzie:

$$d_i^e = \frac{\partial M^m(\xi)}{\partial \xi_i}\, x^{em}$$

Po uwzględnieniu (24), (25) oraz (26) równanie całkowe (21) przyjmuje postać:

$$c_{ik}(y)\,\bar{U}_k\,(y,s) + \bar{a}^{ew}_{ik}\,(y,s)\,\bar{u}_i\,(s) = \bar{b}^{ew}_{ik}\,(y,s)\,\bar{t}^{ew}_i\,(s) + \\ +\bar{\Omega}_k\,(y,s) \tag{27}$$

gdzie:

$$\bar{a}^{ew}_{ik}\,(y,s) = \int\limits_{S^e} \bar{T}_{ik}\,(x(\xi),\,y,s)\,N^w(\xi)\,J^e(\xi)\,d\xi,$$

$$\bar{b}^{ew}_{ik}\,(y,s) = \int\limits_{S^e} \bar{U}\,(x(\xi),\,y,s)\,N^w(\xi)\,J^e(\xi)\,d\xi.$$

Ponieważ przy dyskretyzacji brzegowego równania całkowego stawiamy warunek, aby spełnione było ono we wszystkich punktach węzłowych, więc równanie (27) zapisać można w postaci macierzowej następująco:

$$\left[\bar{A}\,(s)\right]\left\{\bar{u}\,(s)\right\} = \left[\bar{B}\,(s)\right]\left\{\bar{t}\,(s)\right\} + \left\{\bar{\Omega}\,(s)\right\} \tag{28}$$

gdzie: $\left\{\bar{u}\,(s)\right\}$, $\left\{\bar{t}\,(s)\right\}$ oznaczają odpowiednio transformaty przemieszczeń i sił węzłowych a $\left[\bar{A}\,(s)\right] = \left[C_{ik}\,(y) + \bar{a}^{ew}_{ik}\,(y,s)\right]$, $\left[\bar{B}\,(s)\right] = \left[\bar{b}^{ew}_{ik}\,(y,s)\right]$.

Równanie (28) rozwiązuje się dla ciągu wartości s względem transformat nieznanych przemieszczeń i sił węzłowych. Następnie przeprowadza się numeryczną transformatę odwrotną, przy czym posłużyć można się w tym celu algorytmem opisanym w pracy [9].

Rozwiązanie zadania brzegowego dla jednowymiarowego układu lepkosprężystego metodą elementów brzegowych znacznie się upraszcza. Brzeg takiego układu wyznaczony jest tylko dwoma punktami, a układ brzegowych równań całkowych redukuje się wprost do układu równań algebraicznych.

5. Jednowymiarowe układy lepkosprężyste

5.1. Ogólne sformułowanie zadania granicznego

Rozpatrzmy lepkosprężysty pręt pryzmatyczny o długości l i gęstości α, na który działa obciążenie uogólnione b (x,t). Znane są warunki początkowe:

$$U(x,t)\big/_{t=0} = g(x), \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big/_{t=0} = h(x) \tag{29}$$

Na brzegu $B = \{B_1, B_2\}$ ($x \in B_1 \equiv (x=0)$, $x \in B_2 \equiv (x=l)$) zadanych jest n warunków brzegowych w postaci:

$$U_k(x,t) \equiv d_k(x)\, u(x,t)\big/_B = f_k(x,t), \qquad (k=0,1,\ldots n-1) \tag{30}$$

gdzie operator różniczkowy $d_k(x)$ jest określany następująco:

$$d_k(x) = F_k \frac{\partial k}{\partial x^k}. \tag{31}$$

F_k zależy od rodzaju zagadnienia wytrzymałościowego (rozciąganie, skręcanie, zginanie).

Jeżeli uogólnionemu obciążeniu b (x,t) odpowiada uogólnione przemieszczenie u (x,t), to stan układu możemy opisać w przedziale czasu $t \in T = \{t : 0 \leqslant t \leqslant \infty$ równaniem operatorowym (porównaj [10,11]):

$$D^n U(x,t) = p(x,t) \tag{32}$$

gdzie:

$$p(x,t) = v(x,t) + M\left[\dot{\delta}(t)\, g(x) + \delta(t)\, h(x)\right]. \tag{33}$$

Operator D^n zależny jest od czasu i opisuje podstawowe przypadki wytrzymałościowe pręta, takie jak: rozciąganie n = 2, skręcanie n = 2 i zginanie n = 4. Dla układów opisanych operatorem D^2 $u=u_0$ i u_1 oznaczają dla rozciągania odpowiednio: przemieszczenie i siłę normalną, a dla układów opisanych operatorem D^4 (zginanie) $u=u_0$, u_1, u_2, u_3 oznaczają odpowiednio: ugięcie, kąt ugięcia, moment gnący i siłę poprzeczną. Liczba możliwych parametrów brzegowych na brzegach B_1 i B_2 równa jest 2n (po n na każdym brzegu).

Po przeprowadzeniu transformacji całkowej Laplace'a równania (32) otrzymujemy:

$$\bar{D}^n \bar{u}(x,s) = \bar{p}(x,s) \tag{34}$$

przy czym operator D^n zapisać można w postaci:

$$\bar{D}^n = e\,(s)\,\frac{d^n}{d_x{}^n} + f\,(s) \tag{35}$$

gdzie współczynniki e (s) i f (s) są funkcjami parametru przekształcenia Laplace'a i zależą od rodzaju zagadnienia (dynamika, quasi-statyka) oraz przyjętego modelu lepkosprężystości.

Podstawę do rozważań stanowi zasada wzajemności Bettiego, która dla zagadnienia jednowymiarowego przyjmuje postać:

$$\int_0^1 \left[\bar{p}\,(x,s)\,\bar{u}_o'\,(x,s) - \bar{p}'(x,s)\,\bar{U}_o\,(x,s)\right] dx + \tag{36}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n/2} (-1)^{k-1} \left[\bar{u}_{n-k}\,(x,s)\,\bar{u}'_{k-1}\,(x,s) - \bar{u}'_{n-k}\,(x,s)\,\bar{u}_{k-1}\,(x,s)\right]_{x=0}^{x=1} = 0$$

Należy wyznaczyć przemieszczenie u (y,t), $y \in (o,l)$ (tutaj najpierw $\bar{u}$ (y,s)), wyrażając je przez odpowiednio dobrane przemieszczenia $u_o' = u$ ($\bar{u}_o' = u$). Jeżeli w punkcie $y \in (o,l)$ pręta nieskończonego działa jednostkowa, chwilowa siła skupiona $p' = \delta(x-y)\,\delta(t)$ (tutaj $\bar{p}' = \delta(x-y)$), to wywołuje ona w pręcie $\bar{U}_k' = \bar{U}_k\,(x,y,t)$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$(u nas $\bar{U}_k' = \bar{U}_k\,(x,y,s)$). $\bar{U}_o$ jest wtedy rozwiązaniem podstawowym operatora $\bar{D}^n$:

$$\bar{D}^n\,\bar{U}_o\,(x,y,s) = \delta(x-y). \tag{37}$$

Korzystając z powyższych zależności otrzymujemy z zasady Bettiego formułę pozwalającą wyznaczyć $\bar{u}$ (y,s)

$$\bar{u}(y,s) = \bar{u}_o(y,s) = \int_0^1 \bar{U}_o(x,y,s)\,\bar{p}(x,s)\,dx + \tag{38}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n/2} (-1)^{k-1} \left[\bar{U}_{k-1}(x,y,s)\,\bar{u}_{m-k}(x,s) - \bar{U}_{n-k}\,(x,y,s)\,\bar{u}_{k-1}(x,s)\right]_{x=o}^{x=1}$$

gdzie:

$$\bar{U}_k\,(x,y,s) = \bar{d}_k(x)\,\bar{U}_o\,(x,y,s), \quad (k=1,\ldots,n-1) \tag{39}$$

Działając na zależność (38) operatorem $\bar{d}_j(y)$ $(j=1,\ldots,n-1)$, otrzymujemy formułę pozwalającą wyznaczyć $\bar{u}_1(y,s)$, $\bar{u}_2(y,s)$, $\bar{u}_3(y,s)$:

$$\bar{u}_j(y,s) = \int_0^1 \bar{U}_{o,j}(x,y,s)\,\bar{p}(x,s)\,dx + \sum_{k=1}^{n/2} (-1)^{k-1} \Big[\bar{U}_{k-1,j}(x,y,a)\,\cdot$$

$$\cdot\,\bar{u}_{n-k}(x,s) - \bar{U}_{n-k,j}(x,y,s)\,\bar{U}_{k-1}(x,s)\Big]_{h=0}^{x=1} \tag{40}$$

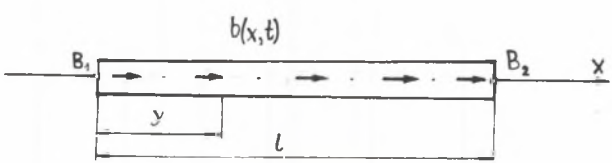
gdzie:

$$\bar{U}_{k,j}(x,y,s) = \bar{d}_j(y)\,\bar{U}_k(x,y,s) \tag{41}$$

W poprawnie sformułowanym zadaniu brzegowym n parametrów brzegowych jest danych, a pozostałe n trzeba wyznaczyć. W tym celu, dla n=2, wykorzystujemy zależność (38) lub dla n=4, zależność (38) i jedną z zależności (40), stosując przejście graniczne $y \to B$ $\{(y=0+\varepsilon);\ (y=l-\varepsilon)\}$ gdzie $\varepsilon \to 0$. W wyniku przejścia granicznego otrzymujemy układ n równań algebraicznych względem nieznanych parametrów brzegowych. Dla konkretnego zadania wyznaczymy $\bar{u}_i$ (y, s), a następnie stosując odwrotną transformację Laplace'a otrzymujemy u_i (y,t).

5.2. Pręt rozciągany

Weźmy pod uwagę pręt pryzmatyczny o długości l, gęstości ϱ, przekroju A, poddany działaniu obciążenia stycznego b (x,t) (rys. 1). Warunki brzegowe zagadnienia drgań podłużnych pręta mogą dotyczyć przemieszczeń podłużnych u_o (x,t) i sił normalnych u_1 (x,t) = EA $\partial U_o(x,t)/\partial x$ dla x = 0 $(x \in B_1)$ oraz dla x=l $(x \in B_2)$. Zadane są warunki początkowe (29). Ruch układu opisany jest równaniem operatorowym (34), przy n=2, a obciążenie uogólnione p (x,t) wyraża się formułą (33) przy $M=\varrho A$. Postać operowa $\bar{D}^2$ jest zależna od przyjętego



Rys. 1

modelu fizycznego lapkosprężystości (np. model Maxwella lub Voigta) oraz od rodzaju zagadnienia (quasi-statyka, dynamika). Dla dynamiki otrzymujemy:

$$\bar{D}^2 = A - \bar{E}A \frac{\partial 2}{\partial x^2}; \quad \bar{\varrho} = \bar{\varrho}\, s^2, \tag{42}$$

a dla quasi-statyki

$$\bar{D}^2 = \bar{E}\, A \frac{d^2}{dx^2}. \tag{43}$$

E zależy od przyjętego modelu fizycznego i tak:

dla modelu Voigta:

$$\bar{E} = E_o + \eta\, s \tag{44}$$

a dla modelu Maxwella:

$$\bar{E} = \frac{SE_o}{S + 1/\lambda} \tag{45}$$

gdzie:

$\lambda = \eta / E_o$

η = współczynnik lepkości,

E_o = moduł sprężystości podłużnej.

Rozwiązanie podstawowe $\bar{U}_o$ (x,y,s) operatora $\bar{D}^2$ określone jest równaniem (37). Dla zagadnień dynamicznych otrzymujemy:

$$\bar{U}_o\,(x,y,s) = \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{2\sqrt{A\,\bar{\varrho}\,\bar{E}}} \sin\left(\sqrt{\frac{\bar{\varrho}}{\bar{E}}}\,(x-y)\right), \tag{46}$$

a dla zagadnień quasi-statycznych:

$$U_o\,(x,y,s) = \frac{-|x-y|}{2\bar{E}A} \tag{47}$$

Wtedy siły normalne mają postać odpowiednio dla dynamiki i quasi-stat ki:

$$\bar{U}_1\,(x,y,s) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x-y) \cos\left(\sqrt{\frac{\bar{\varrho}}{\bar{E}}}\,|x-y|\right) \tag{48}$$

i

$$\bar{U}_1 (x,y,s) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn} (x-y) \tag{49}$$

Podstawiając odpowiednie wartości do (38), otrzymujemy odpowiednik formuły Somigliany dla rozważanego zagadnienia:

$$\bar{U}_o (y,s) = \int_0^1 \bar{U}_o (x,y,s)\, \bar{p} (x,s)\, dx + \Big[\bar{U}_o (x,y,s)\, \bar{U}_1 (x,s) - \bar{U}_1 (x,y,s)\, \bar{u}_o (x,s) \Big]_{x=0}^{x=1} \tag{50}$$

Znając rozkład sił osiowych, warunki początkowe oraz wszystkie cztery parametry brzegowe, można wyznaczyć, po wykonaniu odwrotnej transformacji Laplace'a, przemieszczenie dowolnego punktu pręta. W prawidłowo postawionym zagadnieniu dwa warunki brzegowe są znane, a dwa pozostałe trzeba wyznaczyć. W tym celu stosujemy przejście graniczne $y \to B_1$ i $y \to B_2$. W wyniku przejścia granicznego otrzymujemy układ dwóch równań algebraicznych, który możemy zapisać w postaci macierzowej. Dla dynamiki mamy:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}; & \frac{1}{2} \cos (\bar{c}\, l) \\ \frac{1}{2} \cos (\bar{c}\, l); & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_o (0,s) \\ \bar{u}_o (l,s) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0; & -\bar{a} \sin (\bar{c}\, l) \\ \bar{a} \sin (\bar{c}\, l); & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 (o,s) \\ \bar{u}_1 (l,s) \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \int_0^1 \bar{a} \cdot \sin (\bar{c}\, |x|) . \bar{p} (x,s)\, dx \\ \int_0^1 \bar{a} \cdot \sin (\bar{c}\, |x-l|) . \bar{p} (x,s)\, dx \end{Bmatrix} \tag{51}$$

Dla quasi-statyki otrzymujemy zapis nieco prostszy:

$$\begin{bmatrix} 1/2; & -\frac{1}{2} \\ -1/2; & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_0\ (o,s) \\ \bar{u}_0\ (1,a) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0; & 1/2\bar{E}\ A \\ -1/2\bar{E}A; & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1(o,s) \\ \bar{u}_1(1,s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^1 \frac{-x}{2\bar{E}A} = \bar{p}(x,s)\ dx \\ \int_0^1 \frac{-x-1}{2\bar{E}A} \cdot p(x,s)dx \end{Bmatrix} \tag{52}$$

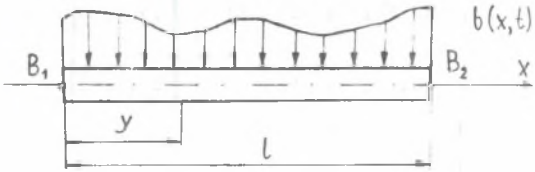
Współczynniki $\bar{a}$, $\bar{c}$ i $\bar{E}$ zależą od przyjętego modelu fizycznego i są funkcjami parametru s przekształcenia Laplace'a:

$$\bar{a} = \frac{1}{2A\sqrt{\bar{\varrho}\bar{E}}}; \qquad \bar{c} = \sqrt{\frac{\bar{\varrho}}{\bar{E}}} \tag{53}$$

Dla konkretnego zadania obliczamy transformaty nieznanych parametrów brzegowych z równań (51) lub (52). Po wykonaniu odwrotnej transformacji Laplace'a otrzymujemy funkcje w jawnej zależności od czasu. Jeżeli otrzymane wyniki wstawimy do równania (50), to możemy wyznaczyć przemieszczenie dowolnego punktu pręta. W analogiczny sposób rozwiązuje się zagadnienia drgań skrętnych pręta lepkosprężystego.

5.3. Pręt zginany

Rozpatrzmy pręt o długości l, przekroju A i gęstości ϱ; prostopadle do osi pręta działa obciążenie ciągłe b (x,t) (rys. 2. Zadane są warunki początkowe (29). Na brzegu $B = B_1, B_2$ określamy n=4 warunki brzegowe zgodnie z równaniem (30), przy czym $\bar{F}_0 = \bar{F}_1 = 1$, $\bar{F}_2 = \bar{F}_3 = \bar{E}J$, gdzie J-moment bezwładności przekroju pręta. Stan układu opisany jest równaniem operatorowym (34), przy n=4, a obciążenie uogólnione p(x,t) określone jest zależnością (33) przy $M = \bar{\varrho}A$. Operator D^4 dla zagadnień dynamicznych ma postać:



Rys. 2

$$\bar{D}^4 = \bar{E}J\frac{d^4}{dx^4} + \varrho A; \qquad \bar{\varrho} = \varrho s^2, \tag{54}$$

a dla quasi-statyki:

$$\bar{D}^4 = \bar{E}J\frac{d^4}{dx^4}. \tag{55}$$

$\bar{E}$ zależy od modelu fizycznego lepkosprężystości i dla modelu Voigta i Maxwella wyraża się zależnościami (44) i (45). Znajdujemy rozwiązanie podstawowe $\bar{U}_0(x,y,s)$ operatora $\bar{D}^4$ z równania (37), a następnie działając operatorem $\bar{d}_k(x)$ na $\bar{U}_0(x,y,s)$ otrzymujemy $\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$ i $\bar{U}_3$. Wielkości te dla quasi-statyki dane są wzorami:

$$
\begin{aligned}
\bar{U}_0 &= \frac{|x-y|^3}{12\,\bar{E}J}, \\
\bar{U}_1 &= \frac{\operatorname{sgn}(x-y)\,(x-y)^2}{4\,\bar{E}J}, \\
\bar{U}_2 &= -\frac{|x-y|}{2}, \\
\bar{U}_3 &= -\frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{2}.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Wstawiając powyższe zależności do równań (38) i (40) oraz stosując przejście graniczne $y \to B$, otrzymujemy układ 4 równań algebraicznych względem nieznanych parametrów brzegowych. Po przekształceniu układ równań możemy zapisać w postaci macierzowej. Dla quasi-statyki otrzymujemy:

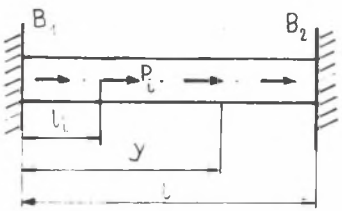
$$
\begin{bmatrix} 1/2; & -\frac{1}{2}; & 0; & 1/2 \\ \frac{1}{2}; & \frac{1}{2}; & 1/2; & 0 \\ 0; & 0; & 1/2; & -1/2; \\ 0; & 0; & 1/2; & 1/2 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \bar{u}_0(o,s) \\ \bar{u}_0(l,s) \\ \bar{u}_1(o,s) \\ \bar{u}_1(l,s) \end{Bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0; & l^2/4\bar{E}J; & 0; & -l^3/12\bar{E}J \\ -l^2/4\bar{E}J; & 0; & l^3/12\bar{E}J; & 0 \\ 0; & -l/2\bar{E}J; & 0; & -l^2/4\bar{E}J \\ -l/2\bar{E}J; & 0; & -l^2/4\bar{E}J; & 0 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \bar{u}_2(o,s) \\ \bar{u}_2(l,s) \\ \bar{u}_3(o,s) \\ \bar{u}_3(l,s) \end{Bmatrix}
=
$$

$$
= \begin{Bmatrix} \int_0^1 \frac{|x|^3}{12\bar{E}J}\,\bar{p}(x,s)\,dx \\ \int_0^1 \frac{|x-l|^3}{12\bar{E}J}\,\bar{p}(x,s)\,dx \\ \int_0^1 \frac{x^2}{4\bar{E}J}\,\bar{p}(x,s)\,dx \\ \int_0^1 \frac{\operatorname{sgn}(x-l)(x-l)^2}{4\bar{E}J}\,\bar{p}(x,s)\,dx \end{Bmatrix}
\tag{57}
$$

Dla konkretnego zadania znajdujemy transformaty nieznanych parametrów brzegowych, a następnie wyznaczamy $\bar{u}_1(y,s)$ z równań (38), (40). Na koniec, dokonując odwrotnej transformacji Laplace'a, wyznaczamy $u_1(y,t)$.

6. Przykłady

a) Dany jest jednorodny pręt o długości l, przekroju A, utwierdzony na obu końcach. Wzdłuż osi pręta działają siły skupione P_i w miejscach l_i $(i=1,2,\ldots,n)$ (rys. 3); należy wyznaczyć nieznane parametry brzegowe $u_1(o,t)$, $u_1(l,t)$ oraz $u_o(y,t)$. Warunki brzegowe mają postać:



Rys. 3

$$u_o(o,t) = 0; \quad \bar{u}_o(o,s) = 0,$$
$$u_o(l,t) = 0; \quad \bar{u}_o(l,s) = 0. \tag{58}$$

Siły osiowe przedstawiamy zależnością:

$$p(x,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i\,\delta(x-l_i); \qquad \bar{p}(x,s) = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n} P_i\,\delta(x-l_i). \tag{59}$$

Przyjmiemy zerowe warunki początkowe. Powyższe wielkości wstawiamy do (52). Otrzymujemy układ dwóch równań algebraicznych, z którego po przekształceniach uzyskujemy:

$$u_1(l,s) = \frac{-1}{s}\sum_{i=1}^{n}\frac{l_i}{l}P_i$$
$$u_1(o,s) = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n}\frac{|l_i-l|}{l} \tag{60}$$

Na koniec wykonując odwrotną transformację Laplace'a otrzymujemy:

$$u_1(l,t) = -\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n} P_i l_i$$
$$u_1(o,t) = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n} P_i\,|l_i-l| \tag{61}$$

Rozwiązania te są niezależne od przyjętego modelu fizycznego. W następnym etapie wyznaczamy przemieszczenie przekroju odległego o y od końca B_1. Korzystamy z (50) wstawiając wartości z (60). Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\bar{u}_o(y,s) = \frac{1}{2s\bar{E}\,A} \sum_{i=1}^{n} P_i \left(l_i+y - \frac{2yl_i}{l} - |l_i-y|\right). \tag{62}$$

Rozwiązanie jest zależne od przyjętego modelu fizycznego. Dla modelu Maxwella uzyskujemy:

$$u_o(y,t) = \frac{1}{2E_oA} \left[1 + \frac{t}{\lambda}\right] \sum_{i=1}^{n} P_i\left(l_i+y - \frac{2yl_i}{l} - |l_i-y|\right), \tag{63}$$

a dla modelu Voigta:

$$u_o(y,t) = -\frac{1}{2E_oA} \left[1-e^{-t/\lambda}\right] \sum_{i=1}^{n} P_i\left(l_i+y - \frac{2yl_i}{l} - |l_i-y|\right). \tag{64}$$

Wstawiając konkretne wartości l, l_i, y, P_i, λ, A, E_o oraz t, otrzymamy wartości liczbowe przemieszczenia dla danej chwili czasu t.

Ten sam problem możemy rozwiązać dla zagadnienia dynamicznego. Rozwiązujemy wtedy układ równań (51), uwzględniając (53). Obciążenie zadajemy w postaci:

$$\bar{p}(x,s) = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i(S)\,\delta(x-l_i). \tag{65}$$

Równania przyjmują wtedy postać:

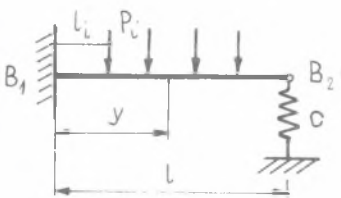
$$\begin{aligned} \bar{a}.\sin(\bar{c}\,l)\,\bar{u}_1(l,s) &= \int_0^l \bar{a}.\sin(\bar{c}\,x) \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i(s)\,\delta(x-l_i)\,dx, \\ \bar{a}.\sin(\bar{c}\,l)\,\bar{u}_1(o,s) &= \int_0^l \bar{a}.\sin(\bar{c}\,|x-l|) \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i(s)\delta(x-l_i)\,dx \end{aligned} \tag{66}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\bar{u}_1(l,s) = \frac{1}{\sin(\sqrt{\frac{\bar{\varrho}}{\bar{E}}} \cdot l)} \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i(s) \sin\left(\sqrt{\frac{\bar{\varrho}}{\bar{E}}}\, l_i\right),$$

$$\bar{u}_1(o,s) = \frac{1}{\sin(\sqrt{\frac{\bar{\varrho}}{\bar{E}}} \cdot l)} \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i(s) \sin\left(\sqrt{\frac{\bar{\varrho}}{\bar{E}}}\,(l-l_i)\right). \tag{67}$$

Chcąc wyznaczyć $\bar{u}_0(y,s)$, wstawiamy (67) do (50), a następnie wykonując transformację odwrotną, wykazujemy $u_0(y,t)$.



Rys. 4

b) Rozpatrzmy belkę o długości l, sztywności E_0J, utwierdzoną na końcu B_1 i podpartą przegubowo sprężyną o stałej c na końcu B_2. Prostopadle do osi pręta działają siły poprzeczne P_i w miejscach l_i (rys.4). Należy wyznaczyć nieznane parametry brzegowe oraz ugięcie $u_0(y,t)$ dla przekroju odległego o y od brzegu B_1. Warunki brzegowe i ich transformaty mają postać:

$$u_0(o,t) = 0; \quad \bar{u}_0(o,s) = 0,$$

$$u_1(o,t) = 0; \quad \bar{u}_1(o,s) = 0,$$

$$u_2(l,t) = 0; \quad \bar{u}_2(l,s) = 0, \tag{68}$$

$$u_3(l,t) = -c\, u_0(l,t) \text{ i } \bar{u}_3(l,s) = -c\, \bar{u}_0(l,s).$$

Obciążenie belki wyraża się zależnością:

$$p(x,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i\, \delta(x-l_i); \quad \bar{p}(x,s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i\, \delta(x-l_i). \tag{69}$$

Przyjmujemy zerowe warunki początkowe. Na podstawie (57) zapisujemy układ równań algebraicznych, z którego po przekształceniach otrzymujemy:

$$\bar{u}_0(l,s) = \frac{1}{s} \frac{1}{2(3\bar{E}J + cl^3)} \sum_{i=1}^{n} P_i l_i^2 (3l-l_i), \tag{70}$$

$$\bar{u}_1(l,s) = \frac{1}{s}\frac{1}{2\bar{E}J}\sum_{i=1}^{n} P_i l_i^2 \left(1 - \frac{cl^2(3l-l_i)}{2(3\bar{E}J+Cl^3)}\right), \tag{70}$$

$$\bar{u}_2(o,s) = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n} P_i l_i \left(1 - \frac{cl^2(3l-l_i)}{2(3\bar{E}J+cl^3)}\right),$$

$$\bar{u}_3(o,s) = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n} P_i \left(1 - \frac{cl_i^2\,(3l-l_i)}{2(3\bar{E}J+cl^3)}\right).$$

Teraz dla konkretnego przypadku wykonujemy odwrotną transformację Laplace'a i otrzymujemy wartości $u_o(l,t)$, $u_1(l,t)$, $u_2(o,t)$, $u_3(o,t)$ zależne od przyjętego modelu fizycznego lepkosprężystości.
Jeżeli $P_i = P$, $l_i = l/2$, to dla modelu Voigta otrzymamy:

$$u_o(l,t) = -\frac{5Pl^3}{9\,EJ\,(1+\varkappa_1)}\left[1-e^{(-t/\lambda)(1-\varkappa_1)}\right], \tag{71}$$

gdzie:

$$\varkappa_1 = \frac{cl^3}{3EJ}$$

Wartości otrzymane z (70) wstawiamy do (38), skąd dla danego y wyznaczamy $u_o(y,s)$; a następnie $u_o(y,t)$.

7. Uwagi końcowe

Metoda elementów brzegowych jest użytecznym narzędziem służącym do rozwiązywania zagadnień dynamicznych i quasi-statycznych teorii lepkosprężystości. Wykorzystując analogię sprężysto-lepkosprężystą, otrzymuje się rozwiązanie zagadnienia w postaci brzegowego równania całkowego, a po dyskretyzacji brzegu w postaci układu równań algebraicznych, podobnie jak dla zadań brzegowych teorii sprężystości, z tym że w dziedzinie transformat Laplace'a. Prezentowana metoda jest szczególnie efektywna dla zagadnień jednowymiarowych lepkosprężystości. W tym przypadku, z uwagi na istotę metody, wymiar zadania redukuje się o jeden rząd i w rezultacie otrzymuje się wprost układ równań algebraicznych. Dokonywanie odwrotnych transformacji Laplace'a przy założonych modelach fizycznych lepkosprężystości stwarzać może trudności natury matematycznej. Dlatego wskazane jest stosowanie numerycznego odwracania transformat, tak jak czyni się to w zagadnieniach dwu- i trójwymiarowych.

LITERATURA

[1] Brebbia C.A., Walker S.: Boundary element techniques in engineering. Newnes - Butterworths, London 1980.

[2] Banerjee P.K., Butterfield R.: Boundary element methods in engineering science. Mc Graw Hill, London 1981.

[3] Shippy D.J.: Application of the boundary intergral equation method to transient phenomenon in solids. In T.A. Cruse and F.J.Rizzo (eds) Boundary integral equation method: computational applications in applied mechanics, ASME, New York 1975.

[4] Manolis G.D., Beskos D.E.: Dynamic stress concentration studies by boundary integrals and Laplace transform, Internat. J. Numer. Meths. Eng., Vol 17, No4, 1981 (573-599).

[5] John A., Adamczyk T., Burczyński T.: Analiza drgań układów lepkosprężystych metodą elementów brzegowych. Streszczenia referatów XI Sympozjum "Drgania w układach fizycznych", Poznań 1984.

[6] Mukherjee S.: Boundary element methods in creep and fracture. Applied Science Publishers, London and N.Y. 1982.

[7] Nowacki W.: Teoria pełzania. Arkady, Warszawa 1963.

[8] Christensen R.M.: Theory of viscoelasticy. Academic Press, New York and London 1971.

[9] Durbin F.: Numerical inversion of Laplace transform: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. Computer Journal, Vol 17, 1974.

[10] Burczyński T.: Analiza dynamiczna układów prętowych metodą elementów brzegowych. Mat. Konf. IX Ogólnopolskiej Konferencji Teorii Maszyn i Mechanizmów, Kraków 1982.

[11] Burczyński T.: Modelowanie jednowymiarowych układów ciągłych metodą elementów brzegowych. Zb. ref. 22 Sympozjum PTMTS nt. "Modelowanie w mechanice", Gliwice-Wisła 1983.

Wpłynęło do Redakcji 7.10.1985.

Rencenzent: Prof. dr hab. inż. Józef NIZIOŁ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КРАЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ВЯЗКОУПРУГОЙ ТЕОРИИ

Р е з ю м е

В работе сформулированы краевые задачи вязкоупругой теории при помощи метода краевых элементов. Краевые интегральные уравнения получены исходя из принципа Бетти, с использованием упругой вязкоупругого подобия. Рассматривались два случая: Первый случай - с краевыми точками вязкоупругой среды. Полученные в этом случае уравнения есть система краевых особенных интегральных уравнений по отношению к неизвестным преобразованиям Лапласа для перемещений и поверхностных сил. Во втором случае, когда рассматривались внутренние точки среды, получена зависимость, которая является обобщением формулы Сомигляны для вязкоупругих задач. Краевые интегральные уравнения

вязкоупругости решаются методом краевых элементов. Граница тела аппроксимируется краевыми элементами. Преобразования перемещений и поверхностных сил аппроксимируются при помощи функций формы и узловых значений. В результате получается система алгебраических уравнений, которая решается для ряда значений параметра преобразования Лапласа по отношению к неизвестным преобразованиям перемещений и узловых сил. В качестве частотного случая рассмотрена одномерная вязкоупругая система.

APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD TO BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF VISCOELASTICITY

S u m m a r y

In this paper the boundary value problem of viscoelasticity is formulated by means of the boundary element method. Boundary integral equations of viscoelasticity are derived from Betti's reciprocal theorem using elastic-viscoelastic correspondence principle. If one considers boundary points of a viscoelastic medium the system of singular integral equations is obtained. In the case when domain points are considered somigliana's identity is obtained. The boundary is discretized into boundary element. Laplace transform of displacements and tractions are approximated vy means of shape functions and nodal values. As a result the system of algebraic equations in a matrix form is obtained. This system is solved for series of Laplace transform parameter. Finally, the inverse transformation to the time domain is accomplished. One-dimensional viscoelasticity systems are considered as a particular case.