

**ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ**

EWA MAJCHRZAK

**ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW
BRZEGOWYCH W TERMODYNAMICE
PROCESÓW ODLEWNICZYCH**



MECHANIKA

**Z. 102
GLIWICE
1991**

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1108



EWA MAJCHRZAK

**ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW
BRZEGOWYCH W TERMODYNAMICE
PROCESÓW ODLEWNICZYCH**

OPINIODAWCY

Prof. dr inż. Józef Gawroński
Prof. dr hab. inż. Ryszard Parkitny

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY — Prof. dr hab. inż. Jan Węgrzyn
REDAKTOR DZIAŁU — Prof. dr hab. inż. Józef Wojnarowski
SEKRETARZ REDAKCJI — Mgr Elżbieta Leško

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Alicja Nowacka

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

Druk z makiet przygotowanych przez Autora

PL ISSN 0434-0817

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł. 150+85	Ark. wyd. 9	Ark. druk. 9.25	Papier offset	kl. III 70x100, 70g
Oddano do druku 19.12.90				Podpis. do druku 19.12.90
Zam. 682/90				Druk ukończ. w styczniu 1991
				Cena zł 7 700,-

Fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

1. WSTĘP.....	7
2. ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ZAGADNIENIACH PRZEPYWU CIEPŁA.....	9
Literatura do rozdziału 2.....	18
3. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH DLA OBSZARÓW NIEJEDNORODNYCH.....	20
3.1. Równania całkowe dla jednowymiarowych równań przewodnictwa ciepła.....	23
3.2. I schemat metody elementów brzegowych dla jednowymiarowego nieu- stalonego przepływu ciepła (dla obszarów niejednorodnych).....	26
3.3. Identyfikacja pola temperatury przy wykorzystaniu I schematu MEB w podobszarach D_1 i D_4	29
3.4. II schemat metody elementów brzegowych dla jednowymiarowego nieu- stalonego przepływu ciepła (dla obszarów niejednorodnych).....	35
3.5. Identyfikacja pola temperatury w niejednorodnych obszarach D_1 i D_4 przy wykorzystaniu I i II schematu metody elementów brzegowych....	38
3.6. Obliczenia pola temperatury w niejednorodnych obszarach D_1 i D_4 z oporem cieplnym styku.....	42
Literatura do rozdziału 3.....	44
4. MODELOWANIE PROBLEMU STEFANA.....	45
4.1. Zastosowanie metody elementów brzegowych do rozwiązania problemu topienia (namarzania) [6],[7].....	48
4.2. Metoda iteracji prędkości krzepnięcia [10].....	52
4.3. Metoda kolejnych przybliżeń kroku czasu (badania własne).....	55
4.4. Metoda przemiennej fazy.....	57

4.5. Metoda zapasu temperatury.....	63
Literatura do rozdziału 4.....	68
5. MODELOWANIE PRZEPŁYWU CIEPŁA W OBSZARZE METALU KRZEPNĄCEGO W INTERWALE TEMPERATURY.....	70
5.1. Opis matematyczny procesu krzepnięcia i stygnięcia.....	72
5.2. Poprawianie pola temperatury na bazie bilansów energii.....	74
5.3. Korekta pola temperatury w krzepnącym odlewie.....	78
Literatura do rozdziału 5.....	86
6. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH DLA ZADAŃ DWUWYMIAROWYCH (2D).....	88
6.1. Formuły Greena [1].....	88
6.2. Brzegowe równanie całkowe dla równania parabolicznego.....	91
6.3. Realizacja numeryczna metody elementów brzegowych.....	96
6.3.1. I wariant metody elementów brzegowych.....	100
6.3.2. II wariant metody elementów brzegowych.....	105
6.4. Obszary wypukłe i obszary wklęsłe.....	108
Literatura do rozdziału 6.....	112
7. PRZYKŁADY NUMERYCZNEJ SYMULACJI KRZEPNIĘCIA I STYGNIECIA ODLEWÓW.....	113
7.1. Modelowanie procesu krzepnięcia miedzianego pionowego wlewka ciągłego o przekroju kwadratowym [1,2,3].....	113
7.2. Symulacja krzepnięcia stalowego wlewka [9].....	120
7.3. Krzepnięcie wlewka we wlewnicy.....	126
7.4. Krzepnięcie odlewu w masie formierskiej.....	134
7.4.1. Krzepnięcie prostokątnego wężła typu T [18].....	134
7.4.2. Krzepnięcie ukośnokątnego wężła typu L.....	138
Literatura do rozdziału 7.....	141
8. WNIOSKI.....	143
STRESZCZENIA.....	145

CONTENTS

1. INTRODUCTION.....	7
2. UTILIZATION OF BOUNDARY ELEMENT METHOD IN THE HEAT TRANSFER PROCESSES..	9
References (chapter 2).....	18
3. BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR HETEROGENOUS AREAS.....	20
3.1. Integral equations for one-dimensional equations of heat conduc- tion.....	23
3.2. 1st scheme of boundary element method for one-dimensional non- steady heat transfer (for heterogenous areas).....	26
3.3. Identification of temperature field by 1st scheme of BEM in D_1 and D_4 sub-areas.....	29
3.4. 2nd scheme of boundary element method for one-dimensional non- steady heat transfer (for heterogenous areas).....	35
3.5. Identification of temperature field by 1st and 2nd scheme of BEM in D_1 and D_4 heterogenous sub-areas.....	38
3.6. Computations of temperature field in heterogenous areas D_1 and D_4 with thermal resistance on the contact surface.....	42
References (chapter 3).....	44
4. THE STEFAN PROBLEM MODELLING.....	45
4.1. Utilization of boundary element method to numerical solution of melting (freezing) processes.....	48
4.2. The method of solidification rate iteration [10].....	52
4.3. The method of succesive time intervals iteration.....	55
4.4. Alternating phase truncation method.....	57

References (chapter 4).....	68
5. NUMERICAL MODELING OF HEAT CONDUCTION IN THE AREA OF METAL SOLIDIFYING IN AN INTERVAL OF TEMPERATURE.....	70
5.1. Mathematical description of solidification and cooling processes..	72
5.2. Modification of temperature field (on the basis of energy balan- ces).....	74
5.3. Correction of temperature field in the solidifying casting area...	78
References (chapter 5).....	86
6. BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR 2D AREAS.....	88
6.1. The Green's formulas [1].....	88
6.2. Boundary integral equations for parabolic equation.....	91
6.3. Numerical realization of boundary element method.....	96
6.3.1. 1st scheme of boundary element method.....	100
6.3.2. 2nd scheme of boundary element method.....	105
6.4. Convex and non-convex areas.....	108
References (chapter 6).....	112
7. THE EXAMPLES OF NUMERICAL SIMULATION OF SOLIDIFICATION AND COOLING PROCESSE IN THE CASTING VOLUME.....	113
7.1. Numerical model of copper continuous casting solidification [1,2,3].....	113
7.2. Simulation of steel ingot solidification [9].....	120
7.3. Solidification in the system ingot-ingot mould.....	126
7.4. Solidification of metal in sand mix mould.....	134
7.4.1. Rectangular hot spot of T type [18].....	134
7.4.2. Oblique hot spot of L type.....	138
References (chapter 7).....	141
8. CONCLUSIONS.....	143
SUMMARY.....	145

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПРЕДИСЛОВИЕ.....	7
2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПРОБЛЕМАХ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ.....	9
Литература к главе 2.....	18
3. МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ОБЛАСТЕЙ.....	20
3.1. Интегральные уравнения для одномерной теплопроводности.....	23
3.2. I схема МГЭ для одномерного нестационарного теплопереноса (неоднородные тела).....	26
3.3. Идентификация температурного поля при использовании I схемы МГЭ в подобластях D_1 и D_4	29
3.4. II схема МГЭ для одномерного нестационарного теплопереноса (неоднородные тела).....	35
3.5. Идентификация температурного поля в неоднородных телах D_1 и D_4 при использовании I и II схемы МГЭ.....	38
3.6. Идентификация температурного поля в подобластях D_1 и D_4 с термическим сопротивлением.....	42
Литература к главе 3.....	44
4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ СТЕФАНА.....	45
4.1. Использование МГЭ к решению проблемы плавления (затвердевания) [6], [7].....	48
4.2. Метод итерации скорости затвердевания [10].....	52
4.3. Метод итерации шага по времени (собственные исследования).....	55
4.4. Метод коммутативной фазы.....	57
4.5. Метод температурного запаса.....	63
Литература к главе 3.....	68

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ОБЛАСТИ МЕТАЛЛА ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕГО В ИНТЕРВАЛЕ ТЕМПЕРАТУРЫ.....	70
5.1. Математическое описание процесса.....	72
5.2. Исправление температурного поля при использовании балансов энергии.....	74
5.3. Корректра температурного поля в затвердевающей отливке.....	78
Литература к главе 5.....	86
6. МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ДВУХМЕРНОЙ (2D) ЗАДАЧИ.....	88
6.1. Теоремы Грина [1].....	88
6.2. Граничное интегральное уравнение для уравнения параболического типа.....	91
6.3. Численный подход к методу граничных элементов.....	96
6.3.1. I схема МГЭ.....	100
6.3.2. II схема МГЭ.....	105
6.4. Выпуклые и вогнутые области.....	108
Литература к главе 6.....	112
7. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ И ОХЛАЖДЕНИЯ ОТЛИВКИ.....	113
7.1. Моделирование процесса затвердевания медного непрерывного слитка квадратного сечения [1, 2, 3].....	113
7.2. Затвердевание стального слитка [9].....	120
7.3. Затвердевание слитка в изложнице.....	126
7.4. Затвердевание отливки в песчаной форме.....	134
7.4.1. Затвердевание прямоугольного узла типа T [18].....	134
7.4.2. Затвердевание диагонального узла типа L.....	138
Литература к главе 7.....	141
8. ПРЕДЛОЖЕНИЯ.....	143
9. РЕЗЮМЕ.....	145

1. WSTĘP

Niniejsza praca została wykonana w latach 1987-1990 w ramach Centralnego Programu Badań Podstawowych 02.09 koordynowanego przez prof. zw. dr inż. Wacława Sakwę i dotyczy wykorzystania metody elementów brzegowych do symulacji krzepnięcia i stygnięcia odlewów.

Inspiracją do podjęcia badań w tej dziedzinie było pojawienie się w literaturze światowej publikacji dotyczących zastosowania metody brzegowych równań całkowych (metody elementów brzegowych) do przybliżonego rozwiązywania pewnych problemów z dziedziny termodynamiki procesów odlewniczych. Metoda wydawała się na tyle atrakcyjna, a przy tym mało zbadana szczególnie w zakresie jej praktycznego wykorzystania do analizy procesów wymiany ciepła w szeroko rozumianym układzie odlew-forma, że wprowadzenie nowego zadania do CPBP 02.09 spotkało się z pełną akceptacją Koordynatora i kierowników grup tematycznych (pracę wykonano w grupie tematycznej 01 kierowanej przez prof. dr inż. Józefa Gawrońskiego).

Prezentowana monografia zawiera przede wszystkim wyniki badań własnych, które zresztą w formie cząstkowej były przedstawiane w postaci publikacji i referatów konferencyjnych głównie w czasopismach zagranicznych i na konferencjach międzynarodowych (FOCOMP'88, FOCOMP'90, 21st Conf. Modelling and Simulation-Pittsburgh, Computational Modelling of Free and Moving Boundary Problems-Southampton - por. wykaz literatury).

W pracy w szczególności począwszy od rozdziału 3 zachowano układ tematyczny tzn., że kolejne rozdziały stanowią w pewnym sensie odrębne jednostki dotyczące różnych aspektów symulacji procesów krzepnięcia i stygnięcia na

bazie metody elementów brzegowych - konsekwencją tego było zamieszczenie wykazu literatury oddzielnie dla każdego rozdziału.

I tak w rozdziale 3 przedstawiono problemy modelowania przepływu ciepła dla obszarów niejednorodnych, ponieważ z takimi zadaniami mamy do czynienia w termodynamice procesów odlewniczych np. odlew-kokila, odlew-masa piaskowa, wlewk-wlewnica itp. Rozdział 4 dotyczy problemów numerycznego modelowania zadania Stefana (ostry front krzepnięcia), natomiast w rozdziale 5 przedstawiono sposoby symulacji numerycznej krzepnięcia w przedziale temperatury, co z punktu widzenia praktyki jest przypadkiem ważniejszym. W rozdziale 6 omówiono zagadnienia modelowania dwuwymiarowych niestacjonarnych pól temperatury, a więc sprawy dość szczegółowo opisane w literaturze, co jednak było niezbędne do zachowania ciągłości wywodów. Za "udział własny" autora w tym rozdziale należy uznać opracowanie szeregu programów i procedur dla zadań 2D (dzwuwymiarowych), jak również "doświadczalne" potwierdzenie nieznannej szerzej własności metody dla zadań niestacjonarnych, a mianowicie zdecydowanego pogorszenia jej dokładności dla obszarów niewypukłych i wynikającej stąd konieczności formalnego podziału takiego obszaru na obszary wypukłe. W rozdziale 7 zebrano przykłady rozwiązań numerycznych typowych zadań związanych z analizą i projektowaniem technologii odlewniczych.

2. ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ZAGADNIENIACH PRZEPŁYWU CIEPŁA

Badania nad metodami przybliżonego rozwiązywania zagadnień brzegowych i brzegowo-początkowych prowadzone są szczególnie intensywnie w okresie ostatnich dwudziestu lat, co niewątpliwie wiąże się z coraz powszechniejszym wykorzystaniem maszyn cyfrowych w praktyce inżynierskiej. Metody numeryczne są obecnie szeroko stosowane do rozwiązywania problemów przepływu ciepła, w tym również teorii cieplnej procesów odlewniczych, a w szczególności w tej jej gałęzi, w której proces krzepnięcia i stygnięcia traktuje się jako zadanie brzegowo-początkowe o ruchomych granicach tzn. problem opisany równaniem lub układami równań różniczkowych cząstkowych uzupełnionych odpowiednimi warunkami jednoznaczności (fizycznymi, geometrycznymi, brzegowymi i początkowymi).

Największą popularność w dziedzinie transportu ciepła zyskały sobie metody różnicowe (MRS), elementów skończonych (MES) a ostatnio również elementów brzegowych (MEB). Wszystkie te metody są zresztą szczególnymi przypadkami metody odchyłek ważonych (Weighted Residual Method) i w swojej istocie różnią się doбором tzw. funkcji wagowych w kryterialnym równaniu metody odchyłek [1].

Metoda elementów brzegowych nazywana też metodą brzegowych równań całkowych ma swoje źródła w ogólnej teorii równań całkowych. Po raz pierwszy równania całkowe jako sposób formułowania zadań brzegowych teorii potencjału zostały wprowadzone w 1903 roku przez Fredholma. Z powodu trudności znajdowania rozwiązań analitycznych wykorzystanie równań całkowych ograniczało się przede wszystkim do badań teoretycznych dotyczących problemu istnienia i jednoznaczności rozwiązań zadań fizyki matematycznej. Dopiero w latach sześćdziesiątych (M.A.Jawson, G.T.Symm) przedstawiono numeryczne podejście do rozwiązywania brzegowych całkowych równań Fredholma. Otrzymano wówczas rozwią-

zania dla prostych przypadków zadań Dirichleta (równanie Laplace'a z zadaniem rozkładem funkcji na brzegu) i Neumana (to samo równanie z zadaniem rozkładem pochodnej normalnej na brzegu obszaru). Pojawiły się również prace, w których prezentowano wyniki o charakterze użytkowym, dotyczyły one zadań stacjonarnych opisanych równaniami eliptycznymi.

Stosowane w tym czasie podejście do tworzenia i rozwiązywania brzegowych równań całkowych nazywa się obecnie sformułowaniem pośrednim MEB i ma ono znaczenie raczej historyczne [2, 3].

Sformułowanie bezpośrednie MEB można traktować jako szczególny przypadek metody odchyłek ważonych i w tej konwencji będzie prezentowane w niniejszej pracy.

Istotę podejścia bezpośredniego i pewne inne powtarzalne elementy tworzenia brzegowych równań całkowych zostaną wyjaśnione na następującym przykładzie.

Przykład

Jednowymiarowe stacjonarne źródłowe pole temperatury opisuje równanie Poissona w postaci $\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + q_v = 0$ gdzie λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła [W/mK], q_v - wydajnością objętościowych wewnętrznych źródeł ciepła [W/m³]. Równanie to należy rozwiązać przy warunkach brzegowych $x=0: \phi_1(T, \frac{dT}{dx}) = 0$, $x=L: \phi_2(T, \frac{dT}{dx}) = 0$.

W metodzie odchyłek ważonych wprowadza się pojęcie defektu rozwiązania przybliżonego R tzn. różnicy między prawą i lewą stroną równania różniczkowego, jeżeli w miejsce szukanej funkcji wstawić rozwiązanie przybliżone:

$$R = \lambda \frac{d^2 \hat{T}}{dx^2} + q_v, \text{ gdzie } \hat{T} \text{ jest aproksymacją rozwiązania dokładnego.}$$

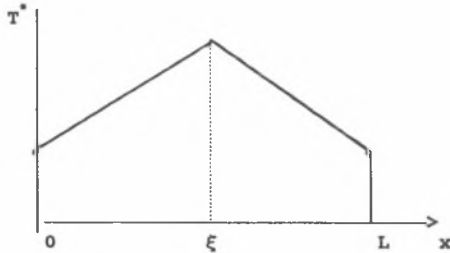
Kryterium metody odchyłek ważonych (dotyczące wnętrza obszaru D) jest następujące

$$\int_D R \, w \, dD = 0. \quad (2.1)$$

Funkcja w nazywa się funkcją wagi i jej postać decyduje o sposobie numerycz-

nej realizacji metody odchyłek ważonych^{*)}, w szczególności jeżeli jako funkcje wagi przyjąć tzw. rozwiązania fundamentalne T^* otrzymuje się równania charakterystyczne dla metody elementów brzegowych.

W prezentowanym przykładzie rozwiązanie fundamentalne jest postaci (rys.2.1)



$$T^* = (L - |x - \xi|) / 2\lambda \quad (2.2)$$

Wynikający z prawa Fouriera strumień ciepła $q^* = -\lambda \frac{\partial T^*}{\partial n}$ wynosi

$$q^* = 0.5 \operatorname{sgn}(x - \xi), \quad (2.3)$$

natomiast druga pochodna

$$\frac{d^2 T^*}{dx^2} = -\Delta(\xi, x), \quad (2.4)$$

gdzie $\Delta(\xi, x)$ jest funkcją delta Diraca [4].

Tak więc rozwiązanie fundamentalne spełnia równanie Laplace'a w przedziale $(0, L)$ za wyjątkiem $x = \xi$ Funkcję T^* można interpretować następująco.

Rys.2.1. Rozwiązanie fundamentalne T^* i strumień ciepła q^*

Fig.2.1. Fundamental solution T^* and heat flux q^*

W punkcie ξ wnętrza płyty o grubości L przyłożono źródło ciepła, które inicjuje ustalony przepływ ciepła w podobszarach $x \in (0, \xi)$ oraz $x \in (\xi, L)$. W obu fra-

^{*)} Dla przykładu przyjęcie wagi w postaci zbioru funkcji delta Diraca sprowadza MOW do metody kollokacji, funkcje wagi kawałkami stałe dają algorytm MRS, formalne podobieństwo funkcji w i aproksymacji przybliżonego rozwiązania \hat{T} (np. na bazie wielomianowej) to metoda Galerkina lub (przy dodatkowej dyskretyzacji wnętrza) metoda elementów skończonych (MES).

gmentach płyty generuje się liniowe pole temperatury (rozwiązanie jednowymiarowego równania Laplace'a).

Tak więc kryterium metody odchyłek ważonych przyjmuje postać

$$\int_0^L [\lambda \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + q_v(x)] T^*(\xi, x) dx = 0. \quad (2.5)$$

Całkując dwukrotnie przez części wyrażenie $\int_0^L \lambda \frac{d^2 T(x)}{dx^2} T^*(\xi, x) dx$ otrzymuje się następujące równanie

$$\lambda [T^*(\xi, x) \frac{dT(x)}{dx} - T(x) \frac{dT^*(\xi, x)}{dx}] \Big|_0^L + \int_0^L \lambda \frac{d^2 T^*(\xi, x)}{dx^2} T(x) dx + \int_0^L q_v(x) T^*(\xi, x) dx = 0. \quad (2.6)$$

Oznaczając $q = -\lambda \frac{dT}{dx}$ oraz wykorzystując własność funkcji delta Diraca:

$$\int_0^L T(x) \Delta(\xi, x) dx = T(\xi) \quad [5] \text{ mamy}$$

$$T(\xi) = T(L)q^*(\xi, L) - q(L)T^*(\xi, L) - T(0)q^*(\xi, 0) + q(0)T^*(\xi, 0) + \int_0^L q_v(x) T^*(\xi, x) dx. \quad (2.7)$$

Brzegowe równania całkowe otrzymuje się przechodząc do granicy $\xi \rightarrow 0^+$ oraz $\xi \rightarrow L^-$:

$$\begin{bmatrix} T(0) \\ T(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(0) \\ T(L) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -L/2\lambda & 0 \\ 0 & L/2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(0) \\ q(L) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^L q_v(x) [L-|x|] dx / 2\lambda \\ 0 \\ \int_0^L q_v(x) [L-|x-L|] dx / 2\lambda \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Jeżeli np. $q_v=2$, $\lambda=2$, $T(0)=0$ (warunek I rodzaju), $q(L)=-11$ (warunek II rodzaju) to równania (2.8) sprowadzają się do układu dwóch równań algebraicznych liniowych, a mianowicie

$$\begin{bmatrix} 0 \\ T(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T(1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(0) \\ -11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

skąd $q(0)=-13$, $T(1)=6$.

Metoda brzegowych równań całkowych pozwala w pierwszej kolejności na identyfikację "brakujących" warunków brzegowych. W ogólnym przypadku na tych fragmentach brzegu gdzie znana była temperatura można wyznaczyć strumienie ciepła, a na tych gdzie znane były strumienie ciepła można wyznaczyć temperaturę. Znajomość funkcji T i jej pochodnej normalnej na brzegu, umożliwia wyznaczenie wartości funkcji $T(x)$ w dowolnym punkcie ξ z wnętrza obszaru - por. równanie (2.7). W prezentowanym przykładzie temperatura w środku płyty $\xi=0.5$ wynosi

$$T(0.5) = 6 * \frac{1}{2} * \operatorname{sgn}(1-0.5) + 11 * \frac{1}{4} * (1-|1-0.5|) - 13 * \frac{1}{4} * (1-|-0.5|) + \\ + 0.5 \int_0^1 (1-|x-0.5|) dx = 3.125.$$

Jest to wynik dokładny, ponieważ brzegowe równania całkowe były ścisłym odpowiednikiem zadania brzegowego i całkowanie składnika z wewnętrznym źródłem ciepła q_v można było wykonać analitycznie.

Przedstawiony wyżej przykład był oczywiście bardzo prosty, ale zawierał w sobie większość istotnych elementów bezpośredniego dochodzenia do brzegowych równań całkowych, na które składa się

- sformułowanie zadania brzegowego (brzegowo-początkowego),
- kryterium metody odchyłek ważonych,
- określenie ogólnej postaci rozwiązania fundamentalnego T^0 (co nie jest zadaniem prostym a często wręcz niemożliwym - por. rozdz.6),
- całkowanie kryterium MOW na bazie tzw. II formuły Greena i z wykorzystaniem własności rozwiązania fundamentalnego,
- graniczna postać równania całkowego, gdy ξ zmierza do brzegu obszaru.

W ogólnym przypadku brzegowe równania całkowe rozwiązuje się metodami numerycznymi. W zadaniach dwu lub trójwymiarowych (2D i 3D) oraz problemach niestacjonarnych całki występujące w równaniach analogicznych do (2.6) nie są elementarne i ich wartości można wyznaczyć w sposób przybliżony. Wiąże się to z podziałem czasoprzestrzeni na elementy skończone w szczególności przez podział obszaru D i jego brzegu na elementy wewnętrzne i brzegowe oraz przez wprowadzenie do rozważań siatki czasu (dla równań parabolicznych).

W niniejszej pracy zajmowano się problemami niestacjonarnymi. W takim przypadku istnieje kilka sposobów wykorzystania MEB do identyfikacji zmiennych w czasie i przestrzeni pól temperatury.

Na początku lat siedemdziesiątych F.J.Rizzo i D.J.Shippy opublikowali kilka prac (np. [6]), w których dla funkcji $T(x,t)$ spełniającej równanie paraboliczne $\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T$ zastosowano przekształcenie Laplace'a $L(T(x,t)) = \int_0^{\infty} T(x,t)e^{-pt} dt$ gdzie $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$ jest parametrem przekształcenia. Równanie paraboliczne sprowadzono w ten sposób do równania eliptycznego. Tak otrzymane równanie uzupełnione odpowiednio przekształconymi warunkami jednoznaczności rozwiązywano metodą elementów brzegowych dla stanów stacjonarnych. Ten sposób podejścia do zadań niestacjonarnych nie zdobył sobie popularności ze względu na trudności związane ze znalezieniem przekształcenia odwrotnego, chociaż jest jeszcze przez niektórych badaczy rozwijany np. [7].

Bardziej efektywny wydaje się algorytm nazywany kombinacją metody elementów brzegowych i różnic skończonych [8]. Równanie paraboliczne przekształca się w ten sposób, że jego lewą stronę przybliża się ilorazem różnicowym $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{T(x,t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t}$ i w efekcie otrzymuje się równanie różniczkowe, które można traktować jako równanie Poissona.

Metodę kombinowaną wykorzystano również do modelowania problemu krzepnięcia [9].

Trzecim sposobem zastosowania metody bezpośredniej do zadań niestacjonarnych jest wykorzystanie metody odchyłek ważonych z rozwiązaniami fundamentalnymi T^* zależnymi od czasu [1,10,11]. Taki właśnie sposób podejścia będzie prezentowany konsekwentnie w niniejszej pracy i okazał się on efektywnym narzędziem rozwiązywania problemów termodynamiki procesów odlewniczych. Wyboru określonego wariantu metody brzegowych równań całkowych dokonano świadomie, ponieważ metoda kombinowana (być może równie dogodna do obliczeń pól niustalonych) jest jednak w pewnym sensie "ucieczką" od zadań niestacjonarnych na grunt lepiej zbadanych problemów stacjonarnych.

Jedną z często podkreślanych zalet metody jest możliwość uzyskania efektywnego rozwiązania zadania, którego wymiar jest o jeden niższy niż rozpatrywany problem brzegowy. Dla przykładu rozwiązanie przybliżone równania Laplace'a dla obszaru 2D wymaga całkowania po fragmentach brzegu, a więc po elementach jednowymiarowych. W zadaniach niestacjonarnych nie zawsze można obniżyć wymiar zadania (np. obszary źródłowe).

W drugiej połowie lat osiemdziesiątych pojawiły się pierwsze prace (C.A.Brebbia, D.Nardini, L.Wrobel, A.J.Nowak) dotyczące pewnej odmiany MEB dla równań parabolicznych i hiperbolicznych. Metoda ta nazwana DRBEM (Dual Reciprocity Boundary Element Method) prowadzi do równań całkowych, w których występują tylko całki po brzegu rozpatrywanego obszaru. Efekt ten uzyskano jednak kosztem innych, dość poważnych komplikacji bazowego algorytmu MEB [12,13].

Metoda brzegowych równań całkowych ma zastosowanie w wielu naukach technicznych w tym w szeroko rozumianej mechanice, hydro i aerodynamice, wymianie ciepła, elektrotechnice itd. [1, 3]^{*)}.

^{*)} W ostatnich latach pojawiły się pojedyncze publikacje dotyczące obliczeń procesów dyfuzyjnych i konwekcyjnych [14,15,16], segregacji [17,18], filtracji [19,20], wzrostu dendrytów [21], co świadczy o szukaniu nowych możliwości wykorzystania MEB do zadań sprzężonych i problemów mikroskopowych.

W niniejszej pracy ograniczono się do zastosowań MEB w termodynamice procesów odlewniczych. Należy tu podkreślić, że procentowy udział prac związanych z przepływem ciepła w porównaniu z publikacjami dotyczącymi innych zastosowań MEB jest stosunkowo niewielki (por. cykliczne wydawnictwa Developments in BEM, Proceedings of the BEM). Z kolei w zakresie zagadnień przepływu ciepła większość prac dotyczy zadań ustalonych w tym również prace wysoko cenionej w świecie grupy z ośrodka gliwickiego (R. Białycki, A.J. Nowak, R. Nahlik). Zadania stacjonarne są o tyle "wdzięczniejszym" obiektem badań, że rozwiązania fundamentalne są tylko funkcjami zmiennych przestrzennych i nie wymagają całkowania po czasie oraz, że istnieją stosunkowo proste sposoby linearyzacji zadań nieliniowych. Z drugiej jednak strony liczne zalety metody czynią atrakcyjnym jej zastosowanie również w zadaniach niestacjonarnych w tym w zagadnieniach nieliniowych jakimi są problemy krzepnięcia i stygnięcia.

Obszerny i aktualny przegląd prac dotyczących najnowszych osiągnięć w dziedzinie wykorzystania metody elementów brzegowych w nieliniowych zadaniach przepływu ciepła przedstawiono w [22], natomiast w tej pracy omówiono (rozdział 3 i następne) stan badań w zakresie modelowania problemu Stefana. Należy tu podkreślić, że liczba publikacji a w szczególności tych, w których rozstrzyga się problemy praktyczne jest bardzo mała [23,24], chociaż o wadze problemu może świadczyć inicjatywa organizacji przez wiodący w dziedzinie MEB ośrodek w Southampton w roku 1991 specjalnej konferencji dotyczącej wykorzystania MEB do zadań z ruchomymi brzegami.

W swoim zamyśle praca stanowi monografię poświęconą wykorzystaniu MEB w termodynamice procesów odlewniczych i zawiera przede wszystkim wyniki badań własnych, do których należy zaliczyć:

- szczegółową analizę możliwości wykorzystania MEB do rozwiązywania zadań z ostrym frontem krzepnięcia, w tym prezentację własnych algorytmów,
- badania nad problemem obliczeń niestacjonarnych pól temperatury w ośrodkach niejednorodnych np. odlew-forma lub wlewk-wlewnica,
- opracowanie metody symulacji krzepnięcia procesów cieplnych w obszarach

wypełnionych metalem krzepnącym w interwale temperatury,

- analizę możliwości znajdowania efektywnych rozwiązań dla obszarów niewypukłych,
- prezentację przykładów dotyczących typowych problemów praktyki inżynierskiej, np. krzepnięcie węzłów cieplnych, obliczenia procesów cieplnych w obszarze wlewka i wlewnicy, symulację krzepnięcia wlewków ciągłych.

W kolejnych rozdziałach pracy starano się dokładnie wyeksponować, które jej fragmenty dotyczą badań własnych, a które stanowią omówienie innych prac w tym zakresie.

Należy podkreślić, że procesy krzepnięcia i stygnięcia metalu w formie są w niniejszej pracy traktowane makroskopowo tzn. jako zadania opisane równaniami energii (przewodnictwa) dla podobszarów odlewu i formy oraz odpowiednimi warunkami brzegowymi, początkowymi i fizycznymi, nie analizowano problemów sprzężeń tych równań z innymi równaniami np. opisującymi segregację, mówiąc krótko zajmowano się krzepnięciem a nie krystalizacją (zgodnie z rozróżnieniem zaproponowanym w pracy [25]).

LITERATURA DO ROZDZIAŁU 2

- [1] C.A.Brebbia, J.C.F.Telles, L.C.Wrobel, *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, Berlin, Heildeberg, New York, Tokyo 1984
- [2] C.A.Brebbia, *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London, Halstead Press, New York 1978 (Second Edition 1980)
- [3] P.K.Banerjee, R.Butterfield, *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, London 1981
- [4] J.Mikusinski, R.Sikorski, *Elementarna teoria dystrybucji*, PWN, Warszawa, 1964
- [5] G.Daetsch, *Praktyka przekształcenia Laplace'a*, PWN, Warszawa 1964
- [6] F.J.Rizzo, D.J.Shippy, An Application of the Correspondence Principle of Linear Viscoelasticity Theory, *SIAM J.Appl.Math.*, Vol.21 (1971), 321-330
- [7] J.Brilla, Laplace Transform-Boundary Element Method for Time Dependent Problems (Invited contribution), [w:] 9th BEM, Proceedings of the 9th Boundary Element Conference (Ed.C.A.Brebbia, W.L.Wendland, G.Kuhn), Stuttgart, FRG, Springer-Verlag, Berlin and New York (1987), 83-99
- [8] D.A.S.Curran, M.Cross, B.A.Lewis, Solution of Parabolic Differential Equations by the Boundary Element Method Using Discretization in Time, *Appl.Math.Modelling* 4 (1980), 398-400
- [9] M.Tiba, The Boundary Element Method in Two-Phase Stefan Problems, *Engineering Analysis*, Vol.4, No 1 (1987), 46-48
- [10] H.L.G.Pina, J.L.M.Fernandes, Three Dimensional Transient Heat Conduction by the Boundary Element Method, [w:] 5th BEM, Proceedings of the 5th Boundary Element Conference (Ed.C.A.Brebbia, T.Futagami, M.Tanaka), Hiroshima, Japan, Springer-Verlag, Berlin and New York (1983), 135-142
- [11] M.Koizumi, M.Utamura, K.Kotani, Application of Boundary Element Method to Unsteady 3-Dimensional Heat Conduction with Non-Linear Boundary Conditions, [w:] 5th BEM, Proceedings of the 5th Boundary Element Conference (Ed.C.A.Brebbia, T.Futagami, M.Tanaka), Hiroshima, Japan, Springer-Verlag, Berlin and New York (1983), 143-152
- [12] L.C.Wrobel, C.A.Brebbia, The Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Nonlinear Diffusion Problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 65 (1987), 147-164
- [13] A.J.Nowak, C.A.Brebbia, The Multiple Reciprocity Method. A New Approach for Transforming BEM Domain Integrals to the Boundary, *Eng. Anal. with Boun.Elem.* Vol.6 No 3 (1989), 164-167
- [14] Y.Tanaka, T.Honma, I.Kaji, On Mixed Boundary Element Solutions of Convection-Diffusion Problems in Three Dimensions, *Appl. Math. Modelling*, Vol.10 (1986), 170-175
- [15] Y.Tanaka, T.Honma, I.Kaji, Mixed Boundary Element Formulation by the Method of Sub-Regions Applied to Three-Dimensional Convective Diffusion Problems, *The Transactions of the IECE of Japan*, Vol.E69, No 3 (1986), 200-209

- [16] H. Shibaike, M. Matsumoto, The Steady Periodic Solution for Two-Dimensional Simple and Coupled Diffusion Problems Using the Boundary Element Method, Engineering Analysis, Vol. 4, No 3 (1987), 142-147
- [17] S. Takahashi, K. Onishi, T. Kuroki, K. Hayashi, Boundary Elements to Phase Change Problems, [w:] 5th BEM, Proceedings of the 5th Boundary Element Conference (Ed. C.A. Brebbia, T. Futagami, M. Tanaka), Hiroshima, Japan, Springer-Verlag, Berlin and New York (1983), 173-182
- [18] Y. K. Chuang, O. Ehrich, On the Integral Technique for Spherical Growth Problems, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 17 (1974), 945-953
- [19] E. Bruch, S. Grilli, Computation of the Transient Seepage Problem in Anisotropic Porous Media by the Boundary Element Method, [w:] 9th BEM, Proceedings of the 9th Boundary Element Conference (Ed. C.A. Brebbia, W. L. Wendland, G. Kuhn), Stuttgart, FRG, Springer-Verlag, Berlin and New York (1987), 329-341
- [20] D. Ouazar, A. Namli, A. Saidi, C.A. Brebbia, An Efficient Boundary Element Formulation for Zoned Porous Media Problems with Free Surfaces, [w:] 9th BEM., Proceedings of the 9th Boundary Element Conference (Ed. C.A. Brebbia, W. L. Wendland, G. Kuhn), Stuttgart, FRG, Springer-Verlag, Berlin and New York (1987), 329-341
- [21] D. I. Meiron, Boundary Integral Formulation of the Two-Dimensional Symmetric Model of Dendritic Growth, Physica D, Vol. 23D, No 1-3 (1986), 329-339
- [22] R. Białeckki, Solving Nonlinear Heat Conduction by the Boundary Element Method, Invited Paper, [w:] 10th BEM., Proceedings of the 10th Boundary Element Conference (Ed. C.A. Brebbia), Southampton, Springer-Verlag, Berlin and New York (1988), 195-222
- [23] C. P. Hong, T. Umeda, Y. Kimura, Application of the Boundary Element Method in Two and Three Dimensional Unsteady Heat Transfer Problems Involving Phase Change; Solidification Problems, [w:] 5th BEM, Proceedings of the 5th Boundary Element Conference (Ed. C.A. Brebbia, T. Futagami, M. Tanaka), Hiroshima, Japan, Springer-Verlag, Berlin and New York (1983), 153-162
- [24] C. P. Hong, T. Umeda, Y. Kimura, Solidification of Shaped Castings by the Boundary Element Method and Prediction of Shrinkage Cavity, [w:] Official Exchange Paper, 53rd World Foundry Congress, Prague (1986)
- [25] W. Kapturkiewicz, Model i numeryczna symulacja krystalizacji odlewu, Ze-szyty Naukowe AGH nr 119, Kraków 1988

3. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH DLA OBSZARÓW NIEJEDNORODNYCH

Typową cechą zadań dotyczących modelowania przepływu ciepła w procesach odlewniczych jest niejednorodność analizowanych obszarów.

Metal krzepnie w formie piaskowej lub metalowej i przebieg tego procesu zdeterminowany jest warunkami wymiany ciepła na styku odlewu i formy (w ogólnym przypadku sama forma może być również niejednorodna np. podobszar masy przymodelowej i wypełniającej, ochładzalniki zewnętrzne itd.).

Warunek brzegowy opisujący wymianę ciepła między zewnętrzną powierzchnią odlewu i wnęką formy nazywany jest warunkiem brzegowym IV rodzaju i stanowi zapis matematyczny równania ciągłości strumienia ciepła:

$$-\lambda_o \frac{\partial T_o}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{T_o - T_m}{R} = -\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad (3.1)$$

gdzie R jest oporem cieplnym styku, $\frac{\partial(\cdot)}{\partial n}$ pochodną w kierunku normalnym do brzegu Γ obszaru, wskaźnik "o" identyfikuje obszar odlewu, a "m" formy.

Gdy $R=0$ (kontakt idealny) to warunek (3.1) przyjmuje postać

$$\left\{ \begin{array}{l} T_o = T_m \\ -\lambda_o \frac{\partial T_o}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = -\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

W takim przypadku obok ciągłości strumienia ciepła postuluje się ciągłość pola temperatury na brzegu Γ .

Badania nad efektywnością MEB dla zadań teorii cieplnej procesów-odlewniczych wymagały rozstrzygnięcia kilku istotnych problemów:

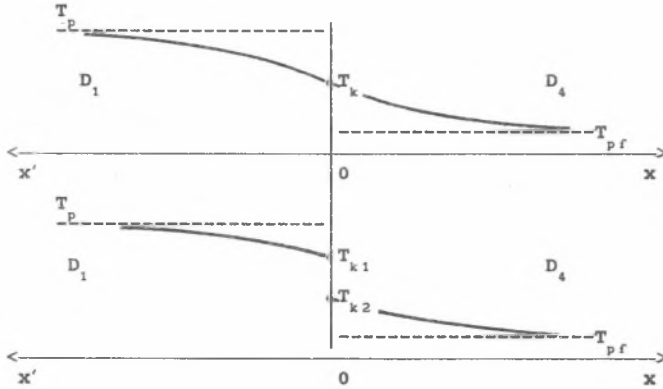
- opracowanie algorytmów zapewniających odpowiednią dokładność obliczeń numerycznych dla podobszarów o istotnie różnych parametrach termofizycznych np. odlew-forma piaskowa,

- opracowanie metod symulacji numerycznej wzajemnego oddziaływania podobszarów o zbliżonych parametrach termofizycznych ale z uwzględnieniem oporu cieplnego (np. układ wlewek-wlewnica, czy też odlew-kokila), a więc takich przypadków, gdzie między odlewem a formą generuje się szczelina gazowa.

Należy tu podkreślić, że istnieją rozwiązania analityczne dla dwóch półprzestrzeni pozostających ze sobą w kontakcie idealnym oraz dla dwóch półprzestrzeni ze zmieniającym się zgodnie z prawem pierwiastkowym $R = \beta \sqrt{t}$ oporem szczeliny (β jest dowolną stałą).

W tej sytuacji najbardziej sensowną wydawała się analiza rozwiązań numerycznych dla zadań jednowymiarowych. Na podstawie otrzymanych rozwiązań oraz ich porównania z rozwiązaniami dokładnymi możliwe było formułowanie odpowiednich wniosków.

Rozważono dwa podobszary jak na rysunku.



Rys.3.1. Pole temperatury przy $R=0$ i $R \neq 0$

Fig.3.1. Temperature field for $R=0$ and $R \neq 0$

Zmienne w czasie pole temperatury w półprzestrzeniach D_1, D_4 opisuje układ równań różniczkowych w postaci

$$\frac{\partial T_1(x', t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1(x', t)}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial T_4(x, t)}{\partial t} = a_4 \frac{\partial^2 T_4(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.3)$$

z warunkami brzegowymi

$$x = \infty : T_4(x, t) = T_{pf} , \quad x' = \infty : T_1(x', t) = T_p , \quad (3.4)$$

$$x = x' = 0 : -\lambda_1 \frac{\partial T_1(x', t)}{\partial x'} = \frac{T_1(x', t) - T_4(x, t)}{R} = \lambda_4 \frac{\partial T_4(x, t)}{\partial x} , \quad (3.5)$$

i warunkiem początkowym

$$t = 0 : T_1(x', t) = T_p , \quad T_4(x, t) = T_{pf} , \quad (3.6)$$

przy czym przy obliczaniu stałych całkowania warunki te prowadzą do zależności identycznych jak warunki dla $x = \infty$ i $x' = \infty$.

Dla przypadku $R=0$ (skąd $T_1(0, t) = T_4(0, t)$) otrzymuje się [1]

$$T_1(x', t) = T_k + (T_p - T_k) \operatorname{erf}(x'/2\sqrt{a_1 t}) , \quad (3.7)$$

$$T_4(x, t) = T_k + (T_{pf} - T_k) \operatorname{erf}(x/2\sqrt{a_4 t}) ,$$

gdzie $a_i = \lambda_i / \rho_i c_i$, $\operatorname{erf}(x/2\sqrt{a_i t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{a_i t}} \exp(-u^2) du$, T_k jest temperaturą kontaktu i wynosi $T_k = (T_p + T_{pf} b_4 / b_1) / (1 + b_4 / b_1)$, $b_i = \sqrt{\lambda_i \rho_i c_i}$, $i=1, 4$.

Z kolei dla zadania jednowymiarowego z oporem cieplnym styku $R(t) = \beta\sqrt{\pi t}$ [2]

$$T_1(x', t) = T_{k1} + (T_p - T_{k1}) \operatorname{erf}(x'/2\sqrt{a_1 t}) ,$$

$$T_4(x, t) = T_{k2} + (T_{pf} - T_{k2}) \operatorname{erf}(x/2\sqrt{a_4 t}) , \quad (3.8)$$

$$T_{k1} = [\beta_1 (1 + \beta_4) T_p + \beta_4 T_{pf}] / [(1 + \beta_1)(1 + \beta_4) - 1] ,$$

$$T_{k2} = [\beta_4 (1 + \beta_1) T_{pf} + \beta_1 T_p] / [(1 + \beta_1)(1 + \beta_4) - 1] ,$$

gdzie $\beta_i = \beta \sqrt{b_i}$, $i=1, 4$.

Istnieje również rozwiązanie analityczne opisujące krzepnięcie odlewu w kształcie półprzestrzeni w półnieskończonej formie (rozwiązanie Schwar-

ty [1]). Ponieważ jednak celem badań w prezentowanym rozdziale było poszukiwanie najlepszych algorytmów symulujących przepływ ciepła przy warunkach IV rodzaju, więc dołączenie do modelu dodatkowo krzepnięcia podobszaru D_1 mogłoby tylko zaciemnić obraz i utrudnić identyfikację optymalnego algorytmu.

W dalszych rozdziałach pracy zostaną przedstawione również rozwiązania dla złożonych geometrycznie obszarów, przy obliczeniach których wykorzystano doświadczenia zdobyte na bazie szczegółowej analizy rozwiązań jednowymiarowych.

3.1. RÓWNANIA CAŁKOWE DLA JEDNOWYMIAROWYCH RÓWNAŃ PRZEWODNICTWA CIEPŁA

Rozpatrzono ponownie dwa niejednorodne obszary D_1 i D_4 (rys.3.2).



Rys.3.2. Podobszary D_1 i D_4

Fig.3.2. Sub-areas D_1 and D_4

Niestacjonarne pole temperatury w tych obszarach opisuje układ równań Fouriera

$$\begin{aligned}
 x_0 < x < x_1 : \quad c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial t} &= \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1(x, t)}{\partial x^2}, \\
 x_1 < x < x_2 : \quad c_4 \rho_4 \frac{\partial T_4(x, t)}{\partial t} &= \lambda_4 \frac{\partial^2 T_4(x, t)}{\partial x^2},
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned}
 x=x_0 : \quad T_1(x, t) &= \hat{T}_1 \quad \text{lub} \quad q_1(x, t) = -\lambda_1 \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} = \hat{q}_1, \\
 \text{lub} \quad q_1(x, t) &= -\lambda_1 \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} = \alpha(T_1) [(T_1(x, t) - T_\infty)],
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 x=x_2: \quad T_4(x, t) = \hat{T}_4 \quad \text{lub} \quad q_4(x, t) = -\lambda_4 \frac{\partial T_4(x, t)}{\partial x} = \hat{q}_4, \\
 \text{lub} \quad q_4(x, t) = -\lambda_4 \frac{\partial T_4(x, t)}{\partial x} = \alpha(T_4) [(T_4(x, t) - T_\infty)],
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

gdzie $\alpha(T)$ jest współczynnikiem wymiany ciepła między obszarem a otoczeniem o temperaturze T_∞ .

Na styku podobszarów

$$x=x_1: \quad -\lambda_1 \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} = \frac{T_1(x, t) - T_4(x, t)}{R(T_1, T_4)} = -\lambda_4 \frac{\partial T_4(x, t)}{\partial x}, \tag{3.12}$$

gdzie $R(T_1, T_4)$ jest oporem cieplnym. W przypadku idealnego kontaktu $R=0$ i wtedy $T_1(x, t) = T_4(x, t)$.

Dany jest również warunek początkowy

$$t=0: \quad T_1(x, t) = T_p, \quad T_4(x, t) = T_{p,f}. \tag{3.13}$$

Metoda elementów brzegowych wymaga przedstawienia powyższego opisu matematycznego w postaci równań całkowych, przy czym istnieje kilka sposobów otrzymania tych równań [3]. Tutaj zastosowano tzw. sformułowanie bezpośrednie MEB bazujące na metodzie odchyłek ważonych i wykorzystujące zależne od czasu rozwiązania fundamentalne.

Metoda odchyłek ważonych prowadzi do następującego równania

$$\int_{t^0}^{t^F} \int_{D_1} (a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial T_1}{\partial t}) T_1^* dxdt + \int_{t^0}^{t^F} \int_{D_2} (a_4 \frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2} - \frac{\partial T_4}{\partial t}) T_4^* dxdt = 0 \tag{3.14}$$

gdzie $[t^0, t^F]$ jest rozważanym przedziałem czasu, $a_1 = \lambda_1 / \rho_1 c_1$, $a_4 = \lambda_4 / \rho_4 c_4$, T_1^* , T_4^* są tzw. rozwiązaniami fundamentalnymi. Dla jednowymiarowego zadania i obszarów zorientowanych w prostokątnym układzie współrzędnych mają one

postać [3,4,5]

$$T_m^* = \begin{cases} \exp[-r^2/4a_m(t^F-t)]/2\sqrt{\pi a_m(t^F-t)} & , \quad t \leq t^F \\ 0 & , \quad t > t^F \end{cases} \quad , \quad m=1,4, \quad (3.15)$$

gdzie $r=|x-\xi|$ jest odległością między punktem ξ , w którym umieszczone jest źródło ciepła i rozważanym punktem x , $x, \xi \in D_m$, $m=1,4$.

Równanie (3.14) jest spełnione kiedy

$$\int_{t_0}^{t^F} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(a \frac{\partial^2 T_m^*}{\partial x^2} - \frac{\partial T_m^*}{\partial t} \right) dx dt = 0, \quad (3.16)$$

gdzie dla obszaru D_1 $a=a_1$, $T^*=T_1^*$ oraz $n=0$, natomiast dla obszaru D_2 $a=a_4$, $T^*=T_4^*$ oraz $n=1$.

Można łatwo sprawdzić, że

$$q_m^* = -\lambda_m \frac{\partial T_m^*}{\partial x} = \frac{\lambda_m (x-\xi)}{4\pi^{1/2} a_m^{3/2} (t^F-t)^{3/2}} \exp[-r^2/4a_m(t^F-t)] \quad , \quad m=1,4. \quad (3.17)$$

Całkując dwukrotnie przez części względem zmiennej x pierwsze składniki równań (3.16) i całkując przez części względem zmiennej t drugie składniki tych równań otrzymuje się

$$\frac{1}{\rho c} \int_{t_0}^{t^F} (Tq^* - T^*q) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} dt + \int_{t_0}^{t^F} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(a \frac{\partial^2 T_m^*}{\partial x^2} + \frac{\partial T_m^*}{\partial t} \right) T dx dt - \int_{x_n}^{x_{n+1}} T^* T \Big|_{t_0}^{t^F} dx = 0, \quad (3.18)$$

$n=0,1.$

Wykorzystując własności rozwiązań fundamentalnych [6] a w szczególności

$$a \frac{\partial^2 T^* (\xi, x, t^F, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial T^* (\xi, x, t^F, t)}{\partial t} = -\Delta(\xi, x) \Delta(t^F, t) \quad , \quad (3.19)$$

$$\lim_{t \rightarrow t^F} T^* (\xi, x, t^F, t) = \Delta(\xi, x), \quad (3.20)$$

oraz [7]

$$\int_{t^0}^{t^F} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(a \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \frac{\partial T^*}{\partial t} \right) T dx dt = -T(\xi, t^F), \quad (3.21)$$

uzyskuje się równania całkowe w postaci

$$\begin{aligned} T_1(\xi, t^F) + \frac{1}{\rho_1 c_1} \int_{t^0}^{t^F} T_1^*(\xi, x, t^F, t) q_1(x, t) \Big|_{x_0}^{x_1} dt = \\ = \frac{1}{\rho_1 c_1} \int_{t^0}^{t^F} q_1^*(\xi, x, t^F, t) T_1(x, t) \Big|_{x_0}^{x_1} dt + \int_{x_0}^{x_1} T_1^*(\xi, x, t^F, t^0) T_1(x, t^0) dx, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} T_4(\xi, t^F) + \frac{1}{\rho_4 c_4} \int_{t^0}^{t^F} T_4^*(\xi, x, t^F, t) q_4(x, t) \Big|_{x_1}^{x_2} dt = \\ = \frac{1}{\rho_4 c_4} \int_{t^0}^{t^F} q_4^*(\xi, x, t^F, t) T_4(x, t) \Big|_{x_1}^{x_2} dt + \int_{x_1}^{x_2} T_4^*(\xi, x, t^F, t^0) T_4(x, t^0) dx. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Tak więc, zmienne w czasie pole temperatury w podobzariach D_1 i D_4 opisane układem równań różniczkowych (3.9) z warunkami brzegowymi (3.10) - (3.12) i warunkiem początkowym (3.13) może być opisane układem równań całkowych (3.22)-(3.23). Do równań tych wprowadza się znane warunki brzegowe (3.10) - (3.12) i warunek początkowy (3.13).

Podsumowując, układ równań całkowych (3.22)-(3.23) jest równoważną formą opisu matematycznego przedstawionego równaniami (3.9)-(3.13) i ta właśnie forma jest wykorzystywana w metodzie elementów brzegowych.

3.2. I SCHEMAT METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH DLA JEDNOWYMIAROWEGO NIEUSTALO- NEGO PRZEPŁYNU CIEPŁA (DLA OBSZARÓW NIEJEDNORODNYCH)

Niech t^{f-1} i t^f oznaczają dwa wyróżnione punkty siatki czasu Δ_t : $0=t^0 < t^1 < \dots < t^{f-1} < t^f < \dots < t^F < \infty$ i $\Delta t = t^f - t^{f-1}$.

Pierwszy schemat MEB dla równań parabolicznych [3] pozwala otrzymać pole temperatury dla t^f poziomu czasu tylko na podstawie znanych wartości temperatury dla t^{f-1} poziomu czasu. Tak więc przejście od t^{f-1} do t^f jest traktowane za każdym razem jako nowe zadanie, a wyznaczone pole temperatury stanowi warunek pseudopoczątkowy dla następnego kroku obliczeń.

Numeryczna aproksymacja równań (3.22)-(3.23) ma w tym przypadku postać

$$T(\xi, t^f) + \frac{1}{\rho c} \int_{t^{f-1}}^{t^f} T^*(\xi, x, t^f, t) dt q(x, t^f) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\rho c} \int_{t^{f-1}}^{t^f} q^*(\xi, x, t^f, t) dt T(x, t^f) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} + \int_{x_n}^{x_{n+1}} T^*(\xi, x, t^f, t^{f-1}) T(x, t^{f-1}) dx,$$

n=0, 1 (3.24)

gdzie $x_0 < \xi < x_1$ dla n=0 i $x_1 < \xi < x_2$ dla n=1.

Całkowanie po czasie można wykonać metodami analitycznymi:

$$\int_{t^{f-1}}^{t^f} T^*(\xi, x, t^f, t) dt = \sqrt{\Delta t / \pi a} \exp(-r^2 / 4a\Delta t) - r \operatorname{erfc}(r / 2\sqrt{a\Delta t}) / 2a, \quad (3.25)$$

$$\int_{t^{f-1}}^{t^f} q^*(\xi, x, t^f, t) dt = \lambda \operatorname{sgn}(x - \xi) \operatorname{erfc}(r / 2\sqrt{a\Delta t}) / 2a, \quad (3.26)$$

przy czym $\operatorname{erfc}(\cdot) = 1 - \operatorname{erf}(\cdot)$.

Wstawiając (3.25), (3.26) do (3.24) otrzymuje się

$$T(\xi, t^f) = \left[\frac{\operatorname{sgn}(x - \xi)}{2} \operatorname{erfc}(r / 2\sqrt{a\Delta t}) T(x, t^f) \right] \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} -$$

$$- \left[\sqrt{\Delta t / \pi \lambda \rho c} \exp(-r^2 / 4a\Delta t) - \frac{r}{2\lambda} \operatorname{erfc}(r / 2\sqrt{a\Delta t}) \right] q(x, t^f) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi a \Delta t}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} T(x, t^{f-1}) \exp(-r^2 / 4a\Delta t) dx, \quad n=0, 1. \quad (3.27)$$

Aby wyznaczyć brakujące strumienie ciepła lub temperatury na brzegach pod-

obszarów D_1 i D_4 przechodzi się z punktem źródła ξ do brzegów odpowiednich podobszarów i otrzymuje się w ten sposób cztery całkowe równania brzegowe.

I tak dla $\xi \rightarrow x_n^-$ i $\xi \rightarrow x_{n+1}^+$, $n=0,1$ układ równań (3.27) przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} g_{11}^1 & g_{12}^1 & 0 & 0 \\ g_{21}^1 & g_{22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{11}^4 & g_{12}^4 \\ 0 & 0 & g_{21}^4 & g_{22}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(x_0, t^f) \\ q_1(x_1, t^f) \\ q_4(x_1, t^f) \\ q_4(x_2, t^f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 & 0 & 0 \\ h_{21}^1 & h_{22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{11}^4 & h_{12}^4 \\ 0 & 0 & h_{21}^4 & h_{22}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(x_0, t^f) \\ T_1(x_1, t^f) \\ T_4(x_1, t^f) \\ T_4(x_2, t^f) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_1^4 \\ P_2^4 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

gdzie

$$g_{21}^n = \frac{L}{2\lambda} \operatorname{erfc}(L/\sqrt{4a\Delta t}) - \sqrt{\Delta t/\pi\lambda\rho c} \exp(-L^2/4a\Delta t), \quad g_{12}^n = -g_{21}^n,$$

$$g_{11}^n = -\sqrt{\Delta t/\pi\lambda\rho c}, \quad g_{22}^n = -g_{11}^n,$$

$$h_{11}^n = h_{22}^n = -0.5, \quad h_{12}^n = h_{21}^n = 0.5 \operatorname{erfc}(L/2\sqrt{a\Delta t}),$$

$$P_1^n = \frac{1}{2\sqrt{\pi a \Delta t}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} T(x, t^{f-1}) \exp[-(x-x_n)^2/4a\Delta t] dx, \quad (3.29)$$

$$P_2^n = \frac{1}{2\sqrt{\pi a \Delta t}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} T(x, t^{f-1}) \exp[-(x-x_{n+1})^2/4a\Delta t] dx,$$

przy czym $a = a_1$, $\lambda = \lambda_1$, $\rho = \rho_1$, $c = c_1$, $L = |x_1 - x_0|$ dla obszaru D_1 ($m=1$)
i $a = a_4$, $\lambda = \lambda_4$, $\rho = \rho_4$, $c = c_4$, $L = |x_2 - x_1|$ dla obszaru D_4 ($m=4$).

Warunek brzegowy IV rodzaju (3.12) może być napisany w następującej postaci

$$\begin{cases} q(x_1, t^f) = -\lambda_1 \frac{\partial T_1(x_1, t^f)}{\partial x} = -\lambda_4 \frac{\partial T_4(x_1, t^f)}{\partial x}, \\ T_4(x_1, t^f) = T_1(x_1, t^f) - q(x_1, t^f)R(T_1, T_4) \end{cases} \quad (3.30)$$

Ta postać zapisu warunku brzegowego IV rodzaju pozwala na opracowanie jed-

nej procedury modelującej obydwaj warianty tego warunku, ponieważ z układu równań można wówczas obliczyć $q(x_1, t^f)$ i $T_1(x_1, t^f)$, a z warunku (3.30b) temperaturę $T_4(x_1, t^f)$ (oczywiście dla $R=0$ $T_1(x_1, t^f) = T_4(x_1, t^f)$).

Po wprowadzeniu (3.30) do (3.28) otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} g_{11}^1 & -h_{12}^1 & g_{12}^1 & 0 \\ g_{21}^1 & -h_{22}^1 & g_{22}^1 & 0 \\ 0 & -h_{11}^4 & g_{11}^4 + h_{11}^4 R & g_{12}^4 \\ 0 & -h_{21}^4 & g_{21}^4 + h_{21}^4 R & g_{22}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(x_0, t^f) \\ T_1(x_1, t^f) \\ q(x_1, t^f) \\ q_4(x_2, t^f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}^1 & 0 \\ h_{21}^1 & 0 \\ 0 & h_{12}^4 \\ 0 & h_{22}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(x_0, t^f) \\ T_4(x_2, t^f) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_1^4 \\ P_2^4 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Całki P_1^m, P_2^m , $m=1,4$ można obliczyć numerycznie. W tym celu przedział całkowania $[x_n, x_{n+1}]$ dzieli się na pewną liczbę podprzedziałów i całkę w przedziale $[x_n, x_{n+1}]$ zastępuje się sumą całek w tych podprzedziałach. Wygodnie jest zastosować transformację współrzędnych tak, aby liczyć całki po zmiennej η , $\eta \in [-1, 1]$, ponieważ dla tego typu całek można stosować kwadratury Gaussa i pewne powtarzalne procedury numeryczne [8].

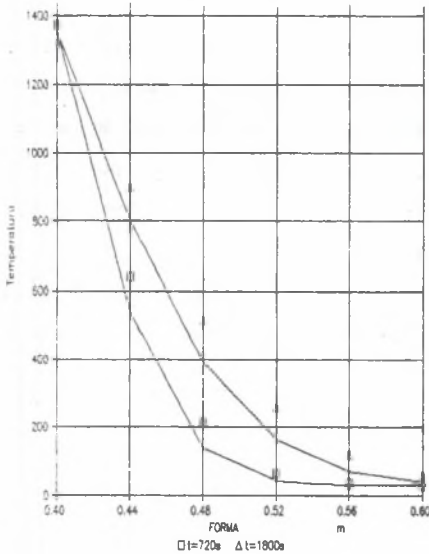
Jak już wcześniej wspomniano, z układu równań (3.31) wyznacza się $T_1(x_1, t^f)$, $q(x_1, t^f)$ i w zależności od rodzaju przyjętych warunków brzegowych dla $x=x_0$ i $x=x_2$ dwie nieznanne z czterech wartości $T_1(x_0, t^f)$, $T_4(x_2, t^f)$, $q_1(x_0, t^f)$, $q_4(x_2, t^f)$.

Po rozwiązaniu układu równań (3.31) np. metodą eliminacji Gaussa z wyborem elementu dominującego pole temperatury w węzłach wewnętrznych ξ oblicza się z równań (3.27), przy czym dobór punktów, w których chcemy obliczać temperaturę jest zupełnie dowolny.

3.3. IDENTYFIKACJA POLA TEMPERATURY PRZY WYKORZYSTANIU I SCHEMATU MEB W POD- OBSZARACH D_1 I D_4

Podstawową trudnością uzyskania w miarę dokładnego rozwiązania dla obszarów niejednorodnych z istotnie różnymi parametrami termofizycznymi są problemy związane z niemożnością doboru kroku czasu Δt , który zapewniłby

korzystne do całkowania numerycznego wartości argumentów funkcji podcałkowych. Wiadomo jest z badań prezentowanych w literaturze np. [9], że dla zadań niestacjonarnych dla określonego współczynnika dyfuzji cieplnej i przyjętej dyskretyzacji obszaru istnieje pewien przedział "dopuszczalnych" kroków czasu - dopuszczalnych w tym sensie, że poza nimi błąd metody szybko rośnie. Należy tu podkreślić, że w cytowanej wyżej pracy [9] zamieszczono nawet odpowiednie nomogramy do określenia właściwych interwałów czasu (dla siatek kwadratowych), przy czym wydaje się, że zostały one skonstruowane na podstawie odpowiednich eksperymentów numerycznych, a nie analizy teoretycznej, być może badania teoretyczne na obecnym etapie rozwoju matematyki są w tym zakresie niemożliwe.



Rys.3.3. MEB-stały krok siatki.

Fig.3.3 BEM-constant step of mesh

Przykładem dużych różnic między rozwiązaniem analitycznym i przybliżonym dla dwóch podobszarów (staliwo i masa magnezytowa) są wyniki przedstawione na rys.3.3-na którym przedstawiono przykłady czasoprzestrzennych pól temperatury w obszarze masy formierskiej.

Obszary pokryto siatką o stałym kroku $h = 0.04$ [m], natomiast krok czasu wynosił $\Delta t = 180$ [s] (jest to krok odpowiedni dla obszaru metalu).Mimo dobrej identyfikacji temperatury styku, w obszarze masy pojawiają się duże błędy rozwiązania numerycznego .

Tak więc należy zastanowić się nad możliwościami ulepszeń algorytmu MEB pozwalającymi wyeliminować duże błędy w obszarze, dla którego przyjęty krok Δt nie jest optymalny.

Jeden z takich pomysłów prezentują C.Hong, T.Umeda i Y.Kimura w pracy [10]. Założono, że dla podobszaru D_1 poprawny jest krok czasu Δt_1 (co oznacza, że iloczyn $a_1 \Delta t_1$ jest wybrany z przedziału dopuszczalnych wartości), natomiast

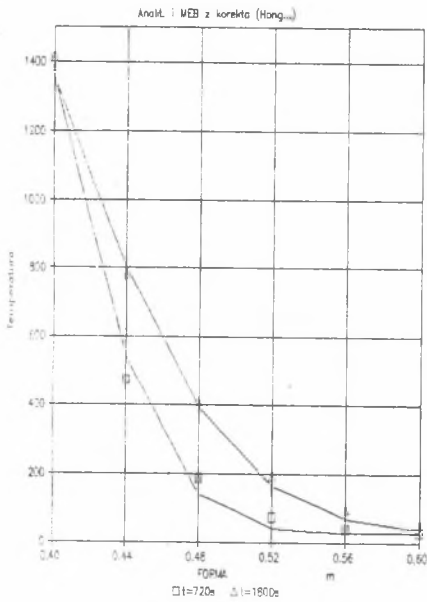
dla podobszaru D_4 , iloczyn $a_4 \Delta t_4$ istotnie różni się od $a_1 \Delta t_1$. Przyjęto więc fikcyjny materiał taki, że $\lambda_4 \Delta t_4 / c_4 \rho_4 = \lambda_1 \Delta t_1 / \hat{c}_4 \rho_4$ lub $\lambda_4 \Delta t_4 / c_4 \rho_4 = \lambda_1 \Delta t_1 / c_4 \hat{\rho}_4$. Umowne ciepło właściwe \hat{c}_4 (lub gęstość masy $\hat{\rho}_4$) tego materiału wynosi $\hat{c}_4 = c_4 \Delta t_1 / \Delta t_4$ ($\hat{\rho}_4 = \rho_4 \Delta t_1 / \Delta t_4$).

Po wyznaczeniu pola temperatury w podobszarach D_1 i \hat{D}_4 na t^f poziomie czasu koryguje się pole temperatury \hat{T} w \hat{D}_4 z następujących równań

$$T_1^f = T_1^{f-1} + (\hat{T}_1^f - T_1^{f-1}) \hat{c}_4 / c_1, \quad (3.32)$$

lub
$$T_1^f = T_1^{f-1} + (\hat{T}_1^f - T_1^{f-1}) \hat{\rho}_4 / \rho_1, \quad (3.33)$$

przy czym wskaźnik "i" identyfikuje węzeł, w którym przeprowadzono korektę. Ostatnie dwa wzory wynikają z bilansu energii dla otoczenia węzła x_i obszaru D .



Rys.3.4. MEB-korekta a_4

Fig.3.4 BEM-correction a_4

Metodę przedstawioną w pracy [10] poddano weryfikacji z rozwiązaniem analitycznym. Obszar metalu i formy podzielono na elementy o kroku $h=0.04$ [m], natomiast krok czasu $\Delta t=180$ [s].

Wyniki obliczeń numerycznych są fizycznie poprawne ale niedokładne (rys.3.4-obszar D_4).

Autorzy nie zauważyli jednego istotnego faktu. Sposób korygowania pola temperatury na bazie lokalnych bilansów energii jest w pełni przekonywujący, ale wprowadzenie fikcyjnych parametrów podobszaru \hat{D}_4 powoduje niepoprawną identyfikację temperatury styku wynikającą z różnicy współczynników akumulacji b_4 i \hat{b}_4 .

Nie ma też możliwości efektywnego poprawienia temperatury na brzegu, bo jej zmiana w stosunku do obliczonej spowodowałaby nieciągłość pola temperatury

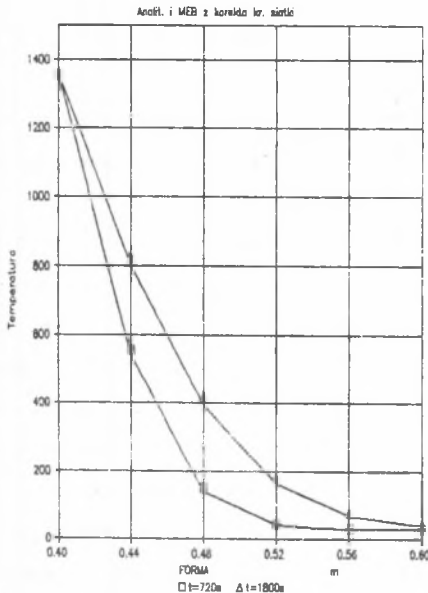
na styku metal-forma. Z kolei sztuczne usunięcie tej nieciągłości przez skorygowanie temperatury od strony metalu nie jest niczym uzasadnione. Reasumując, niedokładne określenie temperatury kontaktu powoduje przenoszenie się błędów w głąb obszaru D_4 i błąd ten utrzymuje się przez cały czas obliczeń.

W niniejszej pracy zaproponowano dwa inne sposoby podejścia do modelowania pola temperatury w obszarach niejednorodnych.

Idea pierwszego z nich wynika z faktu, że równanie przewodnictwa zapisane we współrzędnych bezwymiarowych zawiera w sobie czas zredukowany tzw. liczbę Fouriera i właściwy dobór kroku tej liczby przy budowaniu siatki czasu zapewnia pożądaną dokładność obliczeń.

Jeżeli dla obszaru D_1 krok $\Delta Fo_1 = a_1 \Delta t_1 / h_1^2$ jest krokiem właściwym, to dla obszaru D_4 we współrzędnych bezwymiarowych obowiązuje ten sam krok $\Delta Fo_4 = \Delta Fo_1$. Z powyższej równości wynika relacja między krokami siatki w obu podobszarach

$$a_1 \Delta t_1 / h_1^2 = a_4 \Delta t_1 / h_4^2 \longrightarrow h_4 = h_1 \sqrt{a_4 / a_1} . \quad (3.34)$$



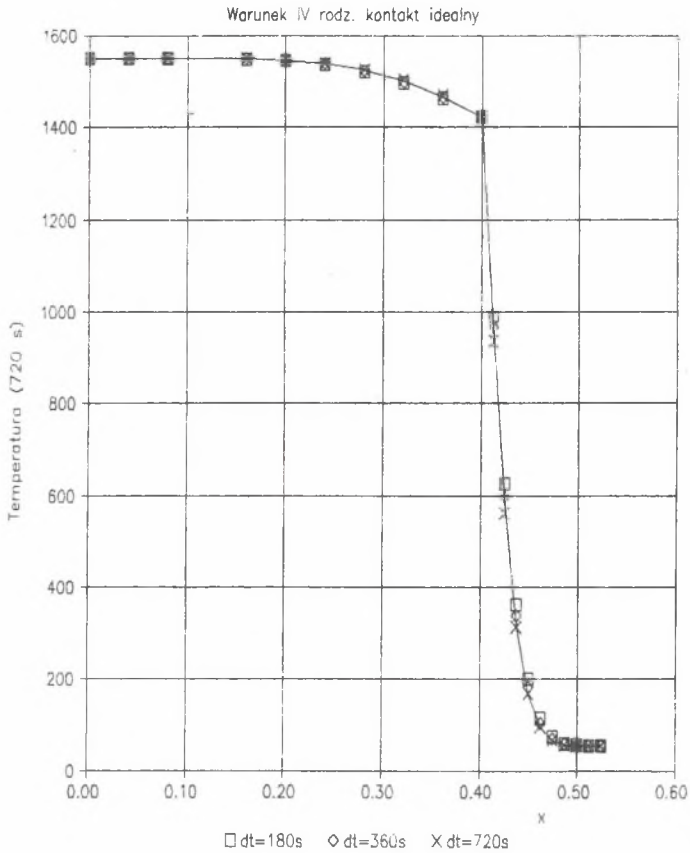
Rys.3.5. MEB-korekta kroku siatki

Fig.3.5. BEM-correction of step mesh

Tak więc właściwa dyskretyzacja obszaru D_4 powinna zapewnić jednokową dokładność modelu numerycznego dla obu podobszarów. Dla typowych mas formierskich kryterium (3.34) wskazuje na potrzebę 2, 3-krotnego zmniejszenia kroku siatki h_4 w obszarze D_4 w stosunku do kroku siatki h_1 w obszarze D_1 (żeliwo, staliwo).

Na rys.3.5 pokazano rozwiązanie analityczne i numeryczne dla płyty stalowej stygnącej w masie szybko przewodzącej o parametrach $\lambda_4 = 2.6$ [W/mK], $\rho_4 = 1750$ [kg/m³], $c_4 = 1000$ [W/kgK], przy czym krzywe stygnięcia dotyczą obszaru D_4 .

Rys. 3.6 i 3.7 prezentują z kolei przebiegi temperatury w obu podobszarach po czasie $t=720$ i $t=1440$ [s] wyznaczone dla różnych kroków Δt (linią ciągłą zaznaczono rozwiązania analityczne).

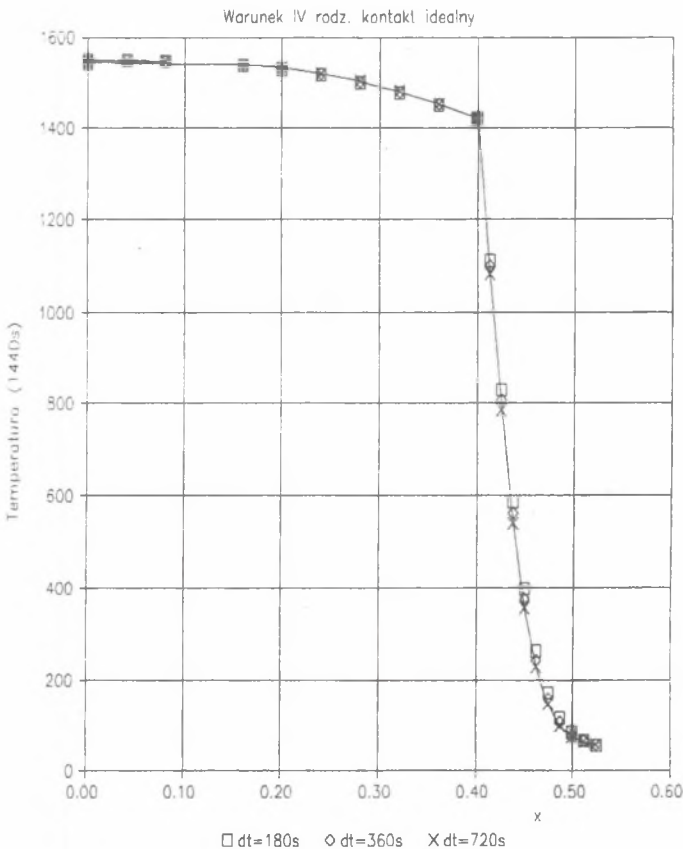


Rys. 3.6. Pole temperatury po czasie $t=720$ [s]

Fig. 3.6. Temperature field after the time $t=720$ [s]

Przedstawiona wyżej idea jest atrakcyjna, ale ma też swoje wady. Przede wszystkim wymaga ona zagęszczenia siatek w podobszarze, o którym informacje nie są szczególnie istotne przy projektowaniu technologii odlewniczych i w sumie uzyskuje się szczegółowy rozkład temperatur w peryferyjnych ob-

szarach układu odlew-forma. Istotnie rośnie liczba węzłów wyróżnionych w obszarze D_4 , co znacznie wydłuża czas symulacji numerycznej. Dla zadań dwu lub trójwymiarowych mogą istnieć dodatkowe trudności z wygenerowaniem siatki spełniającej przedstawiony wyżej warunek. Można wyobrazić sobie obiekty, dla których taki podział nie przedstawia większych trudności (zagęszczenie siatki powinno następować w kierunku strumienia ciepła) ale np. dla węzłów cieplnych typu L, T, X zagęszczanie siatki w obszarze masy formierskiej w pobliżu naroża odlewu prowadziłyby do bardzo nietypowych kształtów elementów wewnętrznych obszaru.



Rys. 3.7. Pole temperatury po czasie $t=1440[s]$

Fig. 3.7. Temperature field after the time $t=1440[s]$

W tej sytuacji podjęto zupełnie inną próbę modelowania zadań z warunkami IV rodzaju. Prezentacja tego algorytmu wymaga wprowadzenia do dalszych rozważań tzw. II schematu metody elementów brzegowych, który zostanie wyjaśniony na przykładzie zadania jednowymiarowego.

3.4. II SCHEMAT METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH DLA JEDNOWYMIAROWEGO NIEUSTALO- NEGO PRZEPŁYWU CIEPŁA (DLA OBSZARÓW NIEJEDNORODNYCH)

W tym rozdziale zostanie przedstawiona inna metoda rozwiązania zadania opisanego równaniami całkowymi (3.22), (3.23) nazywana drugim schematem metody elementów brzegowych.

Drugi schemat metody elementów brzegowych wymaga pamiętania wyznaczonych na brzegu obszarów D_1 i D_4 wartości temperatur i strumieni ciepła dla poziomów czasu t^0, t^1, \dots, t^{F-1} i na ich podstawie określana jest temperatura dla t^F poziomu czasu.

Tak więc w tym przypadku numeryczna aproksymacja równań (3.22)-(3.23) ma postać

$$\begin{aligned}
 & T(\xi, t^F) + \frac{1}{\rho c} \sum_{f=1}^F \int_{t^{f-1}}^{t^f} T^*(\xi, x, t^f, t) dt \, q(x, t^f) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} = \\
 & = \frac{1}{\rho c} \sum_{f=1}^F \int_{t^{f-1}}^{t^f} q^*(\xi, x, t^f, t) dt \, T(x, t^f) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} + \int_{x_n}^{x_{n+1}} T^*(\xi, x, t^f, t^0) T(x, t^0) dx, \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad n=0, 1 \qquad (3.35)
 \end{aligned}$$

gdzie jak poprzednio $x_0 < \xi < x_1$ dla $n=0$ i $x_1 < \xi < x_2$ dla $n=1$.

Całki po czasie można obliczyć metodami analitycznymi

$$\begin{aligned}
 \int_{t^{f-1}}^{t^f} T^*(\xi, x, t^f, t) dt &= -\sqrt{(t^f - t^f)/\pi a} \exp(-z^f) + \sqrt{(t^f - t^{f-1})/\pi a} \exp(-z^{f-1}) \\
 &= -\frac{r}{2a} [\operatorname{erf}(\sqrt{z^f}) - \operatorname{erf}(\sqrt{z^{f-1}})] , \qquad (3.36)
 \end{aligned}$$

$$\int_{t^{f-1}}^{t^f} q^*(\xi, x, t^f, t) dt = \frac{\operatorname{sgn}(x-\xi)}{2a} [\operatorname{erf}(\sqrt{z^f}) - \operatorname{erf}(\sqrt{z^{f-1}})] , \qquad (3.37)$$

gdzie $z^f = r^2/4a(t^F - t^f)$.

Wstawiając (3.36), (3.37) do (3.35) otrzymuje się

$$T(\xi, t^f) = \sum_{f=1}^F \frac{\operatorname{sgn}(x-\xi)}{2} [\operatorname{erf}(\sqrt{z^f}) - \operatorname{erf}(\sqrt{z^{f-1}})] T(x, t^f) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} -$$

$$\sum_{f=1}^F \frac{r}{2\lambda} \left[\exp(-z^{f-1})/\sqrt{\pi z^{f-1}} - \exp(-z^f)/\sqrt{\pi z^f} - \operatorname{erf}(\sqrt{z^f}) + \operatorname{erf}(\sqrt{z^{f-1}}) \right] q(x, t^f) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}}$$

$$+ \int_{x_n}^{x_{n+1}} T(\xi, x, t^f, t^0) T(x, t^0) dx. \quad n=0, 1 \quad (3.38)$$

Niech $\Delta t = t^f - t^{f-1} = \text{const}$. Dla uproszczenia zapisu dalszych wzorów wprowadzono następujące oznaczenia

$$g_{11}^f = \sqrt{f\Delta t/\pi\lambda\rho c^1} - \sqrt{(f+1)\Delta t/\pi\lambda\rho c^1}, \quad g_{22}^f = -g_{11}^f,$$

$$g_{12}^f = -\sqrt{f\Delta t/\pi\lambda\rho c^1} \exp(-L^2/4af\Delta t) - \sqrt{(f+1)\Delta t/\pi\lambda\rho c^1} \exp(-L^2/4a(f+1)\Delta t) -$$

$$-\frac{L}{2\lambda} \{ \operatorname{erf}(L/2\sqrt{af\Delta t}) - \operatorname{erf}[L/2\sqrt{a(f+1)\Delta t}] \}, \quad g_{21}^f = -g_{12}^f,$$

$$h_{11}^f = h_{22}^f = -0.5, \quad h_{12}^f = h_{21}^f = 0.5 \{ \operatorname{erf}(L/2\sqrt{af\Delta t}) - \operatorname{erf}[L/2\sqrt{a(f+1)\Delta t}] \},$$

$$f=1, 2, \dots, F-1 \quad (3.39)$$

$$g_{11}^0 = \sqrt{\Delta t/\pi\lambda\rho c^1}, \quad g_{22}^0 = -g_{11}^0,$$

$$g_{12}^0 = -\sqrt{\Delta t/\pi\lambda\rho c^1} \exp(-L^2/4a\Delta t) - \frac{L}{2\lambda} \operatorname{erfc}(L/2\sqrt{a\Delta t}), \quad g_{21}^0 = -g_{12}^0,$$

$$h_{11}^0 = h_{22}^0 = 0, \quad h_{12}^0 = h_{21}^0 = 0.5 \operatorname{erfc}(L/2\sqrt{a\Delta t}).$$

Aby wyznaczyć z równań (3.38) nieznanne wartości temperatury lub strumieni ciepła na brzegach podobszarów D_1 i D_4 , przechodzi się z punktem źródła ξ w równaniach (3.38) do brzegów odpowiednich podobszarów i otrzymuje się w ten sposób cztery brzegowe równania całkowe.

I tak dla $\xi \rightarrow x_n^-$ i $\xi \rightarrow x_{n+1}^+$, $n=0,1$ oraz po wprowadzeniu warunku brzegowego IV rodzaju na styku podobszarów D_1 i D_4 (wzór (3.30)) układ równań (3.38) przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} g_{11}^{0,1} & -h_{12}^{0,1} & g_{12}^{0,1} & 0 \\ g_{21}^{0,1} & -h_{22}^{0,1} & g_{22}^{0,1} & 0 \\ 0 & -h_{11}^{0,4} & g_{11}^{0,4} + h_{11}^{0,4} R & g_{12}^{0,4} \\ 0 & -h_{21}^{0,4} & g_{21}^{0,4} + h_{21}^{0,4} R & g_{22}^{0,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(x_0, t^F) \\ T_1(x_1, t^F) \\ q(x_1, t^F) \\ q_4(x_2, t^F) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}^{0,1} & 0 \\ h_{21}^{0,1} & 0 \\ 0 & h_{12}^{0,4} \\ 0 & h_{22}^{0,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(x_0, t^F) \\ T_4(x_2, t^F) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{f=1}^{F-1} \begin{bmatrix} h_{11}^{f,1} & 0 \\ h_{21}^{f,1} & 0 \\ 0 & h_{12}^{f,4} \\ 0 & h_{22}^{f,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(x_0, t^{F-f}) \\ T_4(x_2, t^{F-f}) \end{bmatrix} - \sum_{f=1}^{F-1} \begin{bmatrix} g_{11}^{f,1} & 0 \\ g_{21}^{f,1} & 0 \\ 0 & g_{12}^{f,4} \\ 0 & g_{22}^{f,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(x_0, t^{F-f}) \\ q_4(x_2, t^{F-f}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_1^4 \\ P_2^4 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Górne wskaźniki po przecinku oznaczają rozpatrywane obszary D_1 i D_4 . Pozostałe oznaczenia są takie same jak w rozdziale (3.2).

Porozwiązaniu układu równań (3.40) np. metodą eliminacji Gaussa z wyborem elementu dominującego, brzegowe wartości temperatury i strumieni ciepła (dla $x=x_0$, $x=x_1$ oraz $x=x_2$) są już znane i pole temperatury w dowolnie wybranych węzłach wewnętrznych ξ oblicza się z równań (3.38).

II schemat metody elementów brzegowych w odróżnieniu od I schematu wykorzystuje wartości temperatury i strumieni ciepła z wszystkich poprzednio liczonych kroków czasowych tzn. dla poziomów czasu t^0, t^1, \dots, t^{F-1} i warunków początkowy dla $t=0$. Schemat ten jest uogólnieniem I schematu, ponieważ dla $F=1$ przedstawione w tym rozdziale równania pokrywają się z prezentowanymi w rozdziale 3.2.

W wielu często spotykanych problemach praktycznych II schemat MEB posiada niezaprzeczalne zalety, które będą przedstawione i wykorzystywane w dalszej części pracy.

3.5. IDENTYFIKACJA POLA TEMPERATURY W NIEJEDNORODNYCH OBSZARACH D_1 I D_4 PRZY WYKORZYSTANIU I I II SCHEMATU METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

Powracamy do rozważań prezentowanych w rozdziale 3.3 i dotyczących metod numerycznego obliczania rozkładu temperatury w obszarach niejednorodnych o zróżnicowanych parametrach termofizycznych. Poprzednio obok cytowanego z literatury sposobu wprowadzania tzw. zastępczego ciepła właściwego (lub zastępczej gęstości masy) dla obszaru D_4 , dla którego krok czasu Δt nie jest optymalny, przedstawiono własną ideę zagęszczania siatek w tym obszarze. Ten ostatni sposób obliczeń dawał bardzo dobre wyniki (rozwiązanie porównywano z rozwiązaniem analitycznym), ale miał pewne (omówione wcześniej) istotne wady.

Niżej przedstawiony zostanie inny sposób modelowania zadań z warunkami brzegowymi IV rodzaju, który również daje bardzo dobre rezultaty a ponadto nie posiada mankamentów poprzednio prezentowanych prób rozwiązywania tego typu zadań.

Nowy pomysł sprowadza się do połączenia I i II schematu metody elementów brzegowych tzn. rozkład temperatury w obszarze D_1 jest wyznaczany na podstawie I schematu a w obszarze D_4 na podstawie II. Konieczność zachowania I schematu dla obszaru D_1 , który w dalszej części pracy będzie identyfikowany z obszarem odlewu zostanie wyjaśniona w rozdziałach następnych.

Numeryczna aproksymacja równań (3.22) i (3.23) ma postać

$$\begin{aligned}
 & T_1(\xi, t^F) + \frac{1}{\rho_1 c_1} \int_{t^{F-1}}^{t^F} T_1^*(\xi, x, t^F, t) dt q_1(x, t^F) \Big|_{x_0}^{x_1} = \\
 & = \frac{1}{\rho_1 c_1} \int_{t^{F-1}}^{t^F} q_1^*(\xi, x, t^F, t) dt T_1(x, t^F) \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} T_1^*(\xi, x, t^F, t^{F-1}) T_1(x, t^{F-1}) dx,
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
 & T_4(\xi, t^F) + \frac{1}{\rho_4 c_4} \sum_{f=1}^F \int_{t^{f-1}}^{t^f} T_4^*(\xi, x, t^F, t) dt q_4(x, t^f) \Big|_{x_1}^{x_2} = \\
 & = \frac{1}{\rho_4 c_4} \sum_{f=1}^F \int_{t^{f-1}}^{t^f} q_4^*(\xi, x, t^f, t) dt T_4(x, t^f) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} T_4^*(\xi, x, t^F, t^0) T_4(x, t^0) dx.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Połączenie schematów zostanie pokazane na przykładzie zadania jednowymiarowego opisanego równaniami (3.41) i (3.42), przy czym warunek początkowy przyjęto w postaci

$$t=0: \quad T_1(x,t)=T_p - T_{p_f}, \quad T_4(x,t) = 0. \quad (3.43)$$

Warunek postulujący stałą wartość temperatury w obszarach odlewu i formy jest dość typowy w zagadnieniach termodynamiki procesów odlewniczych, dla których w większości przypadków przyjmuje się dla chwili $t=0$ temperaturę zalewania dla obszaru odlewu i temperaturę początkową formy dla pozostałych podobszarów układu.

Zerowy warunek początkowy w obszarze D_4 powoduje zerowanie się całki po x w równaniu (3.42) co pozwala uniknąć dyskretyzacji obszaru D_4 . Jest to zaleta szczególnie istotna w zadaniach dwu i trójwymiarowych.

Układ równań, z którego wyznacza się nieznane wartości temperatury lub strumieni ciepła na brzegach podobszarów D_1 i D_4 ma postać

$$\begin{bmatrix} g_{11}^1 & -h_{12}^1 & g_{12}^1 & 0 \\ g_{21}^1 & -h_{22}^1 & g_{22}^1 & 0 \\ 0 & -h_{11}^{0,4} & g_{11}^{0,4} + h_{11}^{0,4} R & g_{12}^{0,4} \\ 0 & -h_{21}^{0,4} & g_{21}^{0,4} + h_{21}^{0,4} R & g_{22}^{0,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(x_0, t^F) \\ T_1(x_1, t^F) \\ q(x_1, t^F) \\ q_4(x_2, t^F) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}^1 & 0 \\ h_{21}^1 & 0 \\ 0 & h_{12}^{0,4} \\ 0 & h_{22}^{0,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(x_0, t^F) \\ T_4(x_2, t^F) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ \sum_{f=1}^{F-1} [h_{12}^{f,4} T_4(x_2, t^{F-f}) - g_{12}^{f,4} q_4(x_2, t^{F-f})] \\ \sum_{f=1}^{F-1} [h_{22}^{f,4} T_4(x_2, t^{F-f}) - g_{22}^{f,4} q_4(x_2, t^{F-f})] \end{bmatrix}$$

(3.44)

Wszystkie oznaczenia wprowadzone w rozdziałach 3.2 i 3.4 zostały zachowane.

Pole temperatury w węzłach wewnętrznych ξ obszaru D_1 oblicza się z równania

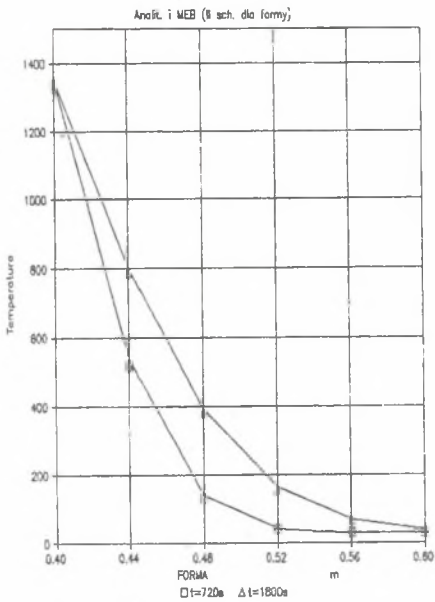
$$T_1(\xi, t^F) = \left[\frac{\text{sgn}(x-\xi)}{2} [\text{erfc}(r/2\sqrt{a_1 \Delta t^1})] T_1(x, t^F) \right] \Big|_{x_0}^{x_1} - \\ - [\sqrt{\Delta t}/\pi\lambda_1 \rho_1 c_1 \exp(-r^2/4a_1 \Delta t) - \frac{r}{2\lambda_1} \text{erfc}(r/2\sqrt{a_1 \Delta t^1})] q_1(x, t^F) \Big|_{x_0}^{x_1} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi a_1 \Delta t^1}} \int_{x_0}^{x_1} T_1(x, t^{F-1}) \exp(-r^2/4a_1 \Delta t) dx, \quad (3.45)$$

a dla węzłów wewnętrznych ξ obszaru D_4

$$T_4(\xi, t^F) = \sum_{f=1}^F \frac{\text{sgn}(x-\xi)}{2} [\text{erf}(\sqrt{z^f}) - \text{erf}(\sqrt{z^{f-1}})] T_4(x, t^f) \Big|_{x_1}^{x_2} - \\ - \sum_{f=1}^F \frac{r}{2\lambda_4} \left[\exp(-z^{f-1})/\sqrt{\pi z^{f-1}} - \exp(-z^f)/\sqrt{\pi z^f} - \text{erf}(\sqrt{z^f}) + \text{erf}(\sqrt{z^{f-1}}) \right] q_4(x, t^f) \Big|_{x_1}^{x_2}. \quad (3.46)$$

Do otrzymanych wartości temperatury w obszarach D_1 i D_4 dodaje się wcześniej odjętą stałą wartość T_{pocz} i w ten sposób otrzymuje się poszukiwany rozkład temperatury dla poziomu czasu t^F . Uzyskane rozwiązanie oraz wyniki obliczeń temperatury i strumieni ciepła na brzegach obszaru D_4 z poprzednich kroków czasu t^1, t^2, \dots, t^{F-1} stanowią punkt wyjścia dla wyznaczenia rozkładu temperatury dla następnego poziomu czasu.

Należy tutaj podkreślić, że nie wymaga się obliczania temperatury w węzłach wewnętrznych podobozsaru, dla którego stosuje się II schemat MEB (równanie (3.42)), ponieważ te temperatury nie są wykorzystywane w następnym kroku obliczeń. Tak więc wyznaczanie wartości temperatury we wnętrzu obszaru D_4 jest w tym przypadku opcjonalne i nie ma żadnych ograniczeń (np. związanych z całkowaniem po wnętrzu jak w schemacie I - dobór niektórych punktów wewnętrznych był zdeterminowany podziałem na elementy wewnętrzne rozpatrywanego obszaru) dotyczących położenia punktów wewnętrznych $\xi \in D_4$.



Rys.3.8. MEB-II schemat dla D_4

Fig.3.8. BEM-2nd scheme for D_4

Zaproponowaną metodę wyznaczania pola temperatury w obszarach niejednorodnych na bazie połączenia I schematu MEB dla obszaru D_1 i II schematu dla obszaru D_2 poddano weryfikacji rozwiązaniem analitycznym.

Obszar metalu pokryto siatką o stałym kroku $h=0.04$ [m], natomiast w masie formierskiej liczone temperatury w punktach odległych od siebie o h .

Obliczenia testujące, których przykład pokazano na rys.3.8 potwierdzają dokładność i efektywność metody łączenia schematów.

Podsumowując należy stwierdzić, że z prezentowanych sposobów wyznaczania niestacjonarnego rozkładu temperatury w obszarach niejednorodnych o znacznie zróżnicowanych parametrach termofizycznych ten ostatni jest najbardziej atrakcyjny.

Skojarzenie dwóch schematów obliczeń w przypadku stałej temperatury początkowej podobszaru, dla którego stosuje się II schemat MEB, nie wymaga dyskretyzacji wnętrza tego podobszaru -co jest szczególnie istotne w zadaniach dwu- i trójwymiarowych. Takie podejście do rozwiązywania zadań dla obszarów niejednorodnych nie wymaga analizy poprawności argumentów funkcji podcałkowych związanych z parametrami termofizycznymi podobszaru D_4 .

3.6. OBLICZENIA POLA TEMPERATURY W NIEJEDNORODNYCH PODOBSZARACH D_1 I D_4 Z OPOREM CIEPLNYM STYKU

W tym rozdziale zostanie przedstawiony sposób wyznaczania niestacjonarnego pola temperatury na bazie metody elementów brzegowych w podobszarach układu z uwzględnieniem oporu cieplnego na styku tych podobszarów (np. układ wlewek-wlewnica, odlew-kokila) a więc dla takich przypadków, gdzie między odlewem a formą generuje się szczelina gazowa.

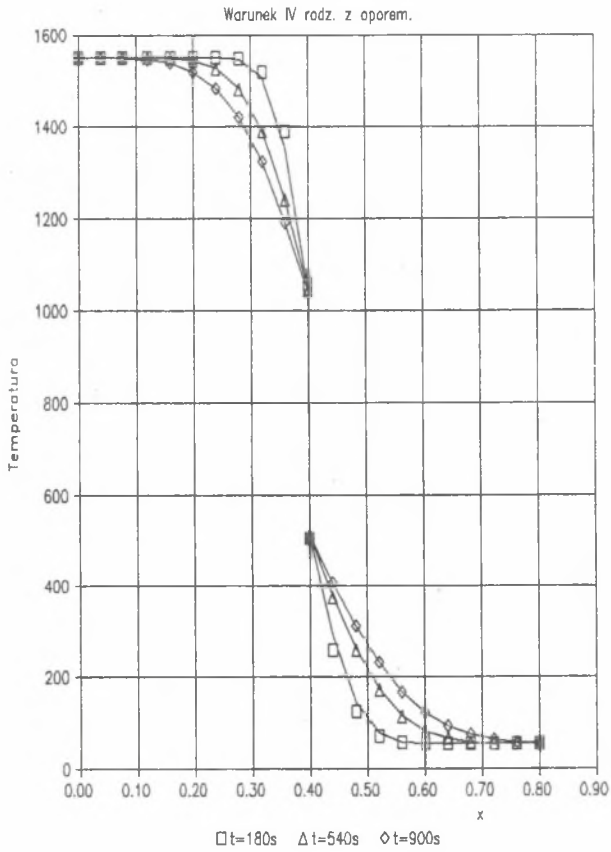
Rozpatrywane podobszary mają zbliżone parametry termofizyczne stąd dobrany odpowiednio krok czasowy Δt dla jednego z obszarów jest również poprawnym krokiem czasowym dla drugiego. Tak więc w tym przypadku nie ma potrzeby wprowadzania ulepszeń algorytmu metody elementów brzegowych dla zapewnienia takiej samej dokładności obliczeń w obydwu podobszarach.

Przedstawiony w poprzednich rozdziałach I i II schemat MEB dla obszarów niejednorodnych obejmował również warunek brzegowy IV rodzaju z oporem cieplnym szczeliny ale prezentowane przykłady dotyczyły jedynie przypadków idealnego kontaktu ($R=0$).

Ponieważ znane jest rozwiązanie analityczne dla dwóch półprzestrzeni z oporem cieplnym styku $R(t)=\beta\sqrt{\pi t}$ (por. rozdz.3.1) wobec czego dokonano porównania wyników obliczeń otrzymanych na bazie I schematu MEB z rozwiązaniem dokładnym.

Rozpatrzono dwie półprzestrzenie o własnościach zbliżonych do parametrów termofizycznych staliwa i żeliwa z oporem zmieniającym się zgodnie z równaniem $R(t)=\beta\sqrt{\pi t}$. Krok siatki w obu podobszarach wynosił $h=0.04$ [m]. Siatka rozciągała się na odległość 0.4 [m] w obydwu kierunkach (licząc od płaszczyzny kontaktu, czyli $x=0.4$).

Na rys.3.9. przedstawiono rozkład temperatury w obydwu podobszarach otrzymany na bazie metody elementów brzegowych, jak również rozwiązanie analityczne. Uzyskane wyniki obliczeń obarczone są bardzo małym błędem, a temperatury kontaktu T_{k1} i T_{k2} odtworzone są dokładnie.



Rys.3.9. Pole temperatury w podobzszarach

Fig.3.9. A temperature field in the sub-areas

LITERATURA DO ROZDZIAŁU 3

- [1] W.Longa, Krzepnięcie odlewów w formach piaskowych, Wyd.Śląsk, Katowice 1973
- [2] W.Longa, Krzepnięcie odlewów, Wyd.Śląsk, Katowice 1985
- [3] C.A.Brebbia, J.C.F.Telles, L.C.Wrobel, Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, Berlin 1984
- [4] L.C. Wrobel, A Boundary Element Solution to Stefan Problem, [w:] 5th BEM, (Ed. C.A.Brebbia, T. Futagami, M. Tanaka), Proceedings of the 5th Boundary Element Conference, Hiroshima, Japan, Springer-Verlag, Berlin and New York (1983), 173-182
- [5] P.K.Banerjee, R.P.Shaw, Boundary Element Formulation for Melting and Solidification Problems, Chap.1 [w:] Developments in Boundary Elements Methods-2, P.K.Banerjee and R.P.Shaw (Eds), Applied Science Publishers, London and New Jersey (1982), 1-18
- [6] J.Mikusiński, R.Sikorski, Elementarna teoria dystrybucji, PWN, Warszawa 1964
- [7] G.Daetsch, Praktyka przekształcenia Laplace'a, PWN, Warszawa 1964
- [8] J.Szmelter, Metody komputerowe w mechanice, PWN, Warszawa 1980
- [9] C.P.Hong, T.Umeda, Y.Kimura, Application of the Boundary Element Method in Two and Three Dimensional Unsteady Heat Transfer Problems Involving Phase Change. Solidification Problems, [w:] 5th BEM, Proceedings of the 5th Boundary Element Conference (Ed.C.A.Brebbia, T.Futagami, M.Tanaka), Hiroshima, Japan, Springer-Verlag, Berlin and New York (1983), 153-162
- [10] C.P.Hong, T.Umeda, Y.Kimura, Numerical Models for Casting Solidification: Part I. The Coupling of the Boundary Element and Finite Difference Methods for Solidification Problems, Metall. Trans. B, Vol.15B (1984), 91-99

4. MODELOWANIE PROBLEMU STEFANA

W drugiej połowie XIX wieku podjęto (udane zresztą) próby analitycznego rozwiązania problemu identyfikacji niestacjonarnego pola temperatury w obszarach z ruchomymi brzegami (Neuman, Lamé', Clapeyron, Stefan).

Przedmiotem rozważań była półprzestrzeń D ograniczona płaszczyzną, na której zadany był warunek brzegowy w postaci $T(0,t)=T_B \approx T_{kr}$, gdzie T_{kr} jest temperaturą przemiany fazowej (np. krzepnięcia). W chwili $t>0$ w obszarze D można wyróżnić dwa zmienne w czasie podobszary (np. $D_1(t)$ -ciecz i $D_3(t)$ -ciało stałe). Niestacjonarne pole temperatury w podobszarach opisuje układ równań parabolicznych

$$x \in D_1(t) : \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in D_3(t) : \frac{\partial T_3(x,t)}{\partial t} = a_3 \frac{\partial^2 T_3(x,t)}{\partial x^2}. \quad (4.1)$$

W chwili $t=0$ temperatura w obszarze $D=D_1(0)$ wynosi $T_p \approx T_{kr}$, równocześnie $T(\infty,t)=T_p$.

Na granicy rozdzielu faz $x=\hat{x}$ przyjmuje się następujący warunek brzegowy

$$x=\hat{x} : \begin{cases} -\lambda_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} = -\lambda_3 \frac{\partial T_3(x,t)}{\partial x} + Q \frac{dx(t)}{dt} \\ T_1(x,t) = T_3(x,t) = T_{kr} \end{cases}, \quad (4.2)$$

będący różniczkową postacią bilansu energii dla krzepnącej w czasie dt warstewki rozważanego obszaru^{*)}.

^{*)} Warunek (4.2) można uściślić uwzględniając sprzężenia między procesem wymiany ciepła i procesem wymiany masy (segregacja) w krzepnącej warstewce [1], można również uściślić go od strony formalnej (matematycznej) [2], sprawy te wykraczają poza zakres problemów będących przedmiotem niniejszej rozprawy.

W ostatnim równaniu Q jest ciepłem krzepnięcia odniesionym do jednostki objętości.

Warunek brzegowy (4.2) nazywany jest w literaturze warunkiem Stefana, przyjęło się również (np. tytuł znanej monografii Rubinsteina [3]), że zadania związane z obliczeniami procesu krzepnięcia, namarzania, topienia, nadtapiania, a więc zadania z ruchomymi granicami zalicza się do grupy zadań (problemów) Stefana.

Przedstawiony wyżej opis matematyczny dotyczy zamarzania^{*)} (krzepnięcia) obszaru D i może być on łatwo rozszerzony na obszary o bardziej złożonej geometrii. Można rozważać również pewne odmiany bazowego modelu Stefana - w szczególności proces namarzania (nadtapiania).

Obszar D jest wówczas jednorodny (np. ciało stałe), układ równań różniczkowych redukuje się do jednego równania dla $D=D_3(t)$, natomiast na ruchomej granicy wzdłuż której zachodzi proces namarzania (nadtapiania) dany jest warunek w postaci

$$\hat{x}=\bar{x} : \begin{cases} \lambda_3 \frac{\partial T_3(x,t)}{\partial x} = \alpha [T_3(x,t) - T_{p_f}(x,t)] + Q \frac{dx(t)}{dt} \\ T_3(x,t) = T_{k_r} \end{cases} \quad (4.3)$$

gdzie α - współczynnik wymiany ciepła na powierzchni granicznej,

T_{p_f} - temperatura płynu, w którym zanurzony jest obszar D (dla $T_{p_f} = \text{idem}$, a tym bardziej dla $T_{p_f} = T_{k_r}$ warunek (4.3) znacznie upraszcza się).

Można rozważać również bardziej ogólny warunek

$$\hat{x}=\bar{x} : \begin{cases} -\lambda_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} = -\lambda_3 \frac{\partial T_3(x,t)}{\partial x} + \alpha [T_3(x,t) - T_{p_f}(x,t)] + Q \frac{dx(t)}{dt} \\ T_1(x,t) = T_3(x,t) = T_{k_r} \end{cases} \quad (4.4)$$

^{*)} W wersji pierwotnej rozwiązanie przypisywane Stefanowi dotyczyło zamarzania wilgotnego gruntu i opracowanie tego problemu było zlecone przez sztab armii austriackiej - chodziło o możliwość transportu wojsk i uzbrojenia przez tereny podmokłe, bagna, torfowiska itp.

powstały przez skojarzenie (4.2) i (4.3). Otrzymany bilans energii dotyczy przypadku, gdy między obszarami $D_1(t)$ i $D_3(t)$ ciepło wymieniane jest drogą przewodzenia i wnikania (konwekcji).

Można łatwo zauważyć, że rozpatrując procesy zamarzania i namarzania dla przypadku $T_p = T_{kr}$, dochodzimy do identycznych opisów matematycznych.

Ponieważ rozwiązania numeryczne (literaturowe i własne) jednowymiarowego problemu Stefana będą weryfikowane z rozwiązaniem analitycznym, więc niżej podana zostanie postać tego rozwiązania (np. [4])

- dla obszaru $D_1(t)$:

$$T_1(x, t) = T_p - (T_p - T_{kr}) \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{a_1 t}) / \operatorname{erfc}(K/2\sqrt{a_1 t}), \quad (4.5)$$

- dla obszaru $D_3(t)$:

$$T_3(x, t) = T_B + (T_{kr} - T_B) \operatorname{erf}(x/2\sqrt{a_3 t}) / \operatorname{erf}(K/2\sqrt{a_3 t}), \quad (4.6)$$

gdzie K jest tzw. stałą krzepnięcia. Z rozważań teoretycznych wynika, że $K = \hat{x}/\sqrt{t} = \text{const.}$ Zależność $\hat{x} = K\sqrt{t}$ nazywana jest prawem pierwiastkowym i ma fundamentalne znaczenie w termodynamice procesów odlewniczych. Stałą krzepnięcia można wyznaczyć metodami przybliżonymi z równania przestępnego

$$\lambda_3 \frac{T_{kr} - T_B}{\operatorname{erf}(K/2\sqrt{a_3 t})} \exp(-K^2/4a_3) / \sqrt{a_3} - \lambda_1 \frac{T_p - T_{kr}}{\operatorname{erfc}(K/2\sqrt{a_1 t})} \exp(-K^2/4a_1) / \sqrt{a_1} = QK\sqrt{\pi}/2 \quad (4.7)$$

lub z pewnych wzorów przybliżonych cytowanych m. in. w [5].

Literatura dotycząca problemu Stefana, jego aspektów teoretycznych i praktycznych, jest bardzo obszerna i różnorodna. W pracy ograniczono się do omówienia tylko tych pozycji, które wykorzystują bezpośrednio metodę brzegowych równań całkowych do symulacji procesu krzepnięcia, w szczególności zadań z ostrą granicą rozdziału faz. Problemy krzepnięcia metalu w interwale temperatury omówione będą w rozdziale 5.

4.1. ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH DO ROZWIĄZANIA PROBLEMU TOPIENIA (NAMARZANIA) [6], [7]

Prekursorem badań w tym zakresie byli Y.K.Chuang i J.Szekely [6]. Dalsze prace jakie opublikowano m.in. [8], [9] prezentują pewne ulepszenia metody, przykłady realizacji numerycznych itp. ale pryncypia, w tym równanie całkowe dla problemu topienia (namarzania) przyjęto za pracami Chuanga i Szekelego.

Przedstawione poniżej wyprowadzenie równania całkowego dla zadania Stefana stanowi pewną własną modyfikację rozważań przedstawionych w [8]^{*)}.

Rozpatrywana będzie płyta nieskończona o grubości $2L$, którą zanurzono w kąpeli o temperaturze wyższej lub równej temperaturze przemiany fazowej. W wyniku procesów cieplnych na powierzchni płyty zachodzi zjawisko jej topienia i dla $t > 0$ chwilową grubość płyty określa warunek $-x(t) \leq x \leq x(t)$.

Opis matematyczny procesu (przy założeniu stałych parametrów termofizycznych płyty) tworzą następujące równania i warunki

$$-x(t) \leq x \leq x(t): \quad \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad (4.8)$$

$$t=0: \quad T(x,0)=T_p, \quad X(0)=L, \quad (4.9)$$

$$x=x(t) : \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \alpha [T_{kr} - T_{pf}(x,t)] + Q \frac{dx(t)}{dt} \\ T(x,t) = T_{kr} \end{array} \right. , \quad (4.10)$$

gdzie α - współczynnik wymiany ciepła między kąpielą i płytą,

T_{pf} - temperatura kąpieli.

*) Celem autora niniejszej pracy jest unifikacja teorii brzegowych równań całkowych dla zadań niestacjonarnych, a mianowicie wyprowadzenie ich na bazie metody odchyłek ważonych. Podejście Chuanga, Szekelego i in. jest tu odmienne, chociaż wyniki końcowe identyczne.

Dla $T_{p,r} = T_{k,r}$ warunek (4.10) sprowadza się do prostszej postaci

$$x=x(t) : \begin{cases} \lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = Q \frac{dx(t)}{dt} \\ T(x,t) = T_{k,r} \end{cases} \quad (4.11)$$

Metoda odchyłek ważonych w rozpatrywanym przypadku prowadzi do następującego równania

$$\int_{t^0}^{t^F} \int_{-x(t)}^{x(t)} [a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}] T^*(\xi, x, t^F, t) dx dt = 0, \quad (4.12)$$

gdzie $T^*(\xi, x, t^F, t)$ jest rozwiązaniem fundamentalnym (por. rozdz.3).

Po dwukrotnym scałkowaniu przez części pierwszego członu równania (4.12) otrzymuje się

$$\int_{t^0}^{t^F} \int_{-x(t)}^{x(t)} a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} T^* dx dt = a \int_{t^0}^{t^F} (T^* \frac{\partial T}{\partial t} - T \frac{\partial T^*}{\partial t}) \Big|_{-x(t)}^{x(t)} dt + \int_{t^0}^{t^F} \int_{-x(t)}^{x(t)} a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} T dx dt. \quad (4.13)$$

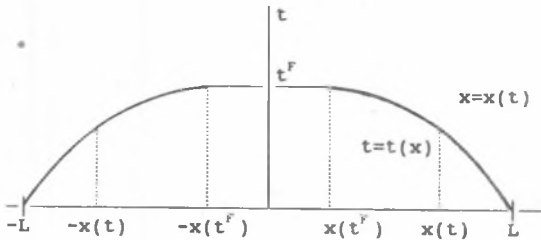
Wykorzystując powyższą zależność w równaniu (4.12) oraz dodając i odejmując w ostatniej całce tego równania składnik $\frac{\partial T^*}{\partial t} T$ mamy

$$\int_{t^0}^{t^F} \int_{-x(t)}^{x(t)} (a \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \frac{\partial T^*}{\partial t}) T dx dt + \frac{1}{\rho c} \int_{t^0}^{t^F} (T q^* - q T^*) \Big|_{-x(t)}^{x(t)} dt - \int_{t^0}^{t^F} \int_{-x(t)}^{x(t)} \frac{\partial}{\partial t} (T T^*) dx dt = 0, \quad (4.14)$$

gdzie $q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$, $q^* = -\lambda \frac{\partial T^*}{\partial x}$.

Po uwzględnieniu własności rozwiązania fundamentalnego (wzór 3.19) ostatnie równanie przyjmuje postać

$$T(\xi, t^F) = \frac{1}{\rho c} \int_{t^0}^{t^F} (T q^* - q T^*) \Big|_{-x(t)}^{x(t)} dt - \int_{t^0}^{t^F} \int_{-x(t)}^{x(t)} \frac{\partial}{\partial t} (T T^*) dx dt. \quad (4.15)$$



Rys.4.1. Przebieg procesu topienia

Fig.4.1. The course of melting process

Na rysunku (4.1) pokazano przebieg procesu w układzie współrzędna przestrzenna - czas oraz oznaczenia, które będą stosowane w dalszej części wywodów dotyczących przekształcenia ostatniego składnika równania (4.15).

$$\int_{t^0}^{t^F} \int_{-x(t)}^{x(t)} \frac{\partial}{\partial t}(TT^*) dx dt = \int_{-L}^{-x(t^F)} \int_{t^0}^{t(x)} \frac{\partial}{\partial t}(TT^*) dx dt + \int_{-x(t^F)}^{x(t^F)} \int_{t^0}^{t^F} \frac{\partial}{\partial t}(TT^*) dx dt + \int_{x(t^F)}^L \int_{t^0}^{t(x)} \frac{\partial}{\partial t}(TT^*) dx dt. \quad (4.16)$$

Wykorzystując własności rozwiązania fundamentalnego otrzymuje się

$$\int_{t^0}^{t^F} \int_{-x(t)}^{x(t)} \frac{\partial}{\partial t}(TT^*) dx dt = \int_{-L}^L TT^* \Big|_{t^0} dx + \int_{-L}^{-x(t^F)} TT^* \Big|_{t(x)} dx + \int_{x(t^F)}^L TT^* \Big|_{t(x)} dx \quad (4.17)$$

i ostatecznie

$$T(\xi, t^F) + \frac{1}{\rho c} \int_{t^0}^{t^F} T^* q \Big|_{-x(t)}^{x(t)} dt = \frac{1}{\rho c} \int_{t^0}^{t^F} q^* T \Big|_{-x(t)}^{x(t)} dt + \int_{-L}^L TT^* \Big|_{t^0} dx - \int_{-L}^{-x(t^F)} TT^* \Big|_{t(x)} dx - \int_{x(t^F)}^L TT^* \Big|_{t(x)} dx, \quad -L \leq \xi \leq L. \quad (4.18)$$

Równanie (4.18) można zapisać również w postaci [9] ($0 \leq \xi \leq L$)

$$T(\xi, t^F) + \frac{1}{\rho c} \int_{t^0}^{t^F} T^* q \Big|_0^{x(t)} dt = \frac{1}{\rho c} \int_{t^0}^{t^F} q^* T \Big|_0^{x(t)} dt + \int_0^L TT^* \Big|_{t^0} dx - \int_{x(t^F)}^L TT^* \Big|_{t(x)} dx, \quad (4.19)$$

co wynika z symetrii cieplnej rozważanego zadania ($q(0,t)=0$). Po wstawieniu do ostatniego równania warunku brzegowego (4.11) jest

$$T(\xi, t^F) + \frac{Q}{\rho c} \int_{t^0}^{t^F} T^*(\xi, x(t), t^F, t) \frac{dx(t)}{dt} dt = \frac{T_{kr}}{\rho c} \int_{t^0}^{t^F} q^*(\xi, x(t), t^F, t) dt - \quad (4.20)$$

$$\frac{1}{\rho c} \int_{t^0}^{t^F} q^*(\xi, 0, t^F, t) T(0, t) dt + \int_0^L T(x, t^0) T^*(\xi, x, t^F, t^0) dx - \int_{x(t^F)}^L T(x, t(x)) T^*(\xi, x, t^F, t(x)) dx$$

Zakłada się [6, 9], że na odcinku $[t^{f-1}, t^f]$ przyrost warstwy zakrzepłej między punktami jest funkcją liniową tzn.

$$x(t) = x_{r-1} + (x_r - x_{r-1})(t - t^{f-1}) / (t^f - t^{f-1}) = x_{r-1} - S_r(t - t^{f-1}), \quad (4.21)$$

gdzie S_r jest prędkością topienia. Można stąd również wyznaczyć funkcję odwrotną $t(x)$.

Dla powyższego założenia całki występujące w równaniu (4.20) a mianowicie

$$\int_{t^{f-1}}^{t^f} T^*(\xi, x(t), t^F, t) dt, \quad \int_{t^{f-1}}^{t^f} q^*(\xi, x(t), t^F, t) dt, \quad \int_{x_{r-1}}^{x_r} T^*(\xi, x, t^F, t(x)) dx$$

można wyznaczyć analitycznie i ostatecznie otrzymuje się układ równań brzegowych (dla $\xi \rightarrow 0$ i $\xi \rightarrow x(t)$), w których jedną z niewiadomych jest S_r . Układ ten rozwiązuje się iteracyjnie poprawiając prędkość S_r aż do uzyskania żądanej dokładności.

Prezentowane wyżej podejście do zagadnienia namarzania (topienia) jest z całą pewnością bardzo "eleganckie" od strony matematycznej, natomiast trudno je przenieść na obiekty 2D lub 3D oraz adaptować do bardziej złożonych cieplnie zadań Stefana.

Istnieje również druga grupa algorytmów, która zostanie przedstawiona bardziej szczegółowo (łącznie z wynikami symulacji numerycznych), a które polegają ogólnie rzecz biorąc na rozwiązywaniu równań parabolicznych i takiej modyfikacji rozwiązania, która zapewnia spełnienie warunku Stefana na wspólnym brzegu. Część z nich wyjątkowo łatwo można przenosić na zadania wielowymiarowe i złożone geometrycznie obszary.

W rozdziale niniejszym przedstawione zostaną cztery takie metody w tym jedna własna polegająca na iteracyjnym doborze kroku czasu zapewniającym przejście frontu krzepnięcia od węzła do węzła przyjętej siatki.

4.2. METODA ITERACJI PRĘDKOŚCI KRZEPNIĘCIA [10]

Metoda przedstawiona przez S.Takahashi, K.Onishi, T.Kuroki, K.Hayashi w pracy [10] jest pewną modyfikacją konwencjonalnej techniki łączenia podobszarów o różnych parametrach termofizycznych, którą przedstawiono dokładnie w rozdziale 3 niniejszej pracy.

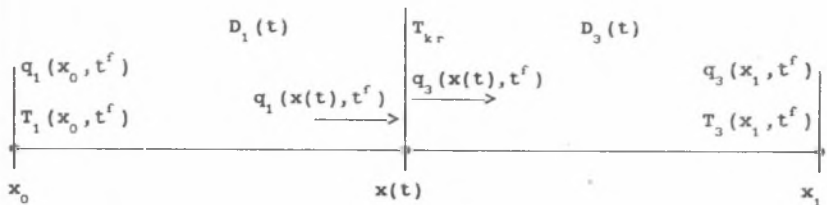
Autorzy rozpatrują klasyczny problem Stefana tzn. dwa podobszary $D_1(t)$, $D_3(t)$ z warunkiem brzegowym (4.2) na granicy rozdziału faz. Brzegowe równania całkowe dla tych podobszarów mają postać (por. rozdz.3)

$$\begin{bmatrix} g_{11}^1 & g_{12}^1 \\ g_{21}^1 & g_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(x_0, t^f) \\ q_1(x(t), t^f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 \\ h_{21}^1 & h_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(x_0, t^f) \\ T_1(x(t), t^f) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g_{11}^3 & g_{12}^3 \\ g_{21}^3 & g_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3(x(t), t^f) \\ q_3(x_1, t^f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}^3 & h_{12}^3 \\ h_{21}^3 & h_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_3(x(t), t^f) \\ T_3(x_1, t^f) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^3 \\ P_2^3 \end{bmatrix}$$

(4.22)

gdzie g_{ij}^m , h_{ij}^m , P_i^m , $m=1,3$ określone są wzorami (3.29), natomiast pozostałe wielkości występujące w równaniach (4.22) pokazano na rys.4.2, przy czym



Rys.4.2. Metoda iterowania prędkości krzepnięcia

Fig.4.2. The method of iteration of solidification rate

warunki brzegowe dla $x=x_0$ i $x=x_1$ determinują jedną z dwóch wartości brzegowych np. $q_1(x_0, t)=0$, $T_3(x_1, t)=T_B$.

Warunek brzegowy Stefana (4.2) zapisano w postaci

$$x=x(t) : \begin{cases} q_3(x, t) = q_1(x, t) - Qv \\ T_1(x, t) = T_3(x, t) = T_{kr} \end{cases} \quad (4.23)$$

i wprowadzono do równań (4.22).

Ostatecznie otrzymuje się następujący układ równań

$$\begin{bmatrix} -h_{11}^1 & g_{12}^1 & 0 & 0 \\ -h_{21}^1 & g_{22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{11}^3 & Qg_{11}^3 & g_{12}^3 \\ 0 & -g_{21}^3 & Qg_{21}^3 & g_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(x_0, t^f) \\ q_1(x(t), t^f) \\ v \\ q_3(x_1, t^f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_{11}^1 & 0 \\ -g_{21}^1 & 0 \\ 0 & h_{12}^3 \\ 0 & h_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(x_0, t^f) \\ T_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^1 + h_{12}^1 T_{kr} \\ P_2^1 + h_{22}^1 T_{kr} \\ P_1^3 + h_{11}^3 T_{kr} \\ P_2^3 + h_{21}^3 T_{kr} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

przy czym założono, że dla $x=x_0$: $q_1(x_0, t)=0$, dla $x=x_1$: $T_3(x_1, t)=T_B$.

W powyższym układzie równań niewiadomymi są brakujące temperatury i strumienie ciepła na brzegach $x=x_0$, $x=x_1$, strumień ciepła $q_1(x(t), t^f)$ dopływający do granicy rozdziału faz od strony cieczy oraz prędkość przyrostu warstwy zakrzepłej $v=dx(t)/dt$.

Jeżeli proces obliczeń numerycznych chcemy prowadzić w ten sposób, aby front krzepnięcia przenosił się od węzła do węzła, to układ równań (4.24) należy powiązać z następującym procesem kolejnych przybliżeń:

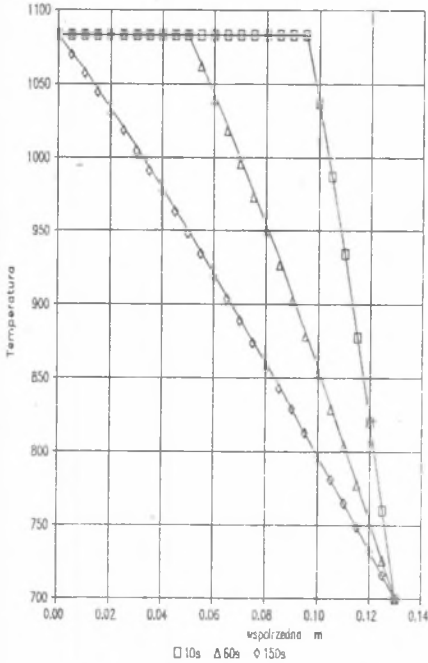
- zakłada się pewien krok czasu Δt ,
- rozwiązuje się układ równań (4.24),
- na podstawie wyznaczonej prędkości v przyjmuje się kolejne przybliżenie kroku czasu $\Delta t=h_1/v$, gdzie h_1 jest krokiem siatki przestrzennej,
- proces iteracyjny powtarza się aż do uzyskania żądanej dokładności.

Algorytm zaproponowany przez S.Takahashi, K.Onishi, T.Kuroki, K.Hayashi sprawdzono na następującym przykładzie.

Rozważano półprzestrzeń ograniczoną płaszczyzną, na której zadano warunek brzegowy w postaci $T(x_1, t) = T_B = 700 [^{\circ}\text{C}]$. Parametry termofizyczne półprzestrzeni $\lambda_1 = 250 [\text{W/mK}]$, $\rho_1 = 8300 [\text{kg/m}^3]$, $c_1 = 544 [\text{J/kgK}]$, $\lambda_3 = 330$, $\rho_3 = 8920$, $c_3 = 420$,

$T_{kr} = 1083$, $Q = 1819680000 [\text{J/m}^3]$ odpowiadają parametrom termofizycznym czystej miedzi [11].

Fragment półprzestrzeni (licząc od brzegu $x = x_1$) pokryto przestrzenną siatką o kroku $h = 0.0005\text{m}$ (80 węzłów). W węzle położonym najdalej od brzegu ($x = x_0$) założono $q(x_0, t) = 0$. Warunek początkowy zadania przyjęto w postaci $T(x, 0) = T_{kr}$. Obliczenia numeryczne prowadzono do chwili, w której można było uznać warunek dla $x = x_1$ jako poprawny (nie zaburzający pola temperatury w półprzestrzeni). Otrzymane rozwiązanie porównano z rozwiązaniem analitycznym (wzory 4.5, 4.6). Na rys. 4.3 pokazano rozwiązanie



Rys. 4.3. Iteracja v
Fig. 4.3. The iteration of v

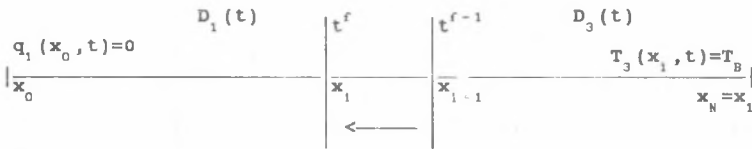
są w pełni zadowalające, różnica między odpowiednimi temperaturami nie przekracza kilku stopni (błąd względny rzędu ułamka procenta).

W zakończeniu tej części rozdziału należy jeszcze wspomnieć o pracy R. Parkitnego i A. Bokoty [12], w której rozwiązano metodami iteracyjnymi sprzężony problem jednowymiarowej wymiany ciepła i masy w obszarze krzepnącego metalu. Autorzy nie podają szczegółów przyjętych procedur iteracyjnych, ale można sądzić, że proponowany przez nich algorytm jest zbliżony do metody prezentowanej wyżej.

4.3 METODA KOLEJNYCH PRZYBLIŻEŃ KROKU CZASU (BADANIA WZASNE)

Założmy, że w chwili $t=t^{f-1}$ front krzepnięcia "dotarł" do węzła $x=x_{1+1}$ oraz, że znany jest rozkład temperatury (warunek pseudopoczątkowy) w chwili t^{f-1} w podobszarach $D_1(t)$, $D_3(t)$.

Postulować będziemy, aby w czasie $\Delta t^f = t^f - t^{f-1}$ front krzepnięcia przemieścił się do węzła x_1 (rys.4.4).



Rys.4.4. Metoda iteracji kroku czasu

Fig.4.4. The method of iteration of time step

Zamierzony cel można osiągnąć realizując następujący algorytm:

- przyjmuje się arbitralnie granicę rozdziału faz w punkcie $x=x_1$,
- metodą numeryczną np. metodą elementów brzegowych wyznacza się pole temperatury w podobszarach $D_1(t^f)$ i $D_3(t^f)$ z następującymi warunkami brzegowymi

$$x=x_0: \phi_1(T_1(x,t), \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x}) = 0,$$

$$x=x_1: \phi_3(T_3(x,t), \frac{\partial T_3(x,t)}{\partial x}) = 0,$$

(4.25)

$$x=x_{1-0}: T_1(x,t) = T_{kr},$$

$$x=x_{1+0}: T_3(x,t) = T_{kr},$$

a więc z warunkiem brzegowym I rodzaju na granicy rozdziału faz zapewniającym spełnienie drugiej części warunku Stefana.

W przypadku MEB problem sprowadza się do rozwiązania dwóch układów

równań w postaci

$$\begin{bmatrix} g_{11}^1 & g_{12}^1 \\ g_{21}^1 & g_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(x_0, t^f) \\ q_1(x_1, t^f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 \\ h_{21}^1 & h_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(x_0, t^f) \\ T_{kr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} g_{11}^3 & g_{12}^3 \\ g_{21}^3 & g_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3(x_1, t^f) \\ q_3(x_1, t^f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}^3 & h_{12}^3 \\ h_{21}^3 & h_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{kr} \\ T_3(x_1, t^f) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^3 \\ P_2^3 \end{bmatrix}$$

w których dla ustalenia uwagi przyjęto dla $x=x_0$: $q_1(x_0, t)=0$, dla $x=x_1$: $T_3(x_1, t)=T_B$.

Z powyższych układów równań obok $T_1(x_0, t^f)$ i $q_3(x_1, t^f)$ otrzymuje się strumienie ciepła $q_1(x_1, t^f)$ i $q_3(x_1, t^f)$,

- pierwszą część warunku Stefana można przekształcić do następującej postaci

$$\frac{q_1(x_1, t^f) - q_3(x_1, t^f)}{Q} = \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{x=x_1} \quad (4.27)$$

Przyjmując $\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{h}{\Delta t^f}$ mamy

$$\Delta t^f = hQ/[q_1(x_1, t^f) - q_3(x_1, t^f)], \quad (4.28)$$

gdzie h jest krokiem siatki przestrzennej.

Aby wyznaczyć współczynniki układu równań (4.26) należało w pewien sposób przyjąć czas przejścia Δt^f . Kolejny krok czasu w procesie iteracyjnym wynika z wzoru (4.28) a proces obliczeń czyli symulację przejścia od węzła x_{i+1} do x_i prowadzi się aż do uzyskania żądanej dokładności.

Przedstawiony wyżej algorytm modelowania jednowymiarowego zadania Stefana może być w zasadzie kojarzony z dowolną metodą numeryczną.

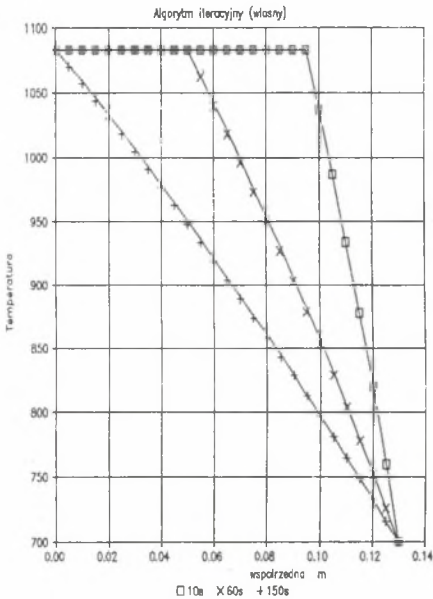
Warunkiem powodzenia jest jednak poprawne oszacowanie strumieni ciepła na granicy rozdziału faz. Możliwości takie stwarza właśnie metoda elementów brzegowych, która dokładnie wyznacza wartości brzegowe w tym strumie-

nie ciepła dla $x=x_1$.

Dobre wyniki uzyskano również (E.Majchrzak, B.Mochnacki [13,14]^{*)} przez połączenie prezentowanego algorytmu z metodą identyfikacji pola temperatury za pomocą splajnów co wynikało z faktu, że przybliżenie chwilowego pola temperatury funkcją giętą (splajnem) daje dobrą dokładność oszacowania pochodnej (a więc strumienia ciepła) w dowolnym punkcie obszaru.

Opisaną wyżej procedurę poprawiania kroku czasu przetestowano na przykładzie identycznym jak w rozdziale 4.2. Wyniki (rozwiązanie przybliżone i dokładne) dla czasów $t=10s$, $t=60s$ i $t=150s$ pokazano na rys. 4.5.

Uzyskano pełne potwierdzenie przydatności, wysokiej dokładności i efektywności metody.



Rys.4.5. Iteracja kroku czasu

Fig.4.5 The iteration of time step

*) Tematem cytowanych prac były obliczenia frontu krzepnięcia w przekroju podłużnym wlewka ciągłego, opis matematyczny sprowadzał się do układu równań parabolicznych z warunkiem Stefana, w których rolę czasu przejmowała współrzędna "z" zorientowana w kierunku wyciągania wlewka.

4.4. METODA PRZEMIENNEJ FAZY

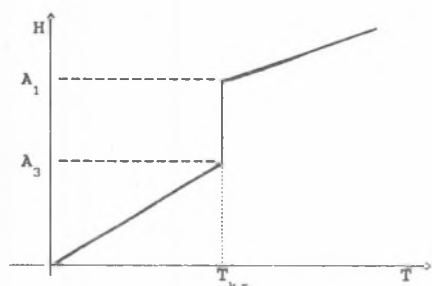
Metoda przemiennej fazy (Alternating Phase Truncation Method) została po raz pierwszy przedstawiona w pracach J.Rogersa, A.Bergera, M.Cimenta [15,16].

Jest to pewien algorytm rozwiązywania zadań z ruchomymi brzegami sprowadzający się do znajdowania w każdym kroku czasu dwóch rozwiązań (rozkładów entalpii) dla formalnie ujednorodnionego (sprowadzonego do cieczy lub ciała stałego) obszaru krzepnącego i stygnącego obiektu, a następnie odpowiedniego przekształcania tych rozwiązań.

W swojej klasycznej postaci APTM znalazła zastosowanie do symulacji zadań z ostrym frontem krzepnięcia (w takim ujęciu będzie prezentowana i wykorzystywana w niniejszej pracy). Metodę tę można również adaptować do obliczeń krzepnięcia w interwale temperatury, co pokazują A.Kapusta i B.Mochnacki w pracy [17].

W rozdziale niniejszym przedstawiony zostanie algorytm łączący APTM z metodą brzegowych równań całkowych dla zadania jednowymiarowego, bardziej skomplikowane przykłady będą omówione w dalszej części pracy.

Do opisu matematycznego problemu krzepnięcia i stygnięcia wprowadza się entalpię fizyczną materiału odniesioną do jednostki objętości (por.rys.4.6)



$$H(T) = \int_0^T c(\mu)\rho(\mu)d\mu + Q\eta(T), \quad (4.29)$$

gdzie

$$\eta(T) = \begin{cases} 0, & T \leq T_{kr} \\ 1, & T > T_{kr} \end{cases}, \quad (4.30)$$

Rys.4.6. Rozkład entalpii

Fig.4.6. The enthalpy distribution

$$c(T)\rho(T) = \begin{cases} c_1(T)\rho_1(T), & T > T_{kr} \\ c_3(T)\rho_3(t), & T \leq T_{kr} \end{cases}, \quad (4.31)$$

przy czym $c_1(T), \dots, \rho_3(T)$ mogą być wielkościami stałymi.

Układ równań różniczkowych i warunków brzegowo-początkowych dla zadania Stefana (4.1), (4.2) zapisany w konwencji entalpowej ma postać

$$x \in D_1(t) : \frac{\partial H_1(x, t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 H_1(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in D_3(t) : \frac{\partial H_3(x, t)}{\partial t} = a_3 \frac{\partial^2 H_3(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.32)$$

gdzie $a_i = \lambda_i / \rho_i c_i = \text{const}$, $i=1, 3$.

Warunek Stefana:

$$x=x^A : \begin{cases} -a_1 \frac{\partial H_1(x, t)}{\partial x} = -a_3 \frac{\partial H_3(x, t)}{\partial x} + Q \frac{dx(t)}{dt} \\ A_1 = A_3 + Q \end{cases}, \quad (4.33)$$

gdzie $A_1 = \lim_{T \rightarrow T_{kr}+0} H(T)$, $A_3 = \lim_{T \rightarrow T_{kr}-0} H(T)$.

Pozostałe warunki

$$x=\infty (t=0) : H(\infty, t) = H(x, 0) = H_p, \quad (4.34)$$

$$x=0 : H(0, t) = H_B. \quad (4.35)$$

Załóżmy, że $\Delta_{h, \tau}$ jest siatką przestrzenno-czasową o kroku czasu Δt i węzłach przestrzennych x_0, x_1, \dots, x_N oraz, że znany jest rozkład entalpii w tych węzłach w chwili $t=t^{f-1}$: $H_0^{f-1}, H_1^{f-1}, \dots, H_N^{f-1}$.

Algorytm metody przemiennej fazy składa się z następujących etapów:

1^o. Rozpatrywany obszar $D=D_1(t) \cup D_3(t)$ sprowadza się umownie do fazy ciekłej przyjmując wyjściowe pole entalpii w postaci

$$V_1(x_1, t^{f-1}) = \max \{H_1^{f-1}, A_1\}, \quad (4.36)$$

co oznacza, że zachowuje się wartość entalpii dla tych węzłów x_1 , które w chwili t^{f-1} znajdowały się w fazie ciekłej, a pozostałym

przyporządkowuje się wartość λ_1 .

Dla tak przyjętego warunku pseudopoczątkowego z równania (4.32a) wyznacza się pole entalpii $\hat{V}_1(x, t^f)$ dla poziomu czasu $t=t^f$.

Etap 1^o kończy się odjęciem dodanej dla sprowadzenia do fazy ciekłej entalpii w węzłach siatki tzn.

$$V_1(x_1, t^f) = \hat{V}_1(x_1, t^f) + H_1^{f-1} - V_1(x_1, t^{f-1}). \quad (4.37)$$

2^o. Wprowadza się następujący warunek pseudopoczątkowy

$$V_2(x_1, t^{f-1}) = \min \{ \lambda_3, V_1(x_1, t^f) \}, \quad (4.38)$$

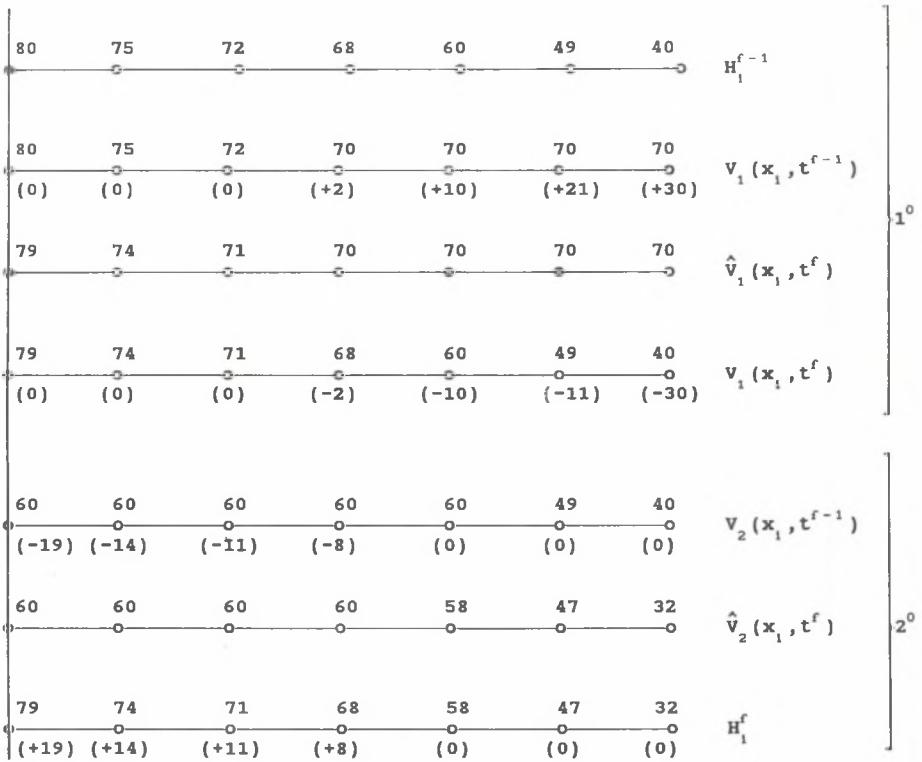
co oznacza, że cały obszar D sprowadzono formalnie do fazy stałej zachowując rzeczywistą wartość entalpii w węzłach należących faktycznie do $D_3(t^{f-1})$, a pozostałym przyporządkowując entalpię graniczną ciała stałego λ_3 .

Dla tak przyjętego warunku wyznacza się z równania (4.32b) wartości entalpii $\hat{V}_2(x_1, t^f)$ i ostateczne rozwiązanie dla chwili t^f wynika z zależności

$$H_1^f = \hat{V}_2(x_1, t^f) + V_1(x_1, t^f) - V_2(x_1, t^{f-1}). \quad (4.39)$$

Poprawność omówionego wyżej algorytmu pokazano w [18].

Rys.4.3 ilustruje kolejne kroki algorytmu przemiennej fazy dla $\lambda_1 = 70$, $\lambda_3 = 60$ jednostek entalpii.



Rys.4.7. Ilustracja algorytmu APTM

Fig.4.7. Illustration of APTM algorithm

Dodatkowego skomentowania wymaga sprzężenie tego algorytmu z metodą brzegowych równań całkowych.

Należy przede wszystkim zauważyć, że pewnym zmianom ulegnie zależność opisująca generowany przez rozwiązanie fundamentalne H° strumień ciepła q° , a mianowicie

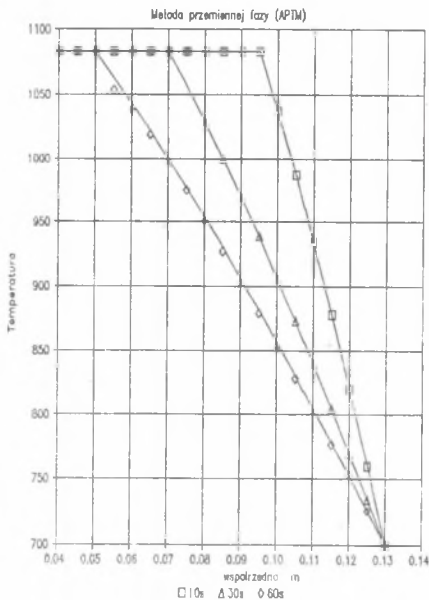
$$\begin{aligned}
 q^{\circ}(\xi, x, t^F, t) &= -\lambda \theta T^{\circ}(\xi, x, t^F, t) / \partial x = -a \theta H^{\circ}(\xi, x, t^F, t) / \partial x = \\
 &= (x - \xi) \exp[-r^2 / (4a(t^F - t))] / 4\sqrt{a\pi} (t^F - t)^{3/2}.
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

Odpowiednie równanie całkowe dla formalnie ujednorodnionych obszarów $D = D_1$ lub $D = D_2$ przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 H(\xi, t^F) + \iint_D \int_{t^0}^{t^F} H^*(\xi, x, t^F, t) q(x, t) dx dt = \iint_D \int_{t^0}^{t^F} q^*(\xi, x, t^F, t) H(x, t) dx dt + \\
 + \int_D H(x, t^0) H^*(\xi, x, t^F, t^0) dx,
 \end{aligned}
 \tag{4.41}$$

przy czym $H = H_1$, $q = q_1$, $H^* = H_1^*$, $q^* = q_1^*$ dla pierwszego etapu obliczeń oraz $H = H_3$, $q = q_3$, $H^* = H_3^*$, $q^* = q_3^*$ dla etapu drugiego.

Dalszy sposób postępowania prowadzący do układu rozwiązującego jest identyczny jak w rozdziale 3.



Rys.4.8. Metoda przemiennej fazy

Fig.4.8. APTM method

Efektywność i dokładność metody przemiennej fazy skojarzonej z metodą elementów brzegowych sprawdzono na przykładzie omówionego poprzednio zadania. Fragment wyników dla jednowymiarowej siatki $h=0.005m$ i kroku czasu $0.5s$ pokazano na rys.4.8, na którym również linią ciągłą zaznaczono rozwiązanie analityczne. Jak widać, metoda jest bardzo dokładna, błąd nie przekracza $2K$, co jest tym bardziej znaczące, że metodę przemiennej fazy można przenieść na dowolne i złożone geometrycznie obszary 2D i 3D.

4.5 METODA ZAPASU TEMPERATURY

Metodę zapasu temperatury (Temperature Recovery Method) omówiono m.in. w [19,20].

Jest ona jednym z algorytmów symulacji numerycznej zadania Stefana i w niniejszej pracy została połączona z metodą elementów brzegowych. TRM może być stosowana zarówno przy temperaturowej jak i entalpowej konwencji opisu matematycznego procesu krzepnięcia i stygnięcia tak dla ostrej granicy rozdziału faz (jak niżej) jak i dla krzepnięcia w interwale temperatury np. [21].

Założono (choć nie jest to konieczne), że parametry termofizyczne podobszarów $D_1(t)$ i $D_3(t)$ są takie same i wynoszą λ , ρ , c .

Zapas temperatury Θ definiuje się jako stosunek ciepła krzepnięcia $Q[\text{J/m}^3]$ do iloczynu $c\rho$:

$$\Theta = Q/c\rho.$$

Niech w chwili $t=t^0$: $T_0^0, T_1^0, \dots, T_N^0$ będzie dyskretnym rozkładem temperatury w węzłach siatki x_0, x_1, \dots, x_N . Założono również, że cały obszar w chwili $t=0$ pozostaje w fazie ciekłej, czyli $T_i^0 > T_{kr}$, natomiast zapasy temperatury $\Delta\theta_i$ w węzłach siatki x_i wynoszą z definicji Θ .

Dowolną metodą numeryczną np. metodą elementów brzegowych wyznacza się pole temperatury na t^1 poziomie czasu: $T_0^1, T_1^1, \dots, T_N^1$.

Dla ustalenia uwagi przyjęto, że w węzłach x_0, x_1, \dots, x_k temperatura spadła poniżej T_{kr} o $\Delta\theta_1^1, \Delta\theta_2^1, \dots, \Delta\theta_k^1$ oraz, że $\Delta\theta_1^1 < \Theta$.

Wielkości $z_1^1 = \Delta\theta_1^0 - \Delta\theta_1^1$ zapamiętuje się, a następnie do drugiego etapu obliczeń tworzy się następujący warunek początkowy

$$T_1^1 = \max \{ T_1^1, T_{kr} \}. \quad (4.42)$$

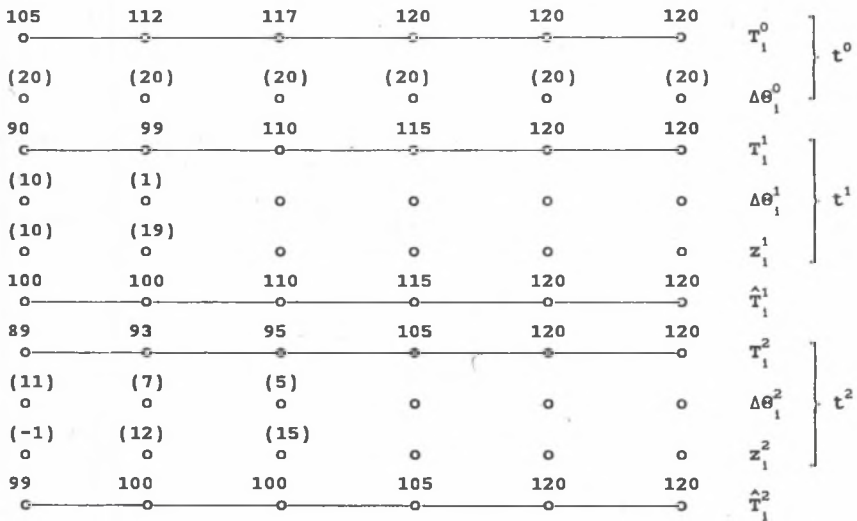
Na jego bazie wyznacza się temperaturę w chwili $t=t^2$.

Dla węzłów, dla których temperatura obniżyła się poniżej T_{kr} oblicza się sumaryczne zużycie zapasu temperatury $z_1^2 = z_1^1 - \Delta\theta_1^2$ i nowy warunek pseudopoczątkowy dla przejścia od czasu t^2 do t^3 przyjmuje się w postaci

$$\hat{T}_1^2 = \begin{cases} \max\{ T_1^2, T_{kr} \}, & z_1^2 \geq 0 \\ T_{kr} + z_1^2, & z_1^2 < 0 \end{cases}, \quad (4.43)$$

po czym zapasy dla węzłów, które przeszły do obszaru ciała stałego zeruje się i w dalszych obliczeniach węzły te nie są analizowane.

Istotę TRM ilustruje rys.4.9 (założono $T_{kr}=100$, $\theta=20$).



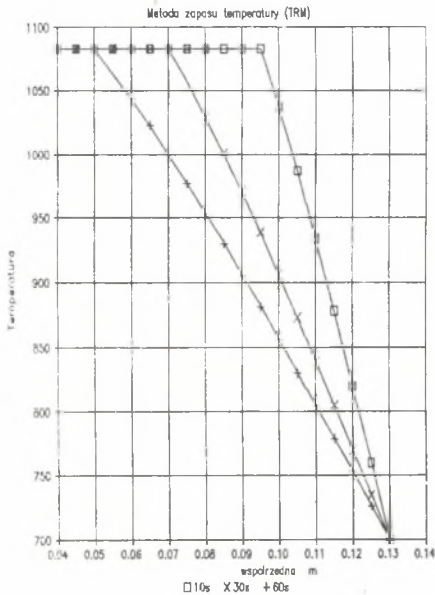
Rys.4.9. Schemat metody zapasu temperatury

Fig.4.9 Scheme of temperature recovery method

Sprzężenie metody TRM z metodą brzegowych równań całkowych jest natychmiastowe. W przypadku jednakowych wartości c , ρ , λ dla podobszarów $D_1(t)$ i $D_3(t)$ rozwiązuje się numerycznie jedno równanie paraboliczne, przy czym należy użyć I schematu MEB z każdorazową korektą warunku pseudopoczątkowego.

Można również zróżnicować parametry termofizyczne podobszarów i wtedy zadanie sprowadza się także do rozwiązania jednego równania parabolicznego z parametrami fazy ciekłej, natomiast pole temperatury w zakrzepłej części obszaru modyfikuje się przez poprawki wynikające z lokalnych bilansów entalpii, co zostanie szczegółowo omówione w rozdziale 5 niniejszej pracy.

W przeciwieństwie do metody przemiennej fazy metoda zapasu temperatury posiada oczywistą interpretację fizyczną. Jest ona bowiem zakamuflowanym w pewny sposób bilansem energii przeliczającym ciepło oddane na stygnięcie na ciepło oddane na zmianę fazy (krzepnięcie). Widać to szczególnie w pracy J. Szarguta, B. Mochnackiego [22], w której liczone pole temperatury w krzepnącym wlewku stali uspokojonej za pomocą bilansów elementarnych [23], przy czym równania bilansów dla węzłów krzepnących były inne niż dla węzłów oddających entalpię przegrzania lub stygnących w fazie stałej. W pierwszych naliczono objętość metalu zakrzepłą w analizowanym elemencie różnicowym, a z drugich wyznaczano spadek temperatury w węzłach cieczy i ciała stałego. Można pokazać, że sposób postępowania autorów a w szczególności warunek nazwany przez nich kryterium K_2 jest niczym innym jak odmienną postacią naliczania zużycia zapasu temperatury.



Metodę zapasu temperatury skojarzoną z algorytmem MEB zweryfikowano na poprzednio cytowanym przykładzie przyjmując $h = 0.005$ m, $\Delta t = 0.5$ s.

Rozwiązanie analityczne i przybliżone dla wybranych chwil czasu pokazano na rys. 4.10 i uzyskano pełne potwierdzenie przydatności materiału obu metod w numerycznej symulacji procesu krzepnięcia.

Rys. 4.10. Metoda zapasu temperatury

Fig. 4.10. Temperature recovery method

Prezentowane w niniejszym rozdziale sposoby przybliżonego rozwiązywania problemu Stefana na bazie metody brzegowych równań całkowych zostały przez autora pracy bardzo szczegółowo przetestowane nie tylko z punktu widzenia jakości wyników (okazało się zresztą, że dokładność wszystkich algorytmów była zaskakująco wysoka^{*)} i trudno byłoby wyróżnić któryś z nich), ale również z punktu widzenia prostoty i efektywności metod oraz pracochłonności przygotowania programu i czasu pracy komputera.

Wydaje się, że metody bazujące na rozwiązywaniu równań parabolicznych dla obszarów jednorodnych, a więc APTM i TRM mają zdecydowaną przewagę nad metodami iteracyjnymi. Cały problem sprowadza się do połączenia standardowego programu MEB dla równania Fouriera uzupełnionego odpowiednimi warunkami brzegowo-początkowymi (autor niniejszej pracy opracował cały zestaw takich programów) z procedurą poprawiania wyników w kolejnych krokach czasu (procedury te mogą być zresztą kojarzone również z innymi algorytmami numerycznymi np. MRS, MES itd.). Równie łatwo można przejść od zadań jednowymiarowych do zadań dla obszarów 2D. i 3D, co w przypadku metod iteracyjnych nie jest wcale proste.

Koncepcja połączenia metody zapasu temperatury z metodą brzegowych równań całkowych została przedstawiona przez C.P.Honga, T.Umedę i Y.Kimurę [21] z tym, że autorzy zaadaptowali TRM do zadań dotyczących krzepnięcia metalu w interwale temperatury (w sposób niezupełnie ścisły), natomiast skojarzenie APTM z MEB jest pomysłem autora niniejszej pracy i problemom tym są poświęcone publikacje [24], [25], [26], w których zajmowano się krzepnięciem miedzianych wlewków ciągłych (zadania dwuwymiarowe).

Mimo znacznych trudności z adaptacją metod iteracyjnych do zadań przestrzennych uzyskano kilka efektywnych rozwiązań w tym zakresie, prezentowane są one m. in. w artykule przeglądowym K.O.Neilla [27] (proces namarzania

^{*)} Otrzymane wyniki pokazują zdecydowanie i jednoznacznie, że metody numeryczne i ich wdrożenie do rozwiązywania zagadnień inżynierskich w tym problemie termodynamiki procesów odlewniczych, to nie tylko sztuka dla sztuki i zabawa grupy hobbystów (jak twierdzą niektórzy praktycy). Metody te są bardzo efektywnym i dokładnym narzędziem do prowadzenia skomplikowanych i ważnych dla praktyki obliczeń, a nawet jeżeli bazują na zupełnie różnych, ale poprawnych pomysłach prowadzą do prawie takich samych i zgodnych z oczekiwaniami rezultatów.

wokół otworu mroźeniowego), w pracy S.Takahashi, K.Onishi, T.Kuroki, K.Hayashi [10](krzepnięcie nieskończonego pręta metalowego w przekroju poprzecznym) oraz N.Zabarasa i S.Mukherjee [28]. Sposób rozwiązania polega tu na wyznaczeniu lokalnych prędkości narastania frontu, skąd oblicza się przyrost grubości warstwy zakrzepłej w kierunku normalnym. Nowe położenie frontu stanowi bazę, na której w pewien sposób określa się elementy brzegowe. Wydaje się, że jest to algorytm zbliżony do metody identyfikacji frontu krzepnięcia przedstawionej przez J.Raińczaka i B.Mochnackiego w pracy [29].

Istotnym argumentem przemawiającym za metodami poprawiania pola temperatury (entalpii) jest możliwość ingerencji wykonującego obliczenia numeryczne w dyskretyzację kroku czasu. W metodach iteracyjnych krok jest zmienny i wynika z czasu przejścia frontu od węzła do węzła, podczas gdy w przypadku APTM lub TRM krok czasu może być przyjęty arbitralnie (oczywiście w zakresie kroków zapewniających wymaganą dokładność obliczeń-por.rozd.3).

I wreszcie "last but not least". Algorytmy łączące MEB z metodami korygującymi pole temperatury są pojęciowo prostsze, łatwiej przyswajalne i biorąc pod uwagę możliwości rozpowszechnienia metody brzegowych równań całkowych w praktyce inżynierskiej, lepsze perspektywy rysują się przed takimi właśnie sposobami obliczeń symulujących przepływ ciepła w odlewach.

LITERATURA DO ROZDZIAZU 4

- [1] J.Marczak, Praca doktorska, IPPT PAN, Warszawa 1985
- [2] J.Crank, Free and Moving Boundary Problems, Claredon Press, Oxford 1984
- [3] L.I.Rubinstein, Problema Stefana, Riga ,Zwajgzne 1967
- [4] W.Longa, Krzepnięcie odlewów w formach piaskowych, Wyd. Śląsk, Katowice 1973
- [5] W.Longa, Krzepnięcie odlewów, Wyd. Śląsk, Katowice 1985
- [6] Y.K.Chuang, J.Szekely, On the Use of Green's Functions for Solving Melting or Solidification Problems, Int. J. Heat and Mass Transfer 14, (1971), 1285-1294
- [7] Y.K.Chuang, J.Szekely , The Use of Green's Functions for Solving Melting or Solidification Problems in the Cylindrical Coordinate System, Int. J. Heat and Mass Transfer 15, (1972), 1171-1174
- [8] P.K.Banerjee, R.P.Shaw , Boundary Element Formulation for Melting and Solidification Problems, Chap.1 [w:] Developments in Boundary Elements Methods-2, P.K.Banerjee and R.P.Shaw (Eds), Applied Science Publishers, London and New Jersey (1982), 1-18
- [9] L.C.Wrobel, A Boundary Element Solution to Stefan Problem, [w:] 5th BEM, (Ed. C.A.Brebbia, T.Futagami, M.Tanaka), Proceedings of the 5th Boundary Element Conference, Hiroshima, Japan, Springer-Verlag, Berlin and New York (1983), 173-182
- [10] S.Takahashi, K.Onishi, T.Kuroki, K.Hayashi, Boundary Elements to Phase Change Problems, [w:] 5th BEM (Ed. C.A.Brebbia, T.Futagami, M.Tanaka), Proceedings of the 5th Boundary Element Conference, Hiroshima, Japan, Springer-Verlag, Berlin and New York (1983), 173-182
- [11] Teplofiziceskije svojstva veshchestv, Praca zbiorowa, Masinizdat, Moskva 1965
- [12] R.Parkitny, A.Bokota , Krzepnięcie odlewów w ujęciu metody elementów brzegowych, Krzepnięcie metali i stopów, t. Badania podstawowe, Ossolinium, Wrocław (1988), 352-362
- [13] E.Majchrzak, B.Mochnacki, Algorytm obliczeń krzepnięcia prostokątnego pionowego wlewka ciągłego, [w] Mat. Konf., Konferencja Naukowa ODLEWNIC-TWO'87, Wrocław (1988), 96-106
- [14] E.Majchrzak, B.Mochnacki, The Collocational Method of Determining the Solidification Front in the Continuous Casting Volume, Bull. of Pol.Ac. of Sc., Techn., Vol.36, No 5-6, Warszawa (1988), 301-308
- [15] J.Rogers, A.Berger, M.Ciment , The Alternating Phase Truncation Method for a Stefan Problem, SIAM.J.Num.Anal. 16(1979), 562-587
- [16] J.Rogers, A.Berger, M.Ciment, Numerical Solution of a Diffusion Consumption Problem with a Free Boundary, SIAM.J.Num.Anal. 12 (1975), 645-659
- [17] A.Kapusta, B.Mochnacki, The Analysis of Heat Transfer Processes in the Cylindrical, Radial Continuous Casting Volume, Bull. of the Pol. Ac. of Sc., Techn., Vol.36, No 5-6, Warszawa (1988), 309-320
- [18] A.Kapusta, Praca doktorska, Wydz. MT Pol.Śl., Gliwice 1987

- [19] Poradnik inżyniera, Odlewnictwo, Metody matematyczne w ciepłych obliczeniach procesów odlewniczych (rozdz. XVIII), B. Mochnacki, WNT, Warszawa 1986
- [20] R.W. Ruddle, The Solidification of Castings, The Institute of Metals, London 1949
- [21] C.P. Hong, T. Umeda, Y. Kimura, Numerical Models for Casting Solidification Problems. Part II. Application of the Boundary Element Method to Solidification Problems, Metall. Trans. B, Vol. 15B (1984), 101-107
- [22] J. Szargut, B. Mochnacki, Różnicowy model matematyczny procesu krzepnięcia wlewka stali uspokojonej, Arch. Hutn., t. 16 nr 3 (1971), 269-289
- [23] J. Szargut, Metody numeryczne w obliczeniach ciepłych pieców przemysłowych, Śląsk, Katowice 1977
- [24] E. Majchrzak, Numerical Simulation of Solidification by Boundary Elements Method, [w:] II Mat. Konf. Int. Conf. FOCOMP'88, Sofia (1988), 208-217
- [25] E. Majchrzak, Wykorzystanie metody brzegowych równań całkowych do identyfikacji frontu krzepnięcia w przekroju poprzecznym wlewka, [w:] Mat. Konf. XIV Symp. Nauk. AGH, Kraków (1988), 35-42
- [26] E. Majchrzak, Numerical Simulation of Continuous Casting Solidification by Boundary Elements Method, Engineering Analysis with Boundary Elements', (przyjęto do druku)
- [27] K.O. Neill, Boundary Integral Equation Solution for Moving Boundary Phase Change Problems, Int. J. Num. Met. Eng., Vol. 24, 1825-1859
- [28] N. Zabaras, S. Mukherjee, An Analysis of Solidification Problems by the Boundary Element Method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24 (1987), 1879-1900
- [29] J. Raińczak, B. Mochnacki, Lokalizacja rozkładu izoterm granicznych w obszarze wlewka na bazie metod numerycznych i rachunku wyrównawczego, Krzepnięcie i Własności Stopów Odlewniczych cz.I, AGH, Kraków, (1982), 105-110

5. MODELOWANIE PRZEPŁYWU CIEPŁA W OBSZARZE METALU KRZEPNĄCEGO W INTERWALE TEMPERATURY

5.1. OPIS MATEMATYCZNY PROCESU KRZEPNIĘCIA I STYGNIEŃCIA

W rozdziale niniejszym rozważany będzie algorytm obliczeń krzepnięcia metalu, którego stan ciekły odpowiada temperaturom $T > T_L$, natomiast stan stały temperaturom $T < T_S$. Podobszar $D_2(t)$, w którym temperatura zawiera się w przedziale $T_S < T < T_L$ nazywa się obszarem strefy przejściowej (dwufazowej).

Tak więc w dowolnej chwili $t > 0$ obszar metalu (odlewu) jest złożeniem trzech zmieniających się w czasie podobszarów $D = D_1(t) \cup D_2(t) \cup D_3(t)$ (ciecz, strefa przejściowa, ciało stałe).

Opis matematyczny procesu krzepnięcia i stygnięcia sprowadza się (przy pewnych założeniach upraszczających) do układu równań Fouriera, a mianowicie

$$x \in D_m(t): \quad c_m(T) \rho_m(T) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \text{div}[\lambda_m(T) \text{grad} T(x,t)] + q_{v_m}, \quad (5.1)$$

m=1,2,3

gdzie $\text{div}(\cdot)$ -operator dywergencji, $\text{grad}(\cdot)$ -gradient, q_{v_m} -wydajność objętościowych źródeł ciepła, x -współrzędne geometryczne.

Pole temperatury w podobszarach $D_1(t)$ i $D_3(t)$ jest polem bezźródłowym tzn. $q_{v_1}, q_{v_3} = 0$, natomiast w podobszarze $D_2(t)$ wydziela się w określony sposób ciepło przemiany (ciepło krzepnięcia) $Q [J/m^3]$ i pole temperatury w tym obszarze jest polem źródłowym. Można wykazać [1, 2], że lokalna wydajność źródeł ciepła w otoczeniu punktu $x \in D_2(t)$ jest związana z szybkością zmiany udziału $S(x,t)$ ciała stałego w tym otoczeniu i wynosi $q_{v_2} = Q \frac{\partial S(x,t)}{\partial t}$. Jeżeli założymy, że $S(x,t)$ jest funkcją temperatury znormalizowaną do przedziału $\langle 0,1 \rangle$ (zauważmy, że dla $T = T_L$, $S = 0$ oraz dla $T = T_S$, $S = 1$) to $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS}{dT} \frac{\partial T}{\partial t}$ i równania (5.1) przyjmują postać

$$x \in D_m(t): \quad [c_m(T) \rho_m(T) \frac{dS(x,t)}{dT} Q] \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \text{div}[\lambda_m(T) \text{grad} T(x,t)], \quad (5.2)$$

m=1,2,3

przy czym z definicji dla $m=1,3$: $\frac{dS}{dT}=0$.

Wielkość $c_m(T)\rho_m(T)\frac{dS(x,t)}{dT}Q$ nazywana jest zastępczą pojemnością cieplną strefy przejściowej odniesioną do jednostki objętości [1].

Ostatecznie dochodzi się więc do układu trzech równań parabolicznych

$$x \in D_m(t): \quad c_m(T) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \text{div}[\lambda_m(T) \text{grad}T(x,t)]. \quad (5.3)$$

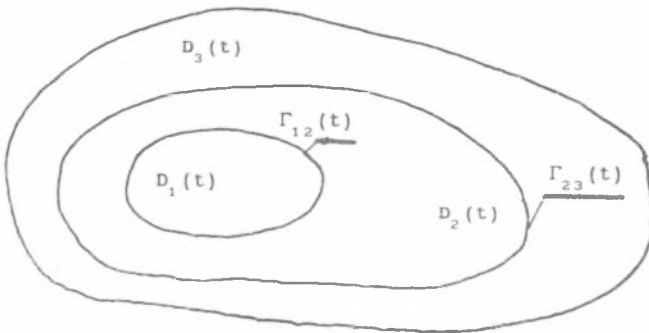
$m=1,2,3$

Warunki brzegowe na konturach $\Gamma_{12}(t)$, $\Gamma_{23}(t)$ (por. rys.5.1) przyjmuje się w postaci warunków brzegowych IV rodzaju

$$x \in \Gamma_{12}(t): \quad \begin{cases} T_1(x,t) = T_2(x,t) = T_L \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial n} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$x \in \Gamma_{23}(t): \quad \begin{cases} T_2(x,t) = T_3(x,t) = T_S \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial n} = \lambda_3 \frac{\partial T_3(x,t)}{\partial n} \end{cases} \quad (5.5)$$

natomiast na zewnętrznej powierzchni obszaru D (odlew) przyjmuje się w zależności od rozwiązywanego zadania odpowiednie warunki brzegowe omówione w rozdziałach poprzednich.



Rys.5.1. Rozpatrywany obszar D

Fig.5.1. Considered area D

Warunek początkowy w postaci $T_m(x,0)=T_{m0}(x)$ sprowadza się najczęściej do przyjęcia w całym obszarze odlewu temperatury zalewania: $D_1(0)=D, T_1(x,0)=T_p$.

Parametry termofizyczne podobszarów są w ogólnym przypadku funkcjami temperatury i rozpatrywane zadanie jest problemem nieliniowym. W przypadku szczególnym przyjmując stałe wartości parametrów termofizycznych oraz zakładając, że S jest liniową funkcją temperatury

$$S(x,t) = \frac{T_L - T(x,t)}{T_L - T_S}, \tag{5.6}$$

dochodzi się do układu trzech równań liniowych.

Nadal pozostaje jednak problem przyporządkowania punktom obszaru D odpowiednich parametrów termofizycznych (związany z przemieszczaniem się izoterm granicznych T_S, T_L w czasie trwania procesu krzepnięcia i stygnięcia).

Istnieje kilka modyfikacji przedstawionego wyżej opisu matematycznego. Między innymi definiuje się funkcje

$$C(T) = \begin{cases} C_1(T), & T > T_L \\ C_2(T), & T \in \langle T_S, T_L \rangle \\ C_3(T), & T < T_S \end{cases}, \quad \lambda(T) = \begin{cases} \lambda_1(T), & T > T_L \\ \lambda_2(T), & T \in \langle T_S, T_L \rangle \\ \lambda_3(T), & T < T_S \end{cases}, \tag{5.7}$$

o których zakłada się, że są ciągłe i ograniczone.

W praktyce dane doświadczalne dotyczące wartości ciepła właściwego i współczynnika przewodzenia ciepła przybliża się wielomianem odpowiedniego stopnia, splajnem itp., co zapewnia spełnienie postulowanego założenia.

Układ równań (5.3) sprowadza się wtedy do jednego równania parabolicznego

$$x \in D: \quad C(T) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \text{div}[\lambda(T) \text{grad} T(x,t)], \tag{5.8}$$

obowiązującego dla całego formalnie ujednorodnionego obszaru odlewu. Dołączając odpowiednie warunki brzegowe na zewnętrznej powierzchni odlewu i warunek początkowy otrzymuje się odmienny opis matematyczny procesu krzepnięcia.

Inną modyfikacją modelu matematycznego cytowaną również w licznych publikacjach^{*} z dziedziny metody elementów brzegowych (por. artykuł przeglądowy R. Białeckiego [3]) jest przekształcenie równania (5.8) przez wprowadzenie następujących funkcji

$$H(T) = \int_0^T c(\mu) d\mu, \quad U(T) = \int_0^T \lambda(\mu) d\mu. \quad (5.9)$$

Wtedy

$$\frac{\partial H(x, t)}{\partial t} = \text{div}[\text{grad}U(x, t)]. \quad (5.10)$$

Ponieważ funkcje $H(T)$ oraz $U(T)$ są ściśle monotoniczne, więc można w sposób jednoznaczny zbudować funkcję $H = \phi(U)$ [4] i wobec

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dU} \frac{\partial U}{\partial t} = \phi'(U) \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (5.11)$$

otrzymuje się równanie

$$\phi'(U) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \text{div}[\text{grad}U(x, t)], \quad (5.12)$$

które należy uzupełnić odpowiednio zmodyfikowanymi warunkami brzegowo-początkowymi.

Ostatnie równanie zawiera tylko funkcję U nazywaną czasami temperaturą Kirchhoffa (Kirchhoff Temperature). Można wyprowadzić również równanie różniczkowe opisujące proces krzepnięcia (topienia), w którym zmienną zależną jest entalpia i które uwzględnia proces krzepnięcia w stałej temperaturze lub w interwale temperatury. Równanie takie wyprowadzili m.in. Y. Cao, A. Faghri i W.S. Chang [5], przy czym jego postać jest bardzo dogodna do numerycznej ap-

^{*} Autorzy tych prac rozpatrują nieliniowe przewodzenie ciepła ale bez przemian fazowych.

roksymacji na bazie metody różnic skończonych, natomiast nie jest przydatna w przypadku zastosowania metody elementów brzegowych.

Podstawową trudnością wykorzystania metody elementów brzegowych dla zadania krzepnięcia (i szerzej dla zadań nieliniowych) jest nieznaną jomość rozwiązania fundamentalnego dla wyżej przedstawionych równań.

Literatura dotycząca modelowania na bazie MEB procesów cieplnych w obszarach metalu krzepnącego w interwale temperatury jest bardzo uboga [6,7]. Również nieliczne są prace dotyczące nieliniowych zadań przewodzenia ciepła [8,9,10,11,12]. Prezentowane w literaturze algorytmy dla zadań nieliniowych są bardzo skomplikowane i raczej nieefektywne, z reguły nie potwierdzone żadnymi wynikami numerycznymi. Autorzy najczęściej zajmują się równaniem (5.12) twierdząc, że funkcja $\phi'(U)$ zmienia się z temperaturą w dużo mniejszym stopniu niż $C(T)$ czy też $\lambda(T)$ i równanie (5.12) jest bliższe liniowemu niż (5.8). Większość prac polega na szukaniu sposobów ominięcia trudności związanych z adaptacją MEB do zadań nieliniowych poprzez lepszą lub gorszą linearyzację problemu brzegowo-początkowego.

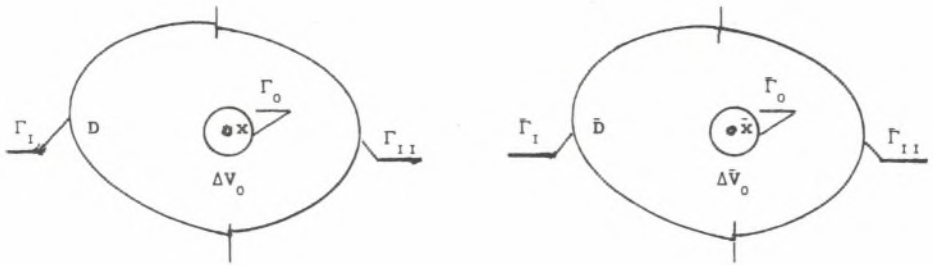
W niniejszej pracy przedstawiony będzie pewien własny sposób rozwiązania problemu symulacji krzepnięcia metalu w interwale temperatury sprowadzający się do uzupełnienia algorytmu MEB dla równania liniowego (np. dla fazy ciekłej) procedurami poprawiania pola temperatury na bazie odpowiednich bilansów energii. Metoda jest w pewnym sensie rozwinięciem pomysłu przedstawionego przez J. Szarguta i B. Mochnackiego w pracy [13] oraz C.P. Honga, T. Umedę i Y. Kimurę w pracy [14].

5.2. POPRAWIANIE POLA TEMPERATURY NA BAZIE BILANSÓW ENERGII

Rozważane będą dwa identyczne obszary D i \bar{D} . Parametry termofizyczne obszaru D wynoszą c, ρ, λ natomiast parametry obszaru \bar{D} wynoszą $\bar{c}, \bar{\rho}, \bar{\lambda}$, przy

czy $\lambda = \lambda^*$.

Warunki brzegowe na odpowiadających sobie konturach Γ_I, Γ_{II} i $\bar{\Gamma}_I, \bar{\Gamma}_{II}$ oraz warunek początkowy są identyczne.



Rys.5.2. Obszary D i \bar{D}

Fig.5.2. The areas D and \bar{D}

Pole temperatury we wnętrzu obszarów D, \bar{D} opisują równania różniczkowe

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} T), \quad \bar{c}\bar{\rho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} \bar{T}). \quad (5.13)$$

Wprowadzamy nową zmienną τ

$$\tau = c\rho t / \bar{c}\bar{\rho}. \quad (5.14)$$

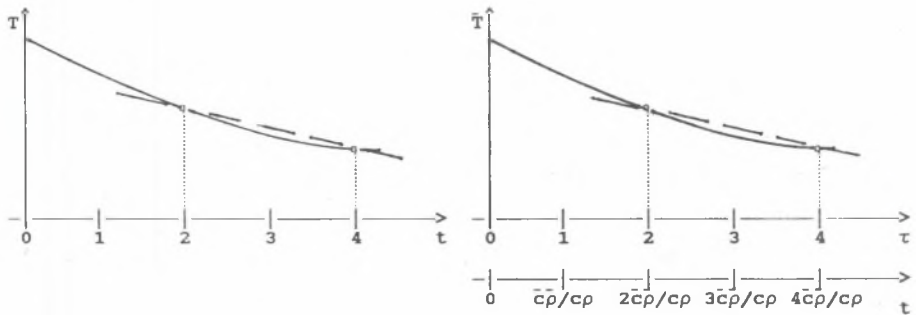
Ponieważ $\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} = c\rho \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} / \bar{c}\bar{\rho}$ więc równanie (5.13b) przyjmuje postać

$$c\rho \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} = \lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} \bar{T}). \quad (5.15)$$

*¹) Założenie to jest niezbędne dla ścisłości rozważań i jest ono możliwe do przyjęcia w przypadku obliczeń krzepnięcia i stygnięcia, ponieważ bardzo silnie zmienna jest zastępcza pojemność cieplna, natomiast pozostałe parametry można przyjmując w zasadzie jako stałe.

Wynika stąd, że w sensie formalnym równania opisujące procesy cieplne w obszarach D i \bar{D} są identyczne, chociaż czas biegnie dla nich inaczej.

Na rys.5.3 pokazano krzywe stygnięcia dla wybranego punktu x i odpowiadającego mu punktu \bar{x} .



Rys.5.3. Krzywe stygnięcia w punktach x i \bar{x}

Fig.5.3. Cooling curves at the points x and \bar{x}

Współczynniki kierunkowe cięciw pokazanych na rysunku są takie same, czyli

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta \tau} = \frac{\bar{c}\rho\Delta\bar{T}}{c\rho\Delta t} \quad (5.16)$$

Z ostatniego równania wynika, że

$$c\rho\Delta T = \bar{c}\rho\Delta\bar{T}. \quad (5.17)$$

Tak więc, jeżeli T_1^{f-1} jest wartością temperatury w punkcie x_1 w chwili t^{f-1} , natomiast T_1^f wartością temperatury w tym punkcie w chwili t^f , to przy identycznym dla obu obszarów warunku początkowym (pseudopoczątkowym) tzn.

$$T_1^{f-1} = \bar{T}_1^{f-1} \quad \text{mamy}$$

$$c\rho(T_1^f - T_1^{f-1}) = \bar{c}\rho(\bar{T}_1^f - \bar{T}_1^{f-1}), \quad (5.18)$$

i można na podstawie dyskretnego rozwiązania dla obszaru D uzyskać dyskretne rozwiązanie dla obszaru \bar{D} obliczając \bar{T}_1^f z zależności

$$\bar{T}_1^f = T_1^{f-1} - c\rho(T_1^f - T_1^{f-1})/\bar{c}\bar{\rho}. \quad (5.19)$$

Ostatni, otrzymany drogą formalnych przekształceń wzór ma oczywistą interpretację fizyczną.

W obszarach D i \bar{D} określa się elementarne objętości ΔV_0 , $\Delta \bar{V}_0$, dla których x i \bar{x} są punktami centralnymi. Zakłada się, że strumienie ciepła dopływające do elementów ΔV_0 , $\Delta \bar{V}_0$ są proporcjonalne do gradientu temperatury w obszarach D , \bar{D} w chwili t^{f-1} (należy przypomnieć, że pola temperatury - warunek pseudopoczątkowy - w chwili t^{f-1} są identyczne w obu obszarach). Tak więc ciepło dopływające do objętości ΔV_0 : $Q_0 = - \int_{\Gamma_0} \lambda \text{grad } T(x, t^{f-1}) \Delta t ds$ i ciepło

$$\bar{Q}_0 = - \int_{\bar{\Gamma}_0} \bar{\lambda} \text{grad } \bar{T}(\bar{x}, t^{f-1}) \Delta t ds \text{ są takie same.}$$

Bilanse energii w postaci $\Delta H_1 = Q_0$ oraz $\Delta \bar{H}_1 = \bar{Q}_0$ prowadzą do wniosku, że $\Delta H_1 = \Delta \bar{H}_1$ (ΔH_1 , $\Delta \bar{H}_1$ - zmiany entalpii elementarnych objętości ΔV_0 , $\Delta \bar{V}_0$ odpowiednio). Tak więc

$$\int_{\Delta V_0} \int_{T_1^{f-1}}^{T_1^f} c\rho \, dT dV = \int_{\Delta \bar{V}_0} \int_{\bar{T}_1^{f-1}}^{\bar{T}_1^f} \bar{c}\bar{\rho} \, d\bar{T} d\bar{V} \quad (5.20)$$

skąd dla stałych wartości parametrów termofizycznych $c, \rho, \bar{c}, \bar{\rho}$ otrzymuje się równanie (5.18).

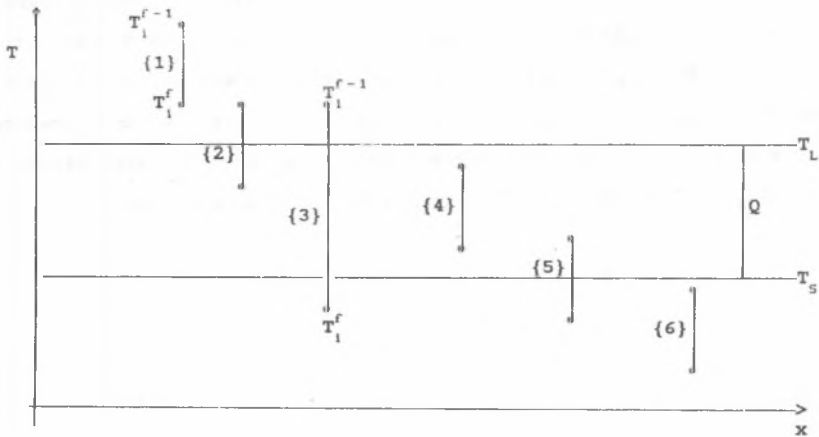
Założenie stałych wartości parametrów obszaru \bar{D} nie jest konieczne. W przypadku ogólnym poprawioną temperaturę w tym obszarze można obliczyć z zależności

$$c\rho(T_1^f - T_1^{f-1}) = \int_{\bar{T}_1^{f-1}}^{\bar{T}_1^f} \bar{c}(\mu)\bar{\rho}(\mu) d\mu \quad (5.21)$$

5.3. KOREKTA POLA TEMPERATURY W KRZEPNĄCYM ODLEWIE

Przyjęto, że obliczenia na bazie metody elementów brzegowych prowadzone są dla jednorodnego obszaru D odlewu, którego parametry odpowiadają parametrom ciekłego metalu i są stałe.

Korygowanie pola temperatury dla kolejnych poziomów czasu wymaga przeanalizowania następujących przypadków (por. rys.5.4)



Rys.5.4. Korekta pola temperatury

Fig.5.4. Correction of temperature field

{1} $T_1^{f-1} > T_L, T_1^f > T_L,$

{2} $T_1^{f-1} > T_L, T_S < T_1^f < T_L,$

{3} $T_1^{f-1} > T_L, T_1^f < T_S,$

{4} $T_S < T_1^{f-1} < T_L, T_S < T_1^f < T_L,$

{5} $T_S < T_1^{f-1} < T_L, T_1^f < T_S,$

{6} $T_1^{f-1} < T_S, T_1^f < T_S.$

Należy podkreślić, że temperaturę T_1^f otrzymano dla obszaru jednorodnego z parametrami termofizycznymi c_1 i ρ_1 .

Dla punktów spełniających warunek {1} wartości temperatur nie poprawia się.

W przypadkach {2} i {3} zmianę entalpii $\Delta H_1 = C_1(T_L - T_1^f)\Delta V_1$ porównuje się z wielkością $Q\Delta V_1$. Należy wówczas rozpatrzyć dwie możliwości

- jeśli $\Delta H_1 \leq Q\Delta V_1$ to przeliczenie entalpii prowadzi do równania bilansu w postaci

$$C_1(T_L - T_1^f)\Delta V_1 = C_2(T_L - \bar{T}_1^f)\Delta V_1, \quad (5.22)$$

skąd

$$\bar{T}_1^f = T_L - C_1(T_L - T_1^f)/C_2, \quad (5.23)$$

gdzie \bar{T}_1^f - poprawiona wartość temperatury,

- jeśli $\Delta H_1 > Q\Delta V_1$ to

$$C_1(T_L - T_1^f)\Delta V_1 = Q\Delta V_1 + C_3(T_S - \bar{T}_1^f)\Delta V_1, \quad (5.24)$$

czyli

$$\bar{T}_1^f = T_S + Q/C_3 - C_1(T_L - T_1^f)/C_3. \quad (5.25)$$

Analogicznie dla {4} i {5}

- jeżeli $\Delta \bar{H}_1 \leq Q\Delta V_1 - C_2(T_L - T_1^{f-1})\Delta V_1$ to

$$\bar{T}_1^f = T_1^{f-1} - C_1(T_1^{f-1} - T_1^f)/C_2, \quad (5.26)$$

- w przeciwnym razie

$$\bar{T}_1^f = T_S + Q/C_3 - C_2(T_L - T_1^{f-1})/C_3 - C_1(T_1^{f-1} - T_1^f)/C_3, \quad (5.27)$$

i dla {6}

$$\bar{T}_1^f = T_1^{f-1} - C_1(T_1^{f-1} - T_1^f)/C_3. \quad (5.28)$$

Poprawione pole temperatury \bar{T}_1^f stanowi warunek początkowy dla następnego kroku obliczeń.

Powyższe wzory dla uproszczenia zapisu podano dla przypadku stałych parametrów termofizycznych strefy przejściowej i ciała stałego.

Jeśli zastępcza pojemność cieplna C_2 jest funkcją temperatury^{*}), wówczas równania dla przypadków {2}, {4}, {5}, z których wyznacza się poprawioną wartość temperatury \bar{T}_1^f przyjmują postać

- dla przypadku {2}

$$C_1 (T_L - \bar{T}_1^f) = \int_{\bar{T}_1^f}^{T_L} C_2 (T) dT, \quad (5.29)$$

- dla {4}

$$C_1 (T_1^{f-1} - \bar{T}_1^f) = \int_{\bar{T}_1^f}^{T_1^{f-1}} C_2 (T) dT, \quad (5.30)$$

- dla {5}

$$C_1 (T_1^{f-1} - \bar{T}_1^f) = \int_{T_S}^{T_1^{f-1}} C_2 (T) dT + C_2 (T_S - \bar{T}_1^f). \quad (5.31)$$

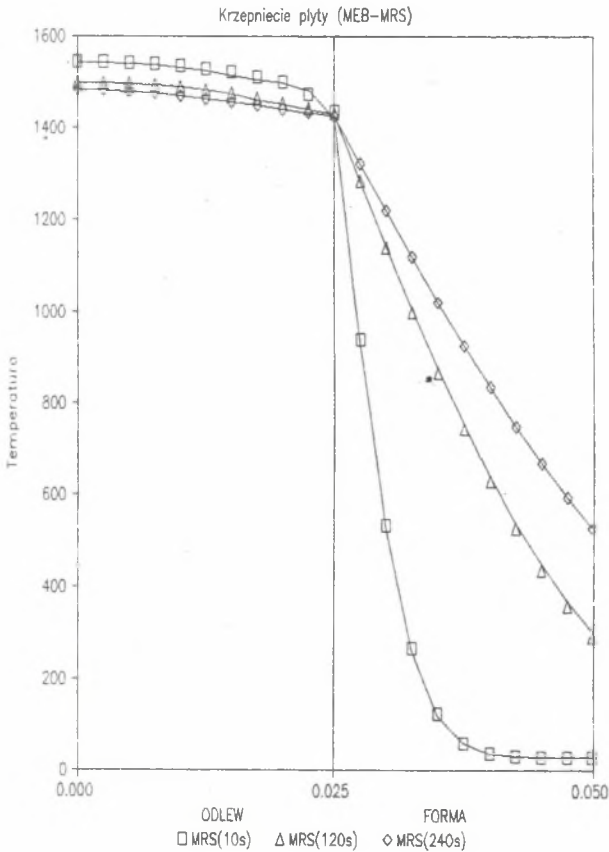
Przedstawioną procedurę modelowania procesu krzepnięcia w interwale temperatury sprawdzono na następującym przykładzie.

Rozważano płytę stalową grubości 0.05 m, krzepnącą w typowej masie formierskiej. Temperatura początkowa płyty wynosiła $T_p = 1550 [^{\circ}C]$, temperatura początkowa masy formierskiej $T_{pf} = 30 [^{\circ}C]$. Przyjęto $T_L = 1505$, $T_S = 1470 [^{\circ}C]$, $C_1 = 5904000 [J/Km^3]$, $C_2 = 61446000$, $C_3 = 4875000$, $Q = 1984500000 [J/m^3]$.

^{*}) Badania dotyczące zastępczej pojemności cieplnej strefy przejściowej dla stopów Fe-C prowadzili m.in. Borisow [15], Samojłowicz [16], Mochnacki [17] i in. [18]. We wszystkich cytowanych wyżej pracach zastępcza pojemność jest pewną funkcją temperatury $T \in \langle T_S, T_L \rangle$.

Wyniki porównano z wielokrotnie przetestowanym algorytmem wykorzystującym metodę różnic skończonych (rys.5.5). Linia ciągłą zaznaczono rozwiązania otrzymane na bazie metody elementów brzegowych dla czasów $t=10, 120, 240$ [s].

Rys.5.6 przedstawia rozkład temperatury w tej samej płycie po czasie 10, 30, 60, 120, 240 [s].



Rys.5.5. Pole temperatury w płycie i masie formierskiej

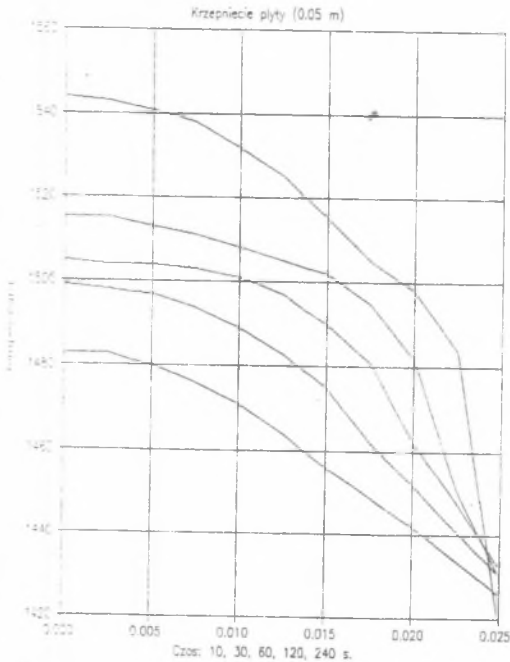
Fig.5.5. A temperature field in the plate and sand mix

Ten sam sposób modelowania procesu krzepnięcia i stygnięcia w interwale temperatury zastosowano przy wyznaczaniu jednowymiarowego pola temperatury w obszarze wlewka stalowego krzepnącego we wlewnicy o grubości 0.23[m] [19]. Szerokość krótszego boku wlewka wynosiła 0.76[m]. Przyjęte wymiary odpowiadają wlewkom wytwarzanym we wlewnicach w Hucie Sendzimir w Krakowie. W obliczeniach uwzględniono generowanie się szczeliny gazowej między wlewkiem a wlewnicą. Po czasie 200s (czas odejścia) realizowana była procedura wyznaczająca opór szczeliny gazowej między wlewkiem i wlewnicą. Opór ten był odwrotnością współczynnika wymiany ciepła liczonego z zależności

$$\alpha_s = 10^{-4} \epsilon C_c (T_{b1} + T_{b2}) [(T_{b1}/100)^2 + (T_{b2}/100)^2] + \alpha_{sk}, \quad (5.32)$$

gdzie ϵ -emisyjność zastępcza między zewnętrzną powierzchnią wlewka i wewnętrzną wlewnicy (przyjęto $\epsilon=0.8$), $C_c = 5.67 [W/K^2m^4]$, T_{b1} , T_{b2} - temperatury zewnętrznej powierzchni wlewka i wewnętrznej wlewnicy [K], α_{sk} -konwekcyjna składowa współczynnika α_s , którą liczone jak dla konwekcji swobodnej w ruchu laminarnym [20].

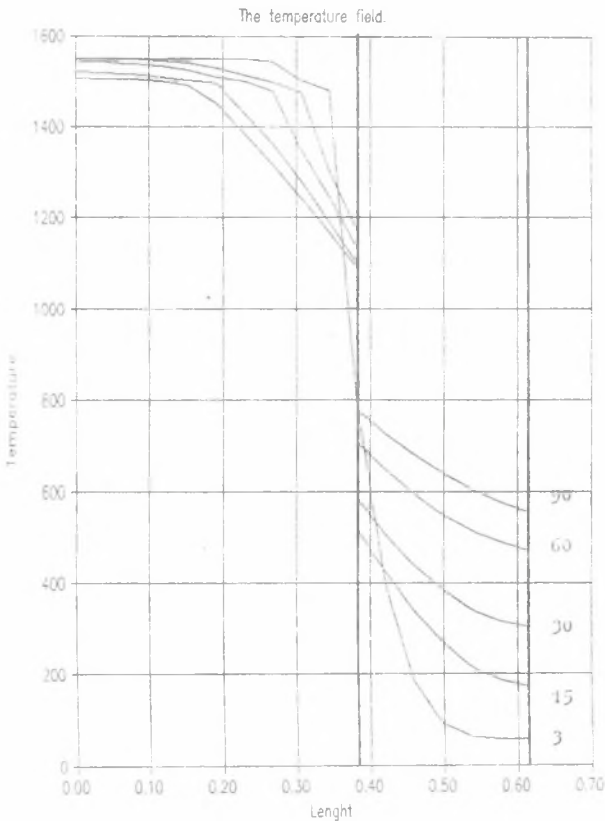
Aby uniknąć zbędnych iteracji przy obliczeniach składowej radiacyjnej i konwekcyjnej współczynnika α_s wykorzystywano temperatury z poprzedniej chwili czasu (warunek pseudopoczątkowy).



Rys.5.6. Krzepnięcie płyty

Fig.5.6. Solidification of plate

Na rys.5.7 pokazano rozkłady temperatury w obszarze wlewka i wlewnicy po czasie 3,15,30,60,90 min.Można zauważyć, że pole temperatury jest ciągle tylko dla czasu 3 min (czas mniejszy niż czas odejścia). Dla dłuższych czasów pole temperatury posiada nieciągłość typu skok skończony i co jest charakterystyczne, temperatura wewnętrznej powierzchni wlewnicy spada w stosunku do początkowych etapów procesu, a następnie stopniowo rośnie.



Rys.5.7. Krzepnięcie wlewka we wlewnicy

Fig.5.7. Solidification of ingot and ingot mould

Należy podkreślić, że przedstawiony algorytm modelowania krzepnięcia w interwale temperatury jest bardzo ogólny i może być stosowany w połączeniu z dowolną metodą numeryczną (MEB, MRS, MES) tzn. na bazie dowolnej metody poszukuje się rozwiązania dla obszaru jednorodnego (np. ciekłego metalu) dla poziomu czasu t^f a następnie dokonuje się korekty otrzymanego rozwiązania stosując przedstawione w tym rozdziale równania "poprawiające" temperaturę.

Innym możliwym do wykorzystania sposobem obliczeń przebiegu krzepnięcia w interwale temperatury jest połączenie metody elementów brzegowych dla zadań liniowych z uogólnioną metodą przemiennej fazy opracowaną przez A. Kapustę [21]. Metoda uogólniona sprowadza się do wielokrotnego rozwiązywania w każdym kroku czasu zadań dla formalnie ujednorodnionych obszarów i odpowiednim konstruowaniu kolejnych warunków pseudopoczątkowych. W swojej istocie algorytm jest rozszerzeniem algorytmu APTM przedstawionego w poprzednim rozdziale.

Problem krzepnięcia w interwale temperatury może być również formalnie sprowadzony do zadania Stefana [22]. Definiuje się tzw. ekwiwalentną temperaturę krzepnięcia

$$T_{ek} = \int_{T_S}^{T_L} C_2(T) T dT / \int_{T_S}^{T_L} C_2(T) dT. \quad (5.33)$$

Wyznaczoną w ten sposób temperaturę wprowadza się do klasycznego warunku Stefana i zadanie traktuje się jako problem z ostrym frontem rozdziału faz. Jeżeli np. przyjąć, że zastępcza pojemność cieplna $C_2(T)$ jest stała i wynosi $C_2(T) = Q / (T_L - T_S) \rho_2$ to

$$T_{ek} = \int_{T_S}^{T_L} T dT / \int_{T_S}^{T_L} dT = 0.5(T_L + T_S), \quad (5.34)$$

czyli temperatura zastępcza jest średnią arytmetyczną temperatury likwidus

i solidus.

Tak więc, jeżeli uznać takie podejście za wystarczająco dokładne to problemy prezentowane w rozdziale niniejszym można sprowadzić formalnie do zadań z rozdziału poprzedniego.

LITERATURA DO ROZDZIAŁU 5

- [1] B.Mochnacki , Substitute Thermal Capacity of Metal Solidifying in an Interval of Temperature, Bull. of Pol.Ac. of Sc, Techn., Vol.32, No 3-4, (1984),127-143
- [2] J.Crank , Free and Moving Boundary Problems, Claredon Press, Oxford 1984
- [3] R.Białecki, Solving of Nonlinear Heat Transfer Problems by BEM, [w:] 10th BEM, Vol.2, Proceedings of the 10th Boundary Element Conference, (Ed.C.A.Brebbia), Southampton, Springer Verlag, Berlin and New York (1988), 195-222
- [4] B.Mochnacki,M. Biedrońska, The Application of Collocational Method and Spline Functions to Linear and Non-Linear Problems of Non-Stationary Heat Conduction, Bull. of Pol.Ac. of Sc., Techn., No 5-6 (1984), 297-316
- [5] Y.Rao, A.Faghri , W.S.Chang ,A Numerical Analysis of Stefan Problems for Generalized Multi-Dimensional Phase Change Structures Using the Enthalpy Transforming Model, Int. J.Heat Mass Transfer, Vol.32, No 7(1989),1289-1298
- [6] C.P.Hong , T.Umeda , Y. Kimura , Numerical Models for Casting Solidification Problems, Part II. Application of the Boundary Element Method to Solidification Problems, Metall. Trans. B., Vol.15B,(1984), 101-107
- [7] C.P.Hong , T.Umeda ,Y. Kimura, Solidification of Shaped Castings by the Boundary Element Method and Prediction of Shrinkage Cavity,[w:]Official Exchange Paper, 53rd World Foundry Congress, Prague (1986)
- [8] L.C.Wrobel , C.A.Brebbia , Boundary Elements for Non-Linear Heat Conduction Problems, Communications in Applied Numerical Methods, Vol.4,(1988) 617-622
- [9] C.A.Brebbia , P.Skerget , Non-Linear Time Dependent Potential Problems Using BEM, [w:] 6th BEM, Proceedings of the 6th Boundary Element Conference, (Ed.C.A.Brebbia), Southampton, Springer Verlag, Berlin and New York, (1984), 9-39
- [10] M.Kikuta , H.Togoh , M.Tanaka , Boundary Element Analysis of Nonlinear Transient Heat Conduction Problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 62(1987), 321-329
- [11] K.Onishi, T.Kuroki, On Non-Linear Heat Transfer Problems, Developments in Boundary Element Methods-4, Chapter 6 (Ed. P.K.Banerjee, J.O.Watson) Elsevier Applied Science Publishers, London and New York (1986),149-190
- [12] G.S.Gibson, D.D. Reible, S.A.Savant, Boundary Elements and Perturbation Theory for Certain Classes of Hyperbolic and Parabolic Problems, [w:] 9th BEM, Proceedings of the 9th Boundary Element Conference (Ed. C.A. Brebbia,W.L.Wendland, G.Kuhn), Stuttgart, FRG, Springer-Verlag, Berlin and New York (1988), 115-127
- [13] J.Szargut , B.Mochnacki ,Różnicowy model matematyczny procesu krzepnięcia wlewka stali uspokojonej, Arch. Hutn. t.16 nr 3(1971),269-289
- [14] C.P.Hong , T.Umeda, Y. Kimura , Application of the Boundary Element Method in Two and Three Dimensional Unsteady Heat Transfer Involving Phase Change, Solidification Problems,[w:] 5th BEM, Proceedings of the 5th Boundary Element Conference,(Ed.C.A Brebbia,T.Futagami, M.Tanaka), Hiroshima, Japan, Springer Verlag, Berlin and New York,(1983), 153-162
- [15] W.T.Borisov , Krystallizacja binarnogo splawa pri sochranenii ustojcivosti, DAN SSSR, 136 (1961), 583-586

- [16] I.A.Samojłowicz, Formiowanie slitka, Metallurgia, Moskwa 1977
- [17] B.Mochnacki, Mathematical Model of the Heat Flow in the Interval of Solidification Temperatures of the FE-C Alloy, Krzepnięcie Metali i Stopów, t.V, Ossolineum, Wrocław (1982), 89-98
- [18] L.A.Kozdoba, Metody resienija nieliniejnych zadac tieploprovodnosti, Nauka, Moskwa 1975
- [19] E.Majchrzak, Numerical Model of Thermal Processes in the System Ingot-Ingot Mould on the Basis of BEM, [w:] III Int. Conf. FOCOMP'90, Sofia, Bułgaria (1990)
- [20] J.Szargut, Termodynamika, PWN, Warszawa 1980
- [21] A.Kapusta, Praca doktorska, Pol.Śl., Gliwice 1987
- [22] W.Longa, Krzepnięcie odlewów, Śląsk, Katowice 1985

6. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH DLA ZADAŃ DWUWYMIAROWYCH (2D)

W rozdziale niniejszym zostanie przedstawiona metoda elementów brzegowych dla dwuwymiarowego zadania nieustalonego przewodzenia ciepła. Istnieje kilka sposobów wyprowadzenia brzegowego równania całkowego dla równania parabolicznego. Podobnie jak w rozdziałach poprzednich tutaj również wybrano tzw. sformułowanie bezpośrednie wywodzące się z metody odchyłek ważonych. Przedstawiono jeden z wariantów MEB bazujący na rozwiązaniach fundamentalnych zależnych od czasu. Wszystkie rozważania dotyczą obiektów zorientowanych w układzie współrzędnych prostokątnych.

6.1. FORMUŁY GREENA [1]

Podrozdział niniejszy ma charakter pomocniczy i zawiera szczegółowe wyprowadzenie pewnych twierdzeń umożliwiających znalezienie brzegowego równania całkowego dla niestacjonarnego bezźródłowego 2D pola temperatury.

I Formuła Greena

Weźmy równanie Laplace'a

$$\nabla^2 T = 0, \quad (6.1)$$

gdzie $T(x_1, x_2)$ jest temperaturą w punkcie $x = \{x_1, x_2\} \in \text{Dol}\Gamma, D(x_1, x_2)$ rozpatrywanym obszarem ograniczonym krzywą $\Gamma(x_1, x_2)$, $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}$ -operatorem Laplace'a.

Dla $x \in \text{Dol}\Gamma$ spełniona jest równość

$$\int_D (\nabla^2 T) w dD = \int_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n} w d\Gamma - \int_D \text{grad} T \text{grad} w dD, \quad (6.2)$$

gdzie $w(x_1, x_2)$ jest dowolną funkcją ciągłą wraz z pierwszą pochodną w obszarze D i na brzegu Γ oraz posiada ciągłą drugą pochodną w D , $\frac{\partial T}{\partial n}$ - pochodną funkcji T w kierunku normalnym do krzywej Γ , $\text{grad}(\cdot) = [\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1}, \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2}]$.

Aby udowodnić tę formułę wykorzystuje się twierdzenie Greena:

Niech obszar jednospójny na płaszczyźnie $0x_1x_2$ będzie ograniczony krzywą regularną Γ obieganą dodatnio i niech $P, Q \in C^1(D \cup \Gamma)$. Wówczas

$$\int_{\Gamma} P dx_1 + Q dx_2 = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2. \quad (6.3)$$

Czyli z tw. Greena wynika, że

$$\int_D \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} Q dx_2, \quad \int_D \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = - \int_{\Gamma} P dx_1. \quad (6.4)$$

Niech $Q = Q_1 Q_2$ i $P = P_1 P_2$. Wówczas z (6.4) otrzymuje się

$$\int_{\Gamma} Q_1 Q_2 dx_2 = \int_D \left(Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} + Q_2 \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2, \quad (6.5)$$

$$- \int_{\Gamma} P_1 P_2 dx_1 = \int_D \left(P_1 \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + P_2 \frac{\partial P_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2. \quad (6.6)$$

Stąd

$$\int_D Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} Q_1 Q_2 dx_2 - \int_D Q_2 \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2, \quad (6.7)$$

$$\int_D P_1 \frac{\partial P_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = - \int_{\Gamma} P_1 P_2 dx_1 - \int_D P_2 \frac{\partial P_1}{\partial x_2} dx_1 dx_2. \quad (6.8)$$

Niech $Q_1 = w$, $Q_2 = \frac{\partial T}{\partial x_1}$ oraz $P_1 = w$ i $P_2 = \frac{\partial T}{\partial x_2}$. Wtedy

$$\int_D w \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} w \frac{\partial T}{\partial x_1} dx_2 - \int_D \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2, \quad (6.9)$$

$$\int_D w \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} dx_1 dx_2 = - \int_{\Gamma} w \frac{\partial T}{\partial x_2} dx_1 - \int_D \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2. \quad (6.10)$$

Po dodaniu stronami równań (6.9), (6.10) uzyskuje się

$$\int_D (v^2 T) dD = \int_{\Gamma} (w \frac{\partial T}{\partial x_1} dx_2 - w \frac{\partial T}{\partial x_2} dx_1) - \int_D (\frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2}) dD, \quad (6.11)$$

gdzie $dD = dx_1 dx_2$.

Wiadomo, że $dx_2 = \cos\beta d\Gamma$ i $dx_1 = \cos\alpha d\Gamma$, gdzie $\cos\alpha$, $\cos\beta$ są cosinusami kierunkowymi $d\Gamma$. Wówczas

$$\int_{\Gamma} w (\frac{\partial T}{\partial x_1} \cos\beta - \frac{\partial T}{\partial x_2} \cos\alpha) d\Gamma = \int_{\Gamma} w \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma. \quad (6.12)$$

Kierunek n w punkcie $P(x_1, x_2) \in \Gamma$ odpowiada kierunkowi normalnemu do brzegu w rozpatrywanym punkcie, ponieważ wektor o składowych $[\cos\beta, -\cos\alpha]$ jest prostopadły do wektora $[\cos\alpha, \cos\beta]$. Równocześnie wiadomo, że $\frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} = \text{grad}T \text{ grad}w$.

Po wstawieniu (6.12) do (6.11) otrzymuje się równanie (6.2).

II Formuła Greena

II formuła Greena ma postać

$$\int_D [(v^2 T)w - (v^2 w)T] dD = \int_{\Gamma} (w \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial w}{\partial n}) d\Gamma, \quad (6.13)$$

a jej dowód jest następujący. Wykorzystuje się I formułę Greena i zamienia się rolami T i w we wzorze (6.2):

$$\int_D (v^2 w)T dD = \int_{\Gamma} T \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_D (\text{grad}w \text{ grad}T) dD. \quad (6.14)$$

Po odjęciu stronami równania (6.14) od (6.2) otrzymuje się II formułę Greena.

6.2. BRZEGOWE RÓWNANIE CAŁKOWE DLA RÓWNANIA PARABOLICZNEGO

W tym rozdziale zostanie wyprowadzone brzegowe równanie całkowe dla równania parabolicznego

$$\frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = a \nabla^2 T(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\} \in D(x_1, x_2), \quad (6.15)$$

z następującymi warunkami brzegowymi

- warunkiem brzegowym I rodzaju

$$T(\mathbf{x}, t) = \bar{T}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (6.16)$$

- warunkiem brzegowym II rodzaju

$$q(\mathbf{x}, t) = -\lambda \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial n} = \bar{q}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (6.17)$$

- warunkiem brzegowym III rodzaju

$$q(\mathbf{x}, t) = -\alpha(T_\Gamma(\mathbf{x}, t) - T_{o_t}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3, \quad (6.18)$$

gdzie $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ jest brzegiem obszaru $D, \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$ - współrzędne przestrzenne, t - czas, $T(\mathbf{x}, t)$ - temperatura w punkcie \mathbf{x} w chwili $t, a = \lambda / \rho c$ - współczynnik wyrównywania temperatury, λ - współczynnik przewodzenia ciepła, ρ - gęstość, c - ciepło właściwe (zakłada się, że $a = \text{idem}$), $\bar{T}(\mathbf{x}, t)$ - zadany rozkład temperatury na brzegu $\Gamma_1, \bar{q}(\mathbf{x}, t)$ - znany strumień ciepła na fragmencie brzegu Γ_2, α - współczynnik wymiany ciepła ($\alpha = \text{idem}$), T_{o_t} - temperatura otoczenia, T_Γ - temperatura na brzegu Γ_3 .

Oczywiście na brzegu Γ nie muszą występować równocześnie wszystkie trzy rodzaje warunków i np. jeśli na całym brzegu Γ znany jest rozkład temperatury,

to przyjmuje się $T(x,t)=\bar{T}$, $x \in \Gamma^*$.

Przedstawiony opis matematyczny uzupełnia warunek początkowy

$$T(x,t) = T^0(x,t^0) = T^0(x), \quad x \in D, \quad (6.19)$$

gdzie $T^0(x)$ jest znanym rozkładem temperatury w chwili t^0 .

Wykorzystując metodę odchyłek ważonych można napisać

$$\int_{t^0}^{t^F} \int_D \left[a v^2 T(x,t) - \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \right] T^*(\xi, x, t^F, t) dD(x) dt = 0, \quad (6.20)$$

gdzie $[t^0, t^F]$ jest przedziałem czasowym, w którym rozpatruje się rozkład temperatury w rozważanym obszarze, natomiast $T^*(\xi, x, t^F, t)$ - funkcją wagową zależną między innymi od punktu $\xi=(\xi_1, \xi_2)$, w którym umieszczone jest punktowe źródło ciepła.

W metodzie elementów brzegowych dla zadań niestacjonarnych i obszarów dwuwymiarowych zorientowanych w prostokątnym układzie współrzędnych przyjmuje się następujące funkcje wagowe [2] nazywane też rozwiązaniami fundamentalnymi

$$T^*(\xi, x, t^F, t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi a(t^F-t)} \exp\left[\frac{-r^2}{4a(t^F-t)}\right], & t < t^F \\ 0, & t > t^F \end{cases}, \quad (6.21)$$

gdzie $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$ jest odległością między punktem $\xi=(\xi_1, \xi_2)$ i rozpatrywanym punktem $x=(x_1, x_2)$.

*) Nie uwzględniono tutaj możliwości wystąpienia warunku brzegowego IV rodzaju, ponieważ tym zagadnieniom był poświęcony rozdział III gdzie rozpatrywano zadania jednowymiarowe, a idea łączenia podobszarów, na styku których występuje ten warunek jest identyczna również w przypadku zadań dwu- i trójwymiarowych. Tak więc metoda elementów brzegowych zostanie w niniejszym rozdziale przedstawiona dla obszarów jednorodnych.

Niech $q^*(\xi, x, t^F, t) = -\lambda \partial T^*(\xi, x, t^F, t) / \partial n$. Wiadomo, że

$$q^*(\xi, x, t^F, t) = -\lambda \left(\frac{\partial T^*}{\partial x_1} \cos \alpha_1 + \frac{\partial T^*}{\partial x_2} \cos \alpha_2 \right), \quad (6.22)$$

gdzie $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2$ są cosinusami kierunkowymi normalnej do brzegu Γ .

Tak więc można łatwo sprawdzić, że

$$q^*(\xi, x, t^F, t) = \frac{\lambda d}{8\pi a^2 (t^F - t)^2} \exp \left[\frac{-r^2}{4a(t^F - t)} \right], \quad (6.23)$$

gdzie $d = (x_1 - \xi_1) \cos \alpha_1 + (x_2 - \xi_2) \cos \alpha_2$.

Rozwiązanie fundamentalne (6.21) ma następujące własności [2]

$$1^{\circ} \quad a \nabla^2 T^*(\xi, x, t^F, t) + \frac{\partial T^*(\xi, x, t^F, t)}{\partial t} = -\Delta(\xi, x) \Delta(t^F, t), \quad (6.24)$$

$$2^{\circ} \quad \lim_{t \rightarrow t^F} T^*(\xi, x, t^F, t) = \Delta(\xi, x), \quad (6.25)$$

gdzie $\Delta(\xi, x), \Delta(t^F, t)$ - funkcje delta Diraca .

Wykorzystując do pierwszego członu równania (6.20) II formułę Greena otrzymuje się

$$\int_{t_0}^{t^F} \int_D a(\nabla^2 T) T^* dD dt = \int_{t_0}^{t^F} \int_D a(\nabla^2 T^*) T dD dt - \frac{1}{\rho c} \int_{t_0}^{t^F} \int_{\Gamma} (T^* q - T q^*) d\Gamma dt. \quad (6.26)$$

Całkując przez części po czasie drugi człon lewej strony równania (6.20) mamy

$$\int_{t_0}^{t^F} \int_D \frac{\partial T}{\partial t} T^* dD dt = \int_D T^* dD \Big|_{t_0}^{t^F} - \int_{t_0}^{t^F} \int_D \frac{\partial T}{\partial t} T^* dD dt. \quad (6.27)$$

Wstawiając (6.27), (6.28) do (6.20):

$$\int_D \int_{t^0}^{t^F} \left(a \nabla^2 T^* + \frac{\partial T^*}{\partial t} \right) T dD dt - \int_D T T^* dD \Big|_{t^0}^{t^F} - \frac{1}{\rho c} \int_D \int_{t^0}^{t^F} (T^* q - T q^*) d\Gamma dt = 0. \quad (6.28)$$

Dla czasu t^F całki występujące w równaniu (6.28) są całkami osobliwymi, rozpatrując je dla $t=t^F-\varepsilon$, gdy ε zmierza do 0 i stosując własności rozwiązania fundamentalnego ostatecznie dla $\xi \in D$ otrzymuje się

$$\begin{aligned} & T(\xi, t^F) + \frac{1}{\rho c} \int_{t^0}^{t^F} \int_{\Gamma} q(x, t) T^*(\xi, x, t^F, t) d\Gamma(x) dt = \\ & = \frac{1}{\rho c} \int_{t^0}^{t^F} \int_{\Gamma} T(x, t) q^*(\xi, x, t^F, t) d\Gamma(x) dt + \int_D T^0(x, t^0) T^*(\xi, x, t^F, t^0) dD(x). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Natomiast dla $\xi \in \Gamma$ brzegowe równanie całkowe ma postać [2]

$$\begin{aligned} & c(\xi) T(\xi, t^F) + \frac{1}{\rho c} \int_{t^0}^{t^F} \int_{\Gamma} q(x, t) T^*(\xi, x, t^F, t) d\Gamma(x) dt = \\ & = \frac{1}{\rho c} \int_{t^0}^{t^F} \int_{\Gamma} T(x, t) q^*(\xi, x, t^F, t) d\Gamma(x) dt + \int_D T^0(x, t^0) T^*(\xi, x, t^F, t^0) dD(x), \end{aligned} \quad (6.30)$$

gdzie $c(\xi)$ jest współczynnikiem zależnym od lokalnego kształtu brzegu Γ , w którym umieszczone jest źródło ciepła. I tak dla gładkiej granicy $c(\xi)=0.5$, dla naroża prostokątnego wypukłego $c(\xi)=0.25$, a dla punktu wewnętrznego $c(\xi)=1$.

Równanie (6.30) jest całkowym odpowiednikiem opisu matematycznego (6.15) - (6.19). Ostatni człon po prawej stronie tego równania dotyczy warunku początkowego (6.19), zadane warunki brzegowe tzn. temperaturę na brzegu Γ_1 wprowadza się do lewego składnika po prawej stronie równania (6.30), natomiast strumienie ciepła na fragmentach Γ_2 i Γ_3 opisane zależnościami (6.17), (6.18) do prawego składnika lewej strony tego równania. Pozostałe nieznanne wartości temperatur i strumieni ciepła na brzegu Γ należy obliczyć. Po znalezieniu

tych niewiadomych, wartości temperatur we wnętrzu obszaru D określa się z równania (6.29)..

Oczywiście rozwiązanie tego zadania poszukuje się metodami numerycznymi.

Ponieważ charakter zależności funkcji T i q od czasu nie jest znany, dlatego dla otrzymania rozwiązania numerycznego należy dokonać dyskretyzacji rozpatrywanego przedziału czasu $[t^0, t^F]$.

Wprowadza się więc siatkę: $t^0 < t^1 < t^2 < \dots < t^{f-1} < t^f < \omega$, gdzie $\Delta t = t^f - t^{f-1}$ jest krokiem czasu. Ze względu na to, że rozwiązanie fundamentalne jest zależne od czasu, zwykle można stosować duże kroki Δt . Poszukując rozwiązania numerycznego równania (6.30) można wykorzystywać dwa różne schematy różnicowe:

- I schemat

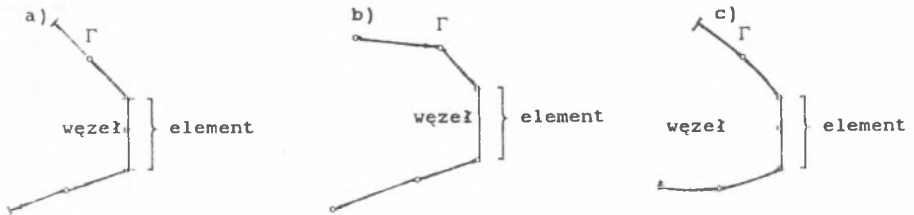
Każdy krok po czasie rozpatruje się jako nowe zadanie, dlatego na końcu każdego kroku Δt oblicza się wartości funkcji $T(x, t)$ w dostatecznie dużej liczbie punktów wewnętrznych aby je wykorzystać jako warunek pseudo-początkowy dla następnego kroku czasu.

- II schemat

Proces całkowania po czasie zaczyna się zawsze od chwili t^0 i w ten sposób bez względu na wzrastającą wraz z upływem czasu liczbę pośrednich kroków Δt , nie trzeba obliczać wartości funkcji $T(x, t)$ w punktach wewnętrznych na końcu każdego kroku czasowego. Poza tym, jeśli $T^0(x, t^0) = 0$ to całka po obszarze D w równaniu (6.30) znika, a dla $T^0(x, t^0) = \text{idem}$ można rozwiązywać zadanie z zerowymi warunkami początkowymi i do otrzymanego rozwiązania dodać tę stałą wartość. Oprócz tego, przy pewnych dodatkowych założeniach [2], całkę po obszarze D w równaniu (6.30) można przekształcić w równoważne całki po brzegu Γ . Tak więc w większości ważnych dla praktyki zadań można obniżyć wymiar zagadnienia, ponieważ dyskretyzacji podlega tylko brzeg rozpatrywanego obszaru. Jest to jedna z najważniejszych zalet metody elementów brzegowych.

6.3. REALIZACJA NUMERYCZNA METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

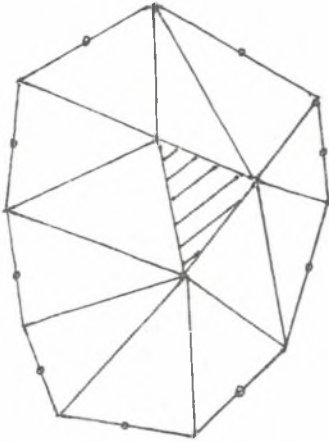
Aby rozwiązać numerycznie równanie (6.30) należy dokonać dyskretyzacji rozpatrywanego obszaru D jak również brzegu Γ tego obszaru. W tym celu brzeg Γ obszaru D dzieli się na N elementów. Kształt tych elementów można przybliżać odcinkami prostych, łukami parabol itp. Punkty brzegu Γ , w których poszukuje się wartości nieznannej funkcji (temperatury lub strumienia ciepła) nazywa się węzłami brzegowymi i dla tzw. "stałych" elementów znajdują się one w środku każdego prostoliniowego elementu (przy czym zakłada się, że funkcje $T(x,t)$ i $q(x,t)$ przyjmują stałe wartości na każdym z elementów). W przypadku elementów liniowych węzły znajdują się w miejscach połączenia dwóch prostoliniowych elementów i przyjmuje się, że funkcje $T(x,t)$ oraz $q(x,t)$ zmieniają się liniowo wzdłuż rozpatrywanego elementu. Można również rozważać elementy krzywoliniowe np. kwadratowe (drugiego rzędu) - por. rys. 6.1.



Rys. 6.1. Elementy brzegowe (a-stałe, b-liniowe, c-kwadratowe)

Fig. 6.1. Boundary elements (constant, linear, quadratic)

W celu przybliżonego obliczenia całki $\int_D T^0(x, t^0) T^F(\xi, x, t^F, t^0) dD(x)$ (w przypadku gdy ta całka nie jest równa zero) należy wewnątrz obszaru D podzielić na L podobszarów. Najczęściej wewnątrz obszaru D pokrywa się trójkątami lub czworokątami - rys. 6.2 i w zależności od przyjętej aproksymacji funkcji T i q na elemencie wewnętrznym (funkcjami stałymi, liniowymi, kwadratowymi, itp.) rozpatruje się stałe, liniowe, kwadratowe itd. elementy wewnętrzne.



Jak już wcześniej podkreślono, dla znalezienia rozwiązania numerycznego równania (6.30) dokonuje się również dyskretyzacji przedziału czasu $[t^0, t^F]$ wprowadzając siatkę: $t^0 < t^1 < \dots < t^{f-1} < t^f \dots < t^F < \infty$, gdzie $\Delta t = t^f - t^{f-1}$ jest krokiem czasu, przy czym zakłada się że funkcje $T(x, t)$ i $q(x, t)$ przyjmują wartości stałe w każdym kroku Δt , zmieniają się liniowo lub aproksymowane są funkcjami wyższego rzędu (rozwiązanie numeryczne liniowego równania parabolicznego dla elementów liniowych po czasie wraz z programem i wynikami obliczeń przedstawiono na przykład w pracy [3]).

Rys.6.2. Elementy brzegowe (stałe) i podobszary D_1
Fig.6.2. Boundary elements(constant) and internal cells D_1

W dalszych rozważaniach prezentowanych w tym rozdziale ograniczono się do elementów stałych po czasie i po współrzędnych przestrzennych^{*)}. Funkcje T i q znajdujące się pod znakami całek w równaniu (6.30) przyjmują w tym przypadku stałe wartości w obszarze każdego elementu oraz w rozpatrywanym przedziale czasowym i dlatego mogą być wyłączone przed znaki całek. Całkowanie po brzegu Γ zastępuje się sumą całek po elementach brzegu Γ_j , a całkowanie po obszarze D sumą całek po podobszarach D_1 . Brzeg obszaru Γ dzieli się (jak już wcześniej zaznaczono) na N elementów brzegowych, z których N_1 ele-

^{*)} Zdaniem wielu specjalistów zajmujących się praktycznym zastosowaniem MEB przyjęcie stałych elementów brzegowych i wewnętrznych zapewnia wystarczającą dokładność obliczeń numerycznych, a przy tym prowadzi do stosunkowo prostych algorytmów i programów komputerowych.

W niniejszej pracy w niektórych przykładach dotyczących obliczeń przepływu ciepła w procesie krzepnięcia i stygnięcia odlewów wykorzystano elementy przestrzenne wyższego rzędu i stałe po czasie. Wprawdzie elementy wyższego rzędu mogą mieć większe wymiary liniowe, ale stopień komplikacji algorytmu jest znaczny.

mentów znajduje się na brzegu Γ_1 (w węzłach należących do tych elementów znane są wartości temperatury), N_2 elementów na brzegu Γ_2 (z kolei w węzłach należących do tych elementów znane są wartości strumieni ciepła -warunek brzegowy II rodzaju) i N_3 elementów na brzegu Γ_3 (warunek brzegowy III rodzaju).

Dla I schematu MEB otrzymuje się następujący dyskretny analogon równania (6.30)

$$c_i T_i^F + \frac{1}{\rho c} \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Gamma_j}^{t^F} (T_{1,j}^* dt) d\Gamma_j \right] q_j^F = \frac{1}{\rho c} \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Gamma_j}^{t^F} (q_{1,j}^* dt) d\Gamma_j \right] T_j^F + \sum_{l=1}^L \left[\int_{D_l}^{t^F} T_{1,1}^* dD_l \right] T_i^{F-1}, \quad (6.31)$$

i=1...N.

Natomiast dla drugiego schematu obliczeń równanie (6.30) przybliża się następująco

$$c_i T_i^F + \frac{1}{\rho c} \sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F \left[\int_{\Gamma_j}^{t^f} (T_{1,j}^* dt) d\Gamma_j \right] q_j^f = \frac{1}{\rho c} \sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F \left[\int_{\Gamma_j}^{t^f} (q_{1,j}^* dt) d\Gamma_j \right] T_j^f + \sum_{l=1}^L \left[\int_{D_l}^{t^F} T_{1,1}^* dD_l \right] T_i^0, \quad (6.32)$$

i=1...N.

Równania (6.31) i (6.32) przedstawiają w postaci dyskretnej związek między węzłem "i", w którym zadaje się rozwiązanie fundamentalne i wszystkimi "j"-tymi elementami (włączając element i=j) na brzegu Γ , oraz między węzłem "i" i wszystkimi "l"-tymi podobszarami D_l .

Całkowanie po czasie w równaniach (6.31), (6.32) można wykonać analitycznie. Całka po czasie z funkcji $q^*(\xi, x, t^F, t)$ (przedstawionej wzorem (6.24)) jest równa

$$\int_{t^{F-1}}^{t^F} q_{1,j}^* dt = \frac{\lambda d_{1,j}}{8\pi a^2} \int_{t^{F-1}}^{t^F} \frac{1}{(t^F-t)^2} \exp\left[\frac{-r_{1,j}^2}{(t^F-t)}\right] dt = \frac{\lambda d_{1,j}}{8\pi a^2} \int_{t^F-t^{F-1}}^{t^F-t^F} \frac{1}{z^2} \exp\left(\frac{-r_{1,j}^2}{4az}\right) dz. \quad (6.33)$$

Zastosowano tutaj podstawienie $z=t^F-t$. Po wprowadzeniu $v = \frac{r_{1,j}}{4az}$ otrzymuje się

$$\int_{t^{f-1}}^{t^f} q_{1j}^* dt = \frac{\lambda d_{1j}}{8\pi a^2} \int_{\frac{r_{1j}^2}{4a(t^F-t^{f-1})}}^{\frac{r_{1j}^2}{4a(t^F-t^f)}} \frac{4a}{r_{1j}^2} \exp(-v) dv = \frac{\lambda d_{1j}}{2\pi r_{1j}^2 a} \left[\exp\left[\frac{-r_{1j}^2}{4a(t^F-t^{f-1})}\right] - \exp\left[\frac{-r_{1j}^2}{4a(t^F-t^f)}\right] \right]. \quad (6.34)$$

Aby obliczyć całkę po czasie z funkcji $T^*(\xi, x, t^F, t)$ (opisanej wzorem (6.21)) wprowadza się podstawienie $z=t^F-t$ a następnie $v=\frac{r_{1j}^2}{4az}$. Wówczas

$$\int_{t^{f-1}}^{t^f} T_{1j}^* dt = \frac{1}{4\pi a} \int_{t^{f-1}}^{t^f} \frac{1}{(t^F-t)} \exp\left[\frac{-r_{1j}^2}{4a(t^F-t)}\right] dt = \frac{1}{4\pi a} \int_{\frac{t^F-t^f}{t^F-t^{f-1}}}^{\frac{t^F-t^f}{t^F-t}} \frac{1}{z} \exp\left(-\frac{r_{1j}^2}{4az}\right) dz = \quad (6.35)$$

$$= \frac{1}{4\pi a} \int_{\frac{r_{1j}^2}{4a(t^F-t^{f-1})}}^{\frac{r_{1j}^2}{4a(t^F-t^f)}} \frac{1}{v} \exp(-v) dv = \frac{1}{4\pi a} \left[\text{Ei}\left[\frac{r_{1j}^2}{4a(t^F-t^{f-1})}\right] - \text{Ei}\left[\frac{r_{1j}^2}{4a(t^F-t^f)}\right] \right],$$

gdzie $\text{Ei}(v) = \int_v^{\infty} \frac{1}{v} \exp(-v) dv$ jest eksponencjalną funkcją całkową, której rozwinięcie w szereg ma następującą postać

$$\text{Ei}(v) = -0.57722166 - \ln(v) + v - \frac{v^2}{2 \cdot 2!} + \frac{v^3}{3 \cdot 3!} - \frac{v^4}{4 \cdot 4!} + \frac{v^5}{5 \cdot 5!} - \frac{v^6}{6 \cdot 6!} + \dots \quad (6.36)$$

Wystarczającą dokładność (rzędu 10^{-7}) wyznaczenia wartości funkcji $\text{Ei}(v)$ zapewnia przybliżenie jej zależnością w postaci [4]

$$\text{Ei}(v) = \begin{cases} -0.57721566 - \ln v + 0.99999193v - 0.24991055v^2 + 0.05519968v^3 - 0.00976v^4 + \\ + 0.00107857v^5, & v < 1 \\ \frac{\exp(-v) [0.2677737343 + 8.6347608925v + 18.059016973v^2 + 8.5733287401v^3 + v^4]}{v(3.958496228 + 21.0996530827v + 25.6329561486v^2 + 9.5733223454v^3 + v^4)}, & v \geq 1 \end{cases} \quad (6.37)$$

6.3.1. I WARIANT METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

Dla I schematu obliczeń metody elementów brzegowych przy $f=F$ i $\Delta t=t^F-t^{F-1}$ zależności (6.34), (6.35) mają postać

$$\int_{t^{F-1}}^{t^F} q_{1j}^* dt = \frac{\lambda d_{1j}}{2\pi r_{1j}^2 a} \left[\exp\left[\frac{-r_{1j}^2}{4a(t^F-t^{F-1})}\right] - \exp\left[\frac{-r_{1j}^2}{4a(t^F-t^F)}\right] \right] = \frac{\lambda d_{1j}}{8\pi r_{1j}^2 a} \exp\left(\frac{-r_{1j}^2}{4a\Delta t}\right), \quad (6.38)$$

$$\int_{t^{F-1}}^{t^F} T_{1j}^* dt = \frac{1}{4\pi a} \left[\text{Ei}\left[\frac{r_{1j}^2}{4a(t^F-t^{F-1})}\right] - \text{Ei}\left[\frac{r_{1j}^2}{4a(t^F-t^F)}\right] \right] = \frac{1}{4\pi a} \text{Ei}\left(\frac{r_{1j}^2}{4a\Delta t}\right). \quad (6.39)$$

Po wstawieniu wyrażeń (6.38), (6.39) do równania (6.31) otrzymuje się

$$c_{1j} T_{1j}^F + \frac{1}{4\pi\lambda} \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Gamma_j} \text{Ei}\left(\frac{r_{1j}^2}{4a\Delta t}\right) d\Gamma \right] q_j^F = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Gamma_{1j}} \frac{d_{1j}}{r_{1j}^2} \exp\left(\frac{-r_{1j}^2}{4a\Delta t}\right) d\Gamma \right] T_j^F + \frac{1}{4\pi a\Delta t} \sum_{i=1}^L \left[\int_{D_i} \exp\left(\frac{-r_{1j}^2}{4a\Delta t}\right) dD_i \right] T_{1j}^{F-1}, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (6.40)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$G_{1j} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left[\int_{\Gamma_j} \text{Ei}\left(\frac{r_{1j}^2}{4a\Delta t}\right) d\Gamma \right], \quad \hat{H}_{1j} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\Gamma_{1j}} \frac{d_{1j}}{r_{1j}^2} \exp\left(\frac{-r_{1j}^2}{4a\Delta t}\right) d\Gamma \right], \quad (6.41)$$

$i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, N,$

oraz

$$P_{1l} = \frac{1}{4\pi a\Delta t} \left[\int_{D_l} \exp\left(\frac{-r_{1j}^2}{4a\Delta t}\right) dD_l \right], \quad i=1, \dots, N, \quad l=1, \dots, L, \quad (6.42)$$

równanie (6.40) przyjmuje formę

$$c_{1j} T_{1j}^F + \sum_{j=1}^N G_{1j} q_j^F = \sum_{j=1}^N \hat{H}_{1j} T_j^F + \sum_{i=1}^L P_{1i} T_{1i}^{F-1}, \quad i=1, \dots, N. \quad (6.43)$$

Niech

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} & \text{dla } i \neq j \\ H_{ij} - c_i & \text{dla } i = j \end{cases} \quad (6.44)$$

wtedy (6.40) ma postać

$$\sum_{j=1}^N G_{ij} q_j^F = \sum_{j=1}^N H_{ij} T_j^F + \sum_{l=1}^L P_{il} T_l^{F-1} \quad i=1 \dots N \quad (6.45)$$

Tak więc (6.45) jest układem N równań o N niewiadomych. Po przeniesieniu niewiadomych na lewą stronę układ równań (6.45) można zapisać

$$Ay = b, \quad (6.46)$$

gdzie y jest wektorem nieznanych wartości funkcji T i q na brzegu Γ , macierz A jest macierzą gęstą o wymiarach $N \times N$. Po rozwiązaniu układu równań (6.46) na przykład metodą eliminacji Gaussa z wyborem elementu dominującego znane są wszystkie wartości funkcji T i q w węzłach brzegowych, co daje możliwość obliczenia wartości funkcji T we wnętrzu obszaru D . W tym celu ustala się M węzłów wewnętrznych, w których oblicza się temperaturę (oczywiście dla węzłów wewnętrznych $c_l = 1$) na podstawie zależności

$$T_i^F = \sum_{j=1}^N H_{ij} T_j^F - \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j^F + \sum_{l=1}^L P_{il} T_l^{F-1}, \quad i=N+1 \dots N+M. \quad (6.47)$$

Wielkości G_{ij} , H_{ij} , P_{il} wyrażają się także wzorami (6.41), (6.42) z tym, że liczone są dla $i=N+1 \dots N+M$.

Równanie (6.47) przedstawia zależność między wartością temperatury w węźle wewnętrznym "i" w chwili czasowej t^F i temperaturami oraz strumieniami w węzłach brzegowych "j" (w chwili czasowej t^F) a także temperaturami w węzłach wewnętrznych "l" znanymi z poprzedniej chwili czasowej t^{F-1} .

W pierwszym schemacie obliczeń otrzymane wartości temperatury dla czasu t^F w węzłach wewnętrznych obszaru D stanowią warunek pseudopoczątkowy dla na-

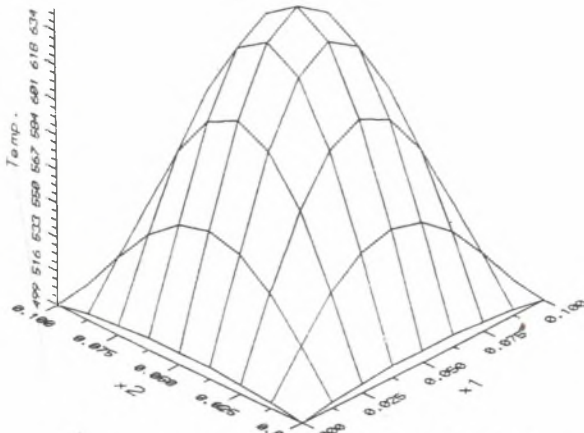
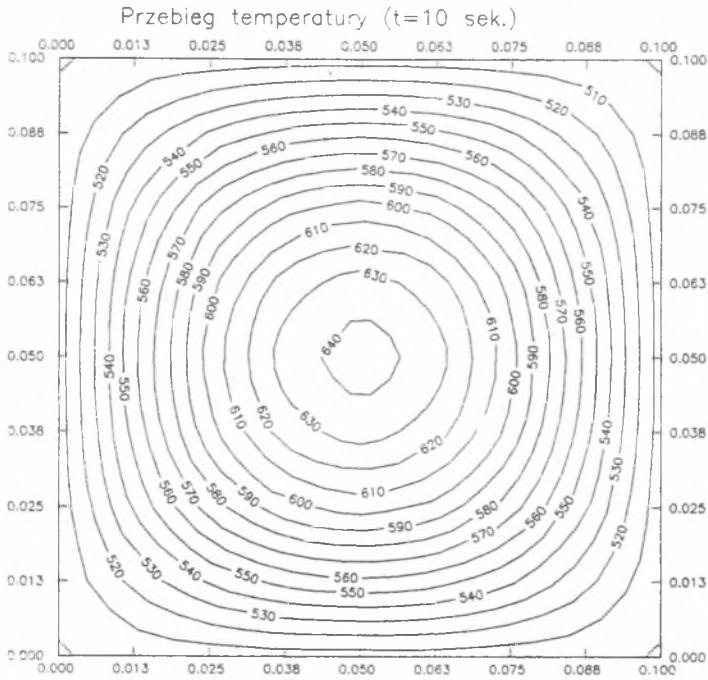
stępnego kroku czasowego.

Całki wyrażone wzorami (6.41), (6.42) oblicza się numerycznie. W tym celu dokonuje się transformacji współrzędnych tak, aby wyznaczać całki z funkcji jednej zmiennej η przyjmującej wartości od -1 do 1 na rozważanym elemencie brzegowym Γ_j i z funkcji dwóch zmiennych $\eta_1, \eta_2 \in [-1, 1]$ na elemencie wewnętrznym D_i . Dla tak zunifikowanych całek stosuje się kwadratury Gaussa [5] pozwalające obliczyć ich wartości z żadaną dokładnością.

Na bazie I schematu obliczeń metody elementów brzegowych wyznaczono niestacjonarne, beźródłowe pole temperatury w miedzianej płycie o wymiarach $0,1 \times 0,1\text{m}$ i temperaturze początkowej 1000°C . Na brzegu płyty przyjęto warunek I rodzaju $\bar{T}=500^\circ\text{C}$. Założono następujące parametry termofizyczne $\lambda=330[\text{W/mK}]$, $\rho=8920[\text{kg/m}^3]$, $c=420[\text{J/(kgK)}]$. Zastosowano tutaj stałe elementy brzegowe o długości $0,0125\text{m}$ a obszar płyty pokryto kwadratami o wymiarach $0,0125 \times 0,0125\text{m}$ (stałe elementy wewnętrzne). Temperaturę obliczano w 32 węzłach brzegowych i 64 węzłach wewnętrznych będących centralnymi punktami kwadratów. Obliczenia prowadzono ze stałym krokiem $\Delta t=2\text{s}$.

Na rys 6.3 przedstawiono otrzymane po czasie $t=10\text{s}$ izotermy i dwuwymiarową powierzchnię temperatury rozciągniętą nad rozważaną płytą.

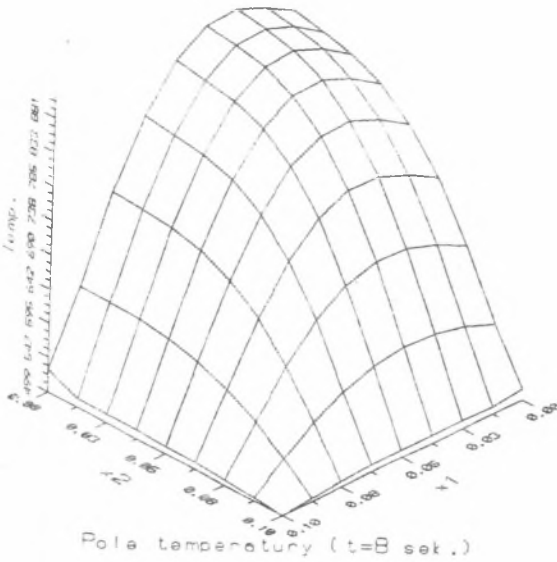
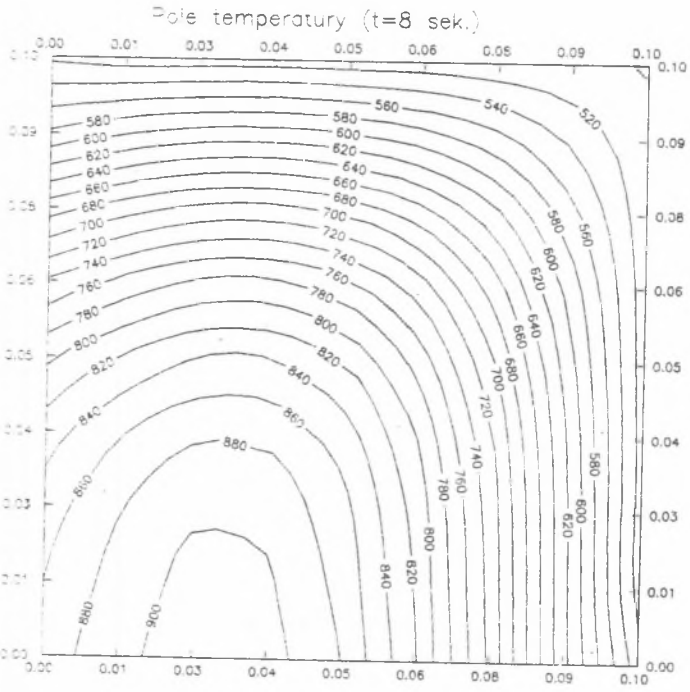
Rys.6.4 ilustruje rozkład temperatury po czasie $t=8\text{s}$ otrzymany dla tej samej płyty z tym, że przyjęto inne warunki brzegowe. Na dolnym brzegu płyty założono warunek brzegowy II rodzaju $\bar{q}=0$, na prawej i górnej powierzchni $\bar{T}=500^\circ\text{C}$, a na lewej warunek $\bar{q}=\alpha(T_\Gamma - T_{o_t})$, gdzie $\alpha=1500[\text{W/mK}]$, $T_{o_t}=30^\circ\text{C}$.



Przebieg temperatury ($t=10$ sek.)

Rys.6.3. Pole temperatury w płycie

Fig.6.3. Temperature field in the plate



Rys.6.4. Pole temperature w płycie

Fig.6.4. Temperature field in the plate

6.3.2. II WARIANT METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

Dla drugiego schematu obliczeń wyrażenia (6.34), (6.35) przyjmują postać (przy stałym kroku Δt)^{*}

$$\int_{t^{f-1}}^{t^f} q_{1j}^* dt = \frac{\lambda d_{1j}}{2\pi r_{1j}^2} a \left[\exp\left[\frac{-r_{1j}^2}{4a(t^f - t^{f-1})}\right] - \exp\left[\frac{-r_{1j}^2}{4a(t^f - t^f)}\right] \right] =$$

$$= \frac{\lambda d_{1j}}{2\pi r_{1j}^2} a \left[\exp\left[\frac{-r_{1j}^2}{4a(F - (f-1)\Delta t)}\right] - \exp\left[\frac{-r_{1j}^2}{4a(F - f)\Delta t}\right] \right], \quad (6.48)$$

$$\int_{t^{f-1}}^{t^f} T_{1j}^* dt = \frac{1}{4\pi a} \left[\text{Ei}\left[\frac{r_{1j}^2}{4a(t^f - t^{f-1})}\right] - \text{Ei}\left[\frac{r_{1j}^2}{4a(t^f - t^f)}\right] \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi a} \left[\text{Ei}\left[\frac{r_{1j}^2}{4a(F - (f-1)\Delta t)}\right] - \text{Ei}\left[\frac{r_{1j}^2}{4a(F - f)\Delta t}\right] \right]. \quad (6.49)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$G_{1j}^0 = \frac{1}{4\pi\lambda} \int_{\Gamma} \text{Ei}\left(\frac{r_{1j}}{4a\Delta t}\right) d\Gamma, \quad G_{1j}^f = \frac{1}{4\pi\lambda} \left\{ \text{Ei}\left[\frac{r_{1j}^2}{4a(f+1)\Delta t}\right] - \text{Ei}\left[\frac{r_{1j}^2}{4af\Delta t}\right] \right\} d\Gamma, \quad (6.50)$$

$$\hat{H}_{1j}^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{d_{1j}}{r_{1j}^2} \exp\left(\frac{-r_{1j}^2}{4a\Delta t}\right) d\Gamma, \quad \hat{H}_{1j}^f = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{d_{1j}}{r_{1j}^2} \left[\exp\left[\frac{-r_{1j}^2}{4a(f+1)\Delta t}\right] - \exp\left[\frac{-r_{1j}^2}{4af\Delta t}\right] \right] d\Gamma,$$

$i, j=1, \dots, N$

oraz

$$H_{1j}^f = \begin{cases} \hat{H}_{1j}^f & \text{dla } i \neq j \\ \hat{H}_{1j}^f - c_i & \text{dla } i = j \end{cases}$$

^{*} W niniejszym rozdziale założono, że $T(x, t^0) = \text{const}$, ponieważ w tym przypadku można rozwiązywać zadanie z zerowym warunkiem początkowym, co powoduje zerowanie się całki po wnętrzu obszaru D i uproszczenie analizowanych wzorów.

brzegowe równanie całkowe (6.32) wyraża się wzorem

$$\sum_{j=1}^N G_{1j}^0 q_j^F = \sum_{j=1}^N H_{1j}^0 T_j^F + \sum_{f=1}^{F-1} \sum_{j=1}^N (H_{1j}^f T_j^{F-f} - G_{1j}^f q_j^{F-f}) . \quad (6.51)$$

Można zauważyć, że dla $F=1$ II schemat obliczeń MEB pokrywa się z I schematem.

Dalszy ciąg postępowania w celu otrzymania układu rozwiązującego jest podobny do przedstawionego w podrozdziale 6.3.1 i nie będzie tutaj powtarzany z tym, że temperatury w punktach wewnętrznych obszaru D w tym przypadku wyznacza się z równań

$$T_i^F = \sum_{j=1}^N H_{ij}^0 T_j^F - \sum_{j=1}^N G_{ij}^0 q_j^F + \sum_{f=1}^{F-1} \sum_{j=1}^N (H_{ij}^f T_j^{F-f} - G_{ij}^f q_j^{F-f}) , \quad (6.52)$$

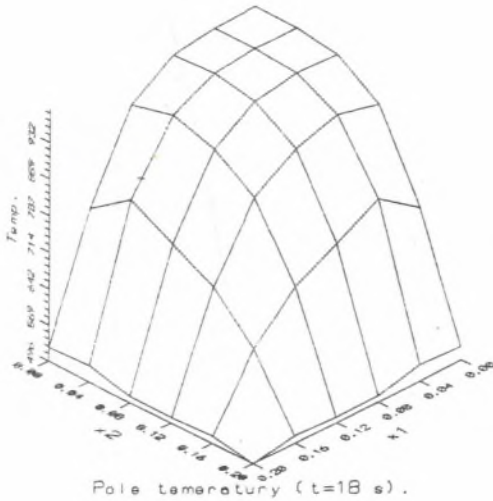
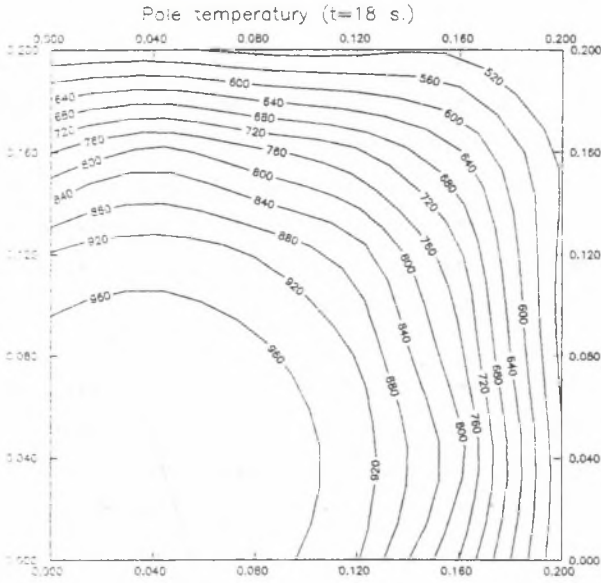
$i=N+1, \dots, N+M.$

Równanie (6.52) przedstawia zależność między wartością temperatury w węzle wewnętrznym "i" w chwili t^F i temperaturami oraz strumieniami ciepła w węzłach brzegowych "j" (w chwilach t^1, t^2, \dots, t^F).

Należy zwrócić uwagę na fakt, że w drugim schemacie obliczeń trzeba pamiętać wszystkie rozwiązania z poprzednich poziomów czasu oraz macierze G_{ij}^f i H_{ij}^f ale stosując ten schemat, w wielu zagadnieniach inżynierskich udaje się uniknąć żmudnego obliczania całek podwójnych.

Rys.6.5 przedstawia wyniki obliczeń niestacjonarnego pola temperatury w miedzianej płycie o wymiarach 0.2*0.2m otrzymane na bazie II schematu MEB.

Aby uniknąć dyskretyzacji wnętrza obszaru D, obliczenia przeprowadzono dla zerowych warunków początkowych i do uzyskanego rozwiązania dodano początkową wartość temperatury: 1000°C. Przyjęto $\bar{q}=0$ na lewym i dolnym brzegu płyty, oraz $\bar{T}=500$ na pozostałych brzegach. Obliczenia przeprowadzono dla stałych elementów brzegowych o długości 0.05m oraz 16 arbitralnie wybranych węzłów wewnętrznych. Krok czasu wynosił $\Delta t=2s$.



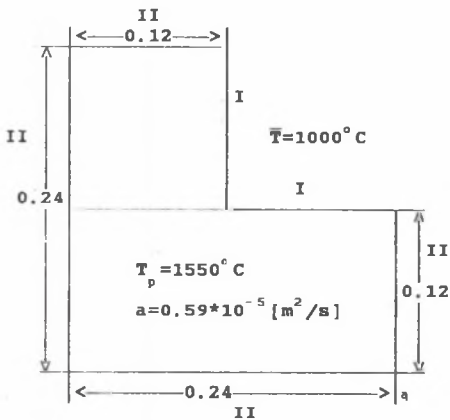
Rys.6.5. Pole temperature po czasie 18s

Fig.6.5. Temperature field after the time 18s

6.4. OBSZARY WYPUKŁE I OBSZARY WKŁĘSZE

Liczne eksperymenty numeryczne wykonane w ramach niniejszej pracy pokazały, że metoda brzegowych równań całkowych jest bardzo dokładna i efektywna przy symulacji nieustalonego przepływu ciepła (w tym również procesu krzepnięcia) dla obszarów wypukłych (w sensie klasycznej definicji wypukłości geometrycznej). Przykładem takich rozwiązań mogą być wyniki pokazane na rysunkach 6.3, 6.4, 6.5 oraz np. rozwiązanie dla miedzianego wlewka ciągłego, które zostanie przedstawione w rozdziale następnym.

Z kolei pierwsze próby obliczeń niestacjonarnych pól temperatury w obszarach niewypukłych np. naroże prostokątne, na bazie typowego algorytmu MEB dla ciał jednorodnych zakończyły się porażką. Rozwiązanie numeryczne było bardzo niedokładne, różnice między uzyskiwanymi wynikami a rozwiązaniem otrzymanym na bazie metody różnic skończonych przy odpowiednio gęstych siatkach zapewniających dużą dokładność były rzędu kilkudziesięciu procent, przy czym maksymalny błąd pojawiał się w pobliżu naroża.



Rys. 6.6. Naroże prostokątne

Fig. 6.6. Rectangular corner

W tabelach 6.1 i 6.2 pokazano dla przykładu rozwiązanie numeryczne dla obszaru typu naroże prostokątne skończone przy warunkach brzegowych I rodzaju w pobliżu naroża oraz warunku II rodzaju ($\bar{q} = 0$) na pozostałych liniach ograniczających obszar D-rys. 6.6. Wyniki przedstawione w tabelach 6.1, 6.2 dotyczą podziału na elementy stałe, ale przejście na elementy wyższego rzędu nie zmieniło istotnie sytuacji.

TABELA 6.1. (czas 720s)

<u>MEB</u>								<u>Błąd</u>							
1353	1332	1242	1090					1.8	0.6	0.0	0.0				
1350	1326	1232	1078					0.6	0.7	1.8	1.7				
1358	1332	1218	1029					0.8	2.4	5.6	8.8				
1388	1363	1257	1050	1029	1078	1090		1.6	3.1	7.1	16.8	8.8	1.7	0.0	
1431	1413	1351	1257	1218	1232	1242		1.4	2.5	4.5	7.1	5.6	1.8	0.0	
1463	1450	1413	1363	1332	1326	1332		0.8	1.6	2.5	3.1	2.4	0.7	0.6	
1463	1463	1431	1388	1358	1350	1353		1.0	0.8	1.4	1.6	0.8	0.6	1.8	

TABELA 6.2. (czas 1440s)

<u>MEB</u>								<u>Błąd</u>							
1149	1137	1094	1032					2.7	3.5	3.5	1.7				
1147	1133	1083	1019					4.0	5.0	5.7	3.4				
1150	1132	1056	957					6.2	7.6	11.0	12.0				
1173	1154	1073	919	957	1019	1032		7.4	8.9	13.6	24.2	12.0	3.4	1.7	
1214	1198	1146	1073	1056	1083	1094		7.0	8.2	10.7	13.6	11.0	5.7	3.5	
1247	1233	1198	1154	1132	1133	1137		5.9	6.8	8.2	8.9	7.6	5.0	3.5	
1247	1247	1214	1173	1150	1147	1149		6.0	5.9	7.0	7.4	6.2	4.0	2.7	

Analiza wyników pośrednich w szczególności wartości diagonalnych elementów macierzy H, o których wiadomo, że na gładkich fragmentach brzegu powinny wynosić -0.5 (por. rozdz.6.3) pokazała, że liczone wartości H_{11} różnią się znacznie od oczekiwanych, przede wszystkim w węzłach brzegowych leżących w pobliżu naroża, przy czym taki defekt nie występował zupełnie dla obszarów wypukłych. Problem ten nie był opisany w dostępnej literaturze, gdzie wprawdzie prezentowane były wyniki dla obszarów niewypukłych [5,6,7], ale dotyczyły one zadań stacjonarnych, dla których trudności te prawdopodobnie nie pojawiają się.

W związku z powyższym podjęto (udane zresztą) próby dotodkowego podziału

obszarów wklęsłych na podobszary wypukłe (których złożenie tworzy rozpatrywany obszar). Na styku arbitralnie wyróżnionych podobszarów wypukłych należy formalnie przyjąć warunek brzegowy IV rodzaju dla kontaktu idealnego w postaci

$$x \in \Gamma_{IV} : \begin{cases} -\lambda \frac{\partial T(x^-, t)}{\partial n} = -\lambda \frac{\partial T(x^+, t)}{\partial n} \\ T(x^-, t) = T(x^+, t) \end{cases} \quad (6.53)$$

Sens tego pomysłu ilustruje rys.6.6, na którym naroże podzielono linią poziomą na dwa prostokąty.

W ten sposób w obszarze pojawiają się dodatkowe elementy i węzły brzegowe z warunkiem IV rodzaju, co niestety zwiększa wymiar macierzy głównej układu rozwiązującego, natomiast sama procedura łączenia podobszarów jest stosunkowo prosta i nie różni się od opisanej w rozdziale 3 z tym, że oczywiście wyróżnione podobszary mają te same parametry termofizyczne.

W tabelach 6.3, 6.4 zebrano wyniki dotyczące omówionego uprzednio przykładu przy podziale naroża jak na rys.6.6.

TABELA 6.3. (czas 720s)

MEB					Błąd								
1350	1331	1245	1092		1.5	0.6	0.2	0.2					
1355	1336	1250	1094		1.0	0.0	0.3	0.2					
1388	1369	1291	1128		1.3	0.4	0.4	0.8					
1413	1401	1344	1240	1127	1097	1096	0.2	0.3	0.2	1.1	0.7	0.1	0.5
1438	1429	1395	1342	1289	1258	1254	0.9	1.4	1.2	0.3	0.2	0.3	0.9
1463	1455	1434	1403	1371	1347	1344	0.9	1.3	1.1	0.2	0.5	0.97	1.5
1464	1465	1446	1420	1391	1368	1364	0.9	0.7	0.4	0.7	1.6	2.0	1.6

Można zauważyć, że otrzymane wyniki są zdecydowanie lepsze, chociaż nie uzyskano pełnej symetrii pola temperatury, która w rozważanym przykładzie

powinna się pojawić ze względu na symetrię geometryczną i symetrię warunków brzegowych. Wynika to z faktu, że podobszary na jakie podzielono rozważane naroże są różnej wielkości i całkowanie numeryczne w obu podobszarach realizowane jest w różnych warunkach geometrycznych (różne odległości między punktem źródła ξ a elementami, po których się całkuje). Inny sposób podziału obszaru D na elementy wypukłe o porównywalnych wymiarach (np. na trzy kwadraty lub dwa trapezy) poprawia dokładność obliczeń numerycznych.

TABELA 6.4. (czas 1440s)

<u>MEB</u>				<u>Błąd</u>									
1174	1165	1119	1043	0.5	1.0	1.2	0.6						
1185	1175	1128	1047	0.7	1.3	1.4	0.7						
1215	1205	1159	1069	0.5	1.1	1.1	0.3						
1247	1238	1201	1137	1070	1051	1047	1.0	1.5	1.5	0.4	0.1	0.3	0.2
1277	1269	1242	1203	1163	1138	1130	1.6	2.1	2.1	1.4	0.7	0.5	0.2
1303	1294	1273	1244	1213	1189	1180	1.3	1.8	1.8	1.1	0.4	0.1	0.3
1303	1304	1283	1256	1226	1201	1191	1.4	1.2	1.1	0.3	0.4	0.7	0.9

Po zakończeniu części pracy, która dotyczyła obliczeń numerycznych przedstawionych w tym i następnym rozdziale udało się dotrzeć do referatu wygłoszonego przez K. Onishi i T. Kuroki na IV Konferencji BEM w Southampton [8], w którym autorzy stwierdzają, że "...Since the domain is not convex we must divide it into convex subregions in order to retain the accuracy..." i w ten sposób trudności z bezpośrednim wykorzystaniem MEB do symulacji niestacjonarnego przepływu ciepła w obszarach niewypukłych zostały potwierdzone.

Omówiona wyżej niedogodność nie dyskwalifikuje metody, procedura zszywania podobszarów jest powtarzalna, łatwa do zaprogramowania i możliwy jest do opracowania program komputerowy tworzenia macierzy głównej układu rozwiązującego prawie bez ingerencji użytkownika.

LITERATURA DO ROZDZIAŁU 6

- [1] A. Piskorek, Równania całkowe, WNT, Warszawa 1971
- [2] C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel, Boundary Element Techniques, Springer Verlag, Berlin 1984
- [3] J. Błocki, Metoda elementów brzegowych w zastosowaniu do niestabilnych problemów sprężystości, IMP PAN, Gdańsk CPBP 02.19, 1988
- [4] W.J. Cody, H.C. Thacher, Jr, Rational Chebyshev Approximations for Exponential Integral $E_1(x)$, Mathematics J. Computations, Vol. 22. No 103, (1968), 641-649
- [5] R. Nahlik, Zastosowanie metody brzegowych równań całkowych do rozwiązywania nieliniowych zagadnień przewodzenia ciepła, Praca doktorska, Bielsko-Biała 1989
- [6] C.A. Brebbia, P. Skerget, Non-Linear Time Dependent Potential Problems Using BEM, [w:] 6th BEM (Ed. C.A. Brebbia), Proceedings of the 6th Boundary Element Conference on board of QEZ, Southampton-New York, Springer Verlag, Berlin and New York (1984), 2-9 -2-39
- [7] C. Patterson, N.A.S. El-Sebai, A Family of Partially Discontinuous Boundary Elements for Three Dimensional Analyses [w:] 5th BEM, Proceedings of the 5th Boundary Element Conference, (Ed. C.A. Brebbia, T. Futagami, M. Tanaka), Hiroshima, Japan, Springer-Verlag, Berlin and New York (1983), 193-206
- [8] K. Onishi, T. Kuroki, Boundary Element Method in Singular and Nonlinear Heat Transfer, [w:] 4th BEM, Proceedings of the 4th Boundary Element Conference, (Ed. C.A. Brebbia), Southampton UK, Springer Verlag, Berlin and New York (1982), 140-155

7. PRZYKŁADY NUMERYCZNEJ SYMULACJI KRZEPNIĘCIA I STYGNIECIA ODLEWÓW

W rozdziale niniejszym zebrano część uzyskanych przez autora pracy rozwiązań numerycznych dotyczących identyfikacji przebiegu krzepnięcia metalu w układzie odlew-forma.

Prezentowane przykłady obejmują wszystkie typowe technologie odlewnicze, a mianowicie krzepnięcie odlewów w formach piaskowych, krzepnięcie wlewa we wlewnicy, proces odlewania ciągłego, przy czym rozważano zarówno procesy cieplne w obszarze metalu krzepnącego w interwale temperatury jak również zadania z ostrą granicą rozdziału faz.

Przyjęto następujący sposób prezentacji wyników:

- 1°. Model scalony czyli układ równań i warunków tworzących opis matematyczny zadania.
- 2°. Informacja o sposobie modelowania procesu krzepnięcia.
- 3°. Dane dotyczące dyskretyzacji obszaru, stopnia aproksymacji funkcji na elementach, wyboru schematu MEB.
- 4°. Prezentacja fragmentów wyników obliczeń numerycznych.
- 5°. Ewentualne komentarze związane z otrzymanym rozwiązaniem, przydatnością metody, realizacją na komputerze.

7.1. MODELOWANIE PROCESU KRZEPNIĘCIA MIEDZIANEGO PIONOWEGO WLEWKA CIĄGŁEGO O PRZEKROJU KWADRATOWYM [1, 2, 3]

Proces wymiany ciepła w obszarze wlewa ciągłego opisuje równanie energii z tzw. pochodną materialną zdefiniowaną w następujący sposób

$$\frac{DT(x,t)}{Dt} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \bar{w} \text{ grad}T(x,t) , \quad (7.1)$$

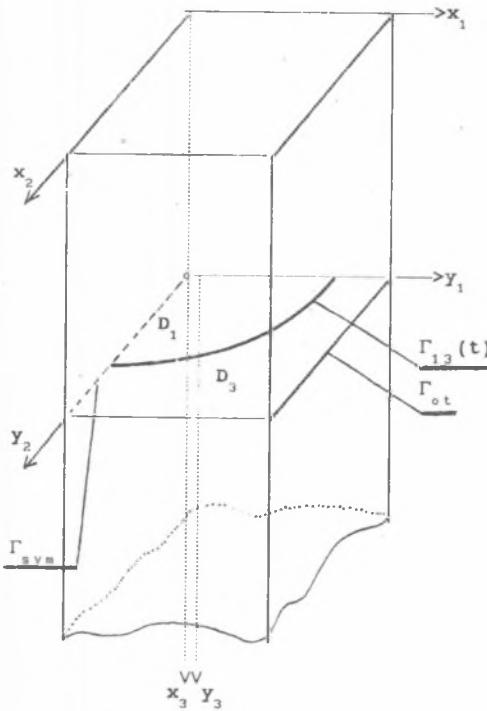
gdzie $\vec{w}=[w_1, w_2, w_3]$ -funkcja wektorowa opisująca pole prędkości, $x=\{x_1, x_2, x_3\}$ -współrzędne prostokątne (przyjęcie takiego układu współrzędnych było zdeterminowane rozpatrywanym kształtem wlewka), $\vec{w} \text{grad}T(x,t)$ -iloczyn skalarny.

Równania energii opisujące niestacjonarne pole temperatury w ciekłej i zakrzepłej części wlewka są postaci

$$x \in D_m(t): \quad c_m \rho_m \left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + w_3 \frac{\partial T(x,t)}{\partial x_3} \right] = \sum_{e=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_e} \left[\lambda_m \frac{\partial T(x,t)}{\partial x_e} \right], \quad m=1,3, \quad (7.2)$$

gdzie $m=1$ - obszar cieczi, $m=3$ - zakrzepła część wlewka, w_3 jest prędkością wyciągania wlewka.

Rozważany obiekt pokazano na rys.7.1.



Rys. 7.1. Rozważany obiekt
Fig. 7.1. Considered object

Liczne badania doświadczalne pokazują, że ciepło przewodzone wzdłuż osi wlewka stanowi ok. 5% ciepła oddawanego w kierunku poprzecznym tzn. od osi wlewka do brzegu [4].

Tak więc bez uszczerbku dla dokładności modelu można opuścić składnik $\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda_m \frac{\partial T}{\partial x_3} \right)$. Wprowadzono następujący układ współrzędnych $y=\{y_1, y_2, y_3\}$: $y_1=x_1, y_2=x_2, y_3=x_3 - w_3 t$. Zakładając dodatkowo, że parametry termofizyczne są tylko funkcjami podobzarów otrzymuje się układ równań

$$\frac{\partial T(y,t)}{\partial t} = a_m \sum_{e=1}^2 \frac{\partial^2 T(y,t)}{\partial y_e^2} \quad m=1,3. \quad (7.3)$$

Układ współrzędnych związany z przemieszczającym się przez

urządzenie do ciągłego odlewania wyróżnionym przekrojem poprzecznym przekształca pochodną materialną w pochodną temperatury po czasie.

Model matematyczny procesu krzepnięcia i stygnięcia wlewka ciągłego można interpretować jako układ równań i warunków dla zadania 2D (przekrój poprzeczny), na którego obwodzie warunki brzegowe są funkcją czasu. Jeśli np. oddziaływanie krystalizatora i wymianę ciepła w strefie chłodzenia wtórnego przybliżyć warunkiem brzegowym II rodzaju (odpowiednie dane można znaleźć m. in. w [5,6]), to w chwili t^f obowiązuje warunek brzegowy $-\lambda_3 \frac{\partial T_3(y, t)}{\partial n} = q(t^f)$, natomiast warunek początkowy $T(y, 0) = T_p$, gdzie T_p jest temperaturą zalewania (przekrój poprzeczny wlewka w chwili $t=0$ pokrywa się ze zwierciadłem ciekłego metalu w krystalizatorze). Ponieważ do rozwiązania numerycznego wybrano metodę brzegowych równań całkowych skojarzoną z metodą przemiennej fazy, więc tzw. model scalony należało zbudować w konwencji entalpowej. Tworzy go następujący układ równań i warunków

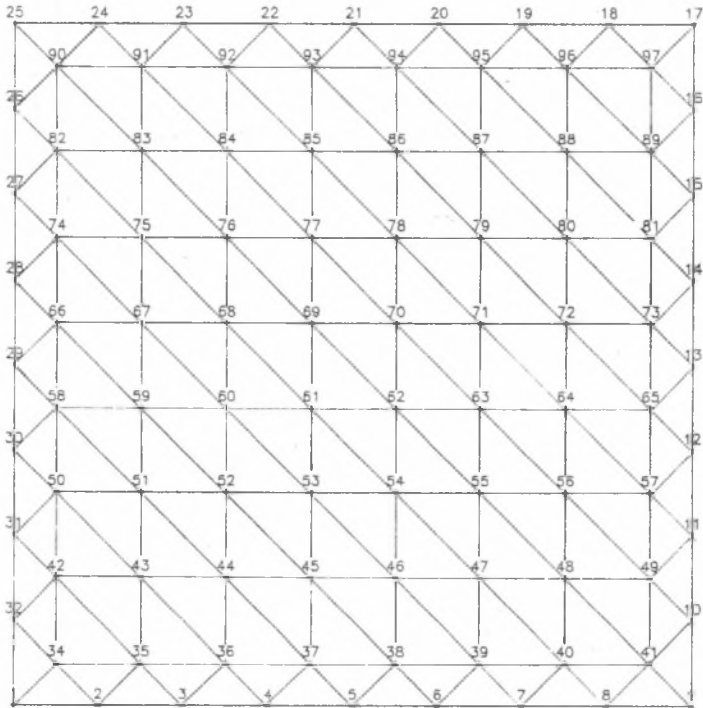
$$\begin{aligned}
 y \in D_m : \quad & \frac{\partial H}{\partial t} = a_m \sum_{e=1}^2 \frac{\partial H^2}{\partial y_e^2}, \quad m=1, 3, \\
 y \in \Gamma_{aym} : \quad & \frac{\partial H}{\partial n} = 0, \\
 y \in \Gamma_{ot} : \quad & -\lambda_3 \frac{\partial H}{\partial n} = q(t), \\
 y \in \Gamma_{12}(t) : \quad & \left\{ \begin{array}{l} -a_1 \frac{\partial H_1}{\partial n} = -a_3 \frac{\partial H_3}{\partial n} + Q v_n, \\ A_1 = A_3 + Q \quad (\text{por. rys.4.6}) \end{array} \right. , \\
 t=0 : \quad & H(y, 0) = H_p,
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

przy czym v_n jest prędkością przyrostu fazy zakrzepłej w punkcie $y \in \Gamma_{12}(t)$ w kierunku normalnym do brzegu $\Gamma_{12}(t)$.

Należy podkreślić, że warunek Stefana dotyczy zadania płaskiego ze względu na założenie o pominięciu składowej kondukcyjnej w kierunku ruchu wlewka, na-

tomiaś dwa kolejne położenia brzegu $\Gamma_{13}(t)$ i $\Gamma_{13}(t+\Delta t)$ de facto dotyczą dwóch przekrojów poprzecznych odległych od siebie o $\Delta y_3 = w_3 \Delta t$ od siebie. Można zauważyć, że rozwiązując zadanie dwuwymiarowe, w efekcie otrzymuje się przestrzenne pole temperatury.

Ze względu na symetrię warunków brzegowych na obwodzie wlewka, rozważano jego symetryczny fragment ograniczony dwoma osiami symetrii cieplnej (ćwiartka). Sposób podziału obszaru D i brzegu Γ pokazano na rys.7.2.



Rys.7.2. Siatka

Fig.7.2. The mesh

Przedstawiony na tym rysunku podział dotyczy elementów liniowych, przy czym rozwiązano również przykład, w którym wykorzystano elementy stałe [1]. Dys-

kretyzacja brzegu elementami liniowymi wymaga w zasadzie podwójnej numeracji węzłów narożnych, w których zmienia się warunek brzegowy (np. przejście od warunku I rodzaju do warunku II rodzaju lub przejście od warunku $q=0$ do warunku $q=0$ itp.). Węzły podwójne mają te same współrzędne geometryczne, ale przyporządkowuje się im inne warunki brzegowe. W prezentowanym przykładzie uniknięto podwójnej numeracji przyjmując, że w narożach 9 i 25 oddawana jest połowa strumienia ciepła $q(t)$. Okazało się, że takie założenie nie pogarsza dokładności rozwiązania numerycznego.

Sposób dyskretyzacji obszaru i brzegu pozwalał na bezpośrednie porównanie wyników z wynikami otrzymanymi dla stałych elementów brzegowych i wewnętrznych oraz z obliczeniami metodą różnic skończonych. W rozwiązaniu wykorzystano I schemat MEB z przyczyn wyjaśnionych w rozdziale 5.

Do obliczeń przyjęto następujące dane:

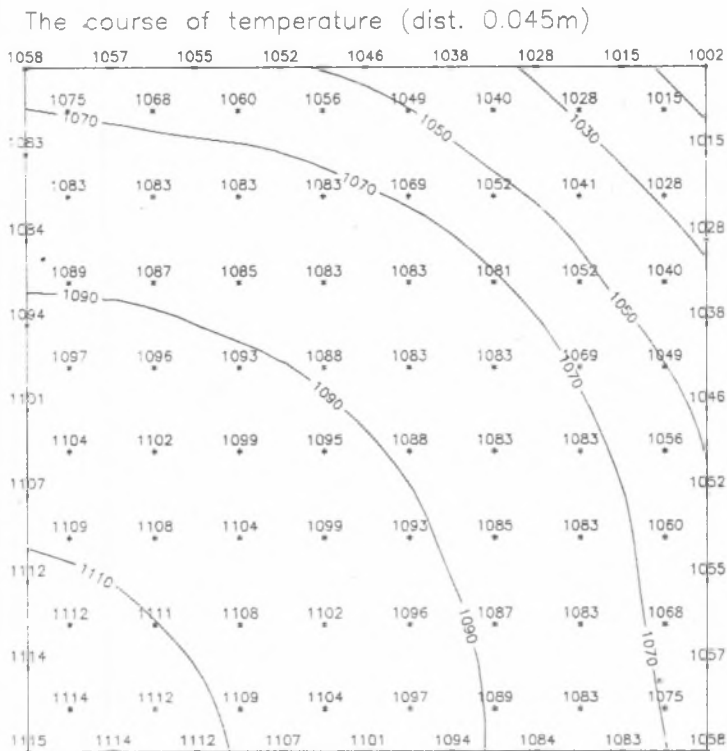
- wymiary przekroju poprzecznego wlewka 0.17×0.17 m,
- parametry termofizyczne cieczy $\lambda_1=250$, $\rho_1=8300$, $c_1=544$, parametry termofizyczne ciała stałego $\lambda_3=330$, $\rho_3=8920$, $c_3=420$,
- utajone ciepło krzepnięcia odniesione do jednostki objętości $Q=204000 \cdot 8920$, temperatura krzepnięcia $T_{kr}=1083^\circ\text{C}$,
- temperatura zalewania $T_p=1145$,
- prędkość odlewania $w_3=0.00175$ m/s,
- krok czasu $\Delta t=2$ s.

Na rys.7.3, 7.4 pokazano pole temperatury w ćwiartce przekroju poprzecznego w odległości 0.045 i 0.07m od górnej powierzchni wlewka.

Program obliczeń numerycznych składał się z części głównej, która w każdym kroku czasu wykorzystywana była dwukrotnie (formalne sprowadzenie do cieczy i ciała stałego) oraz pewnych dodatkowych procedur, z których najważniejsza była procedura tworzenia warunków pseudopoczątkowych dla pierwszego (ciecz) i drugiego (ciało stałe) etapów obliczeń w kroku Δt .

Nie mniej ważnym elementem programu wykorzystującego APTM jest procedura odpowiedniego włączania warunków brzegowych. Istota metody przemiennej fazy, która sprowadza się do dwukrotnego przeliczenia pola temperatury wymaga właściwego potraktowania problemu warunków brzegowych. Jeżeli np. (jak w oma-

wianym przykładzie) zadany jest strumień ciepła odprowadzanego od powierzchni wlewka do otoczenia, to wprowadzenie tego warunku do pierwszego i drugiego etapu obliczeń spowoduje, że w kroku czasu Δt od powierzchni wlewka zostanie oddana do otoczenia dwukrotnie większa ilość ciepła niż ma to miejsce w rzeczywistości. Tak więc na jednym z etapów obliczeń należy wlewk formalnie zaizolować (na całym obwodzie przekroju poprzecznego $q(t)=0$). Nie oznacza to oczywiście, że będzie to etap "martwy", przepływ ciepła nastąpi bowiem we wnętrzu obszaru i spowoduje określoną zmianę entalpii (temperatury). Opis

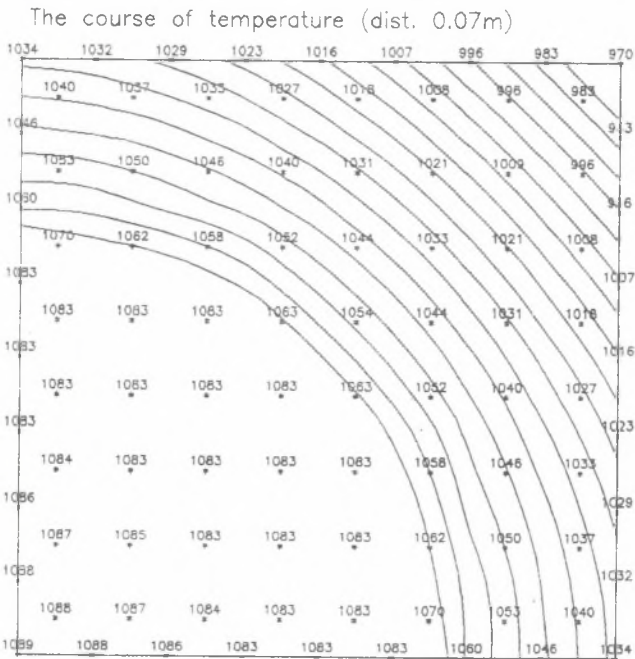


Rys.7.3. Pole temperatury w przekroju poprzecznym wlewka - odległ. 0.045m

Fig.7.3. Temperature field in the cross section of ingot - dist. 0.045m

APTM w wersji źródłowej [7, 8] nie rozstrzyga, na którym etapie należy zaizolować powierzchnię obszaru (autorzy zajmowali się zadaniami brzegowo-początkowymi Dirichleta, gdzie problemy takie nie występują). Wydaje się, że z punktu widzenia interpretacji fizycznej metody, należy przyjąć następujący tryb "przełączania" warunków na brzegu

- jeżeli warunek pseudopoczątkowy jest zarazem warunkiem początkowym zadania i temperatura przekroju poprzecznego wlewka odpowiada temperaturze zalewania, to proces wymiany ciepła z otoczeniem (krytalizatorem) kojarzy się z pierwszym etapem obliczeń (sprowadzenie obszaru do fazy ciekłej),
- dla kolejnych kroków czasu, gdy przy powierzchni wygenerowała się warstwa zakrzepła, warunek $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q(x, t)$ dołącza się do drugiego etapu obliczeń (sprowadzenie obszaru do fazy stałej).



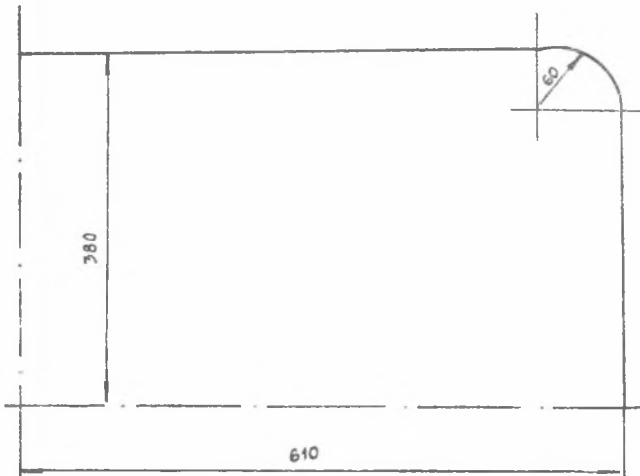
Rys.7.4. Pole temperatury w przekroju poprzecznym wlewka - odległ. 0.07m

Fig.7.4. Temperature field in the cross section of ingot - dist. 0.07m

7.2. SYMULACJA KRZEPNIĘCIA STALIWNEGO WLEWKA [9]

Przedstawione niżej rozwiązanie było kolejnym etapem badań nad wykorzystaniem metody elementów brzegowych do symulacji procesów cieplnych w układzie wlewek-wlewnica. Pierwsze z otrzymanych rozwiązań omówiono w rozdziale 3.6.

Tutaj zostaną pokazane wyniki obliczeń numerycznych procesu krzepnięcia i stygnięcia w centralnym przekroju poprzecznym prostokątnego wlewka wytwarzanego w Hucie Sendzimir w Krakowie. Na rys. 7.5 pokazano rozważany przekrój wraz z odpowiednimi wymiarami.



Rys.7.5. Przekrój poprzeczny wlewka

Fig.7.5. Cross section of ingot

Model scalony dotyczył opisu przepływu ciepła w obszarze metalu krzepnącego w interwale temperatury, oddziaływanie wlewnicy przybliżono warunkiem brzegowym II rodzaju.

Niestacjonarne pole temperatury w objętości wlewka opisuje układ równań parabolicznych

$$x \in D_m(t): \quad C_m \rho_m \frac{\partial T_m}{\partial t} = \lambda_m \sum_{e=1}^2 \frac{\partial^2 T_m}{\partial x_e^2}, \quad (7.5)$$

z warunkami ciągłości strumienia ciepła i temperatury na granicy ciecz-strefa dwufazowa $\Gamma_{12}(t)$ i strefa dwufazowa-ciało stałe $\Gamma_{23}(t)$:

$$x \in \Gamma_{12}(t): \begin{cases} -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \\ T_1 = T_2 = T_L \end{cases}, \quad x \in \Gamma_{23}(t): \begin{cases} -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = -\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial n} \\ T_2 = T_3 = T_S \end{cases}. \quad (7.6)$$

Należy tu przypomnieć, że w pojemności cieplnej C_2 strefy dwufazowej trzeba uwzględnić wydzielanie się utajonego ciepła krzepnięcia-w prezentowanym rozwiązaniu przyjęto $C_2 = c_2 + Q/(T_L - T_S)\rho_2$.

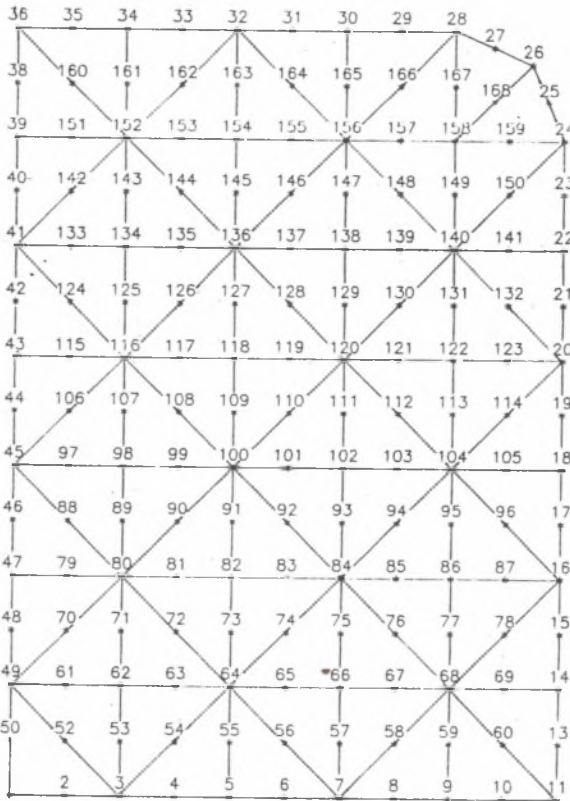
Na zewnętrznej powierzchni wlewka (czyli na obwodzie przekroju poprzecznego) założono warunek brzegowy II rodzaju, przy czym jednostkowy strumień ciepła był zarówno funkcją współrzędnych geometrycznych jak i czasu: $q=q(x,t)$. Wzory określające chwilowe i lokalne strumienie ciepła otrzymano przez aproksymację wyników badań doświadczalnych wykonanych przez J.Kawalera w Instytucie Odlewnictwa w Krakowie [10] i dotyczących tego samego wlewka.

Warunek początkowy przyporządkowuje rozważanemu obszarowi temperaturę zalewania

$$t=0: \quad T(x,t) = T_p. \quad (7.7)$$

Zadanie rozwiązano sprowadzając formalnie obszar wlewka do fazy ciekłej tzn. rozwiązano równanie paraboliczne z parametrami c_1 , ρ_1 , λ_1 a następnie dokonywano korekty kolejnych warunków pseudopoczątkowych wykorzystując algorytm i wzory omówione w rozdziale 5. Wyniki otrzymano na bazie I schematu MEB dla parabolicznych elementów brzegowych i wewnętrznych, którymi pokryto 1/4 przekroju poprzecznego wlewka. Elementy brzegowe były odcinkami, na których wyróżniono 3 węzły brzegowe (środek i końce odcinka). Temperatura i strumień ciepła na elementach brzegowych zmieniały się parabolicznie. Elementy wewnętrzne

rzne były trójkątami (w większości prostokątnymi i równoramiennymi). Na obwodzie każdego trójkąta przyjęto 6 węzłów (3 wierzchołki i 3 środki boków), temperaturę na trójkącie aproksymowano wielomianem kwadratowym dwóch zmiennych-por.rys.7.6. Można zauważyć, że w narożach, w których następowała zmiana warunków brzegowych założono tzw. węzły podwójne-na rysunku węzły 11 i 12 oraz 36 i 37.



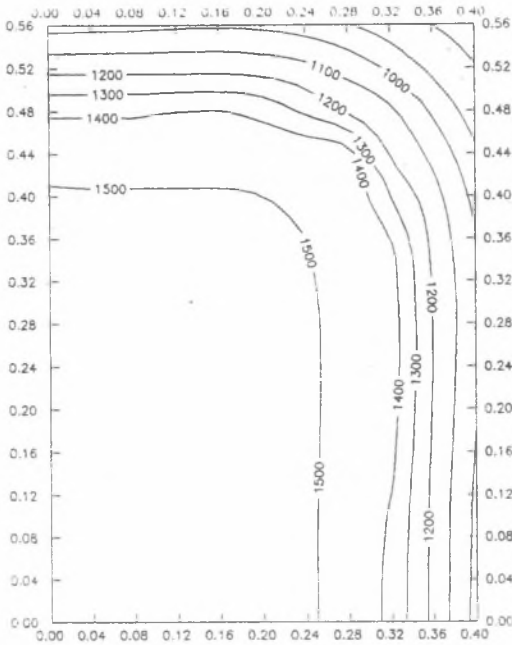
Rys.7.6. Elementy brzegowe i wewnętrzne

Fig.7.6. Boundary elements and internal cells

Do obliczeń przyjęto następujące parametry termofizyczne cieczy, strefy przejściowej i ciała stałego $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 35$, $c_1 = 820$, $\rho_1 = 7200$, $c_3 = 650$, $\rho_3 = 7500$, $\rho_2 = 7350$, $c_2 = 735$, $C_2 = 7714$, temperatury graniczne $T_L = 1505$, $T_S = 1470$, natomiast temperatura zalewania $T_p = 1550$.

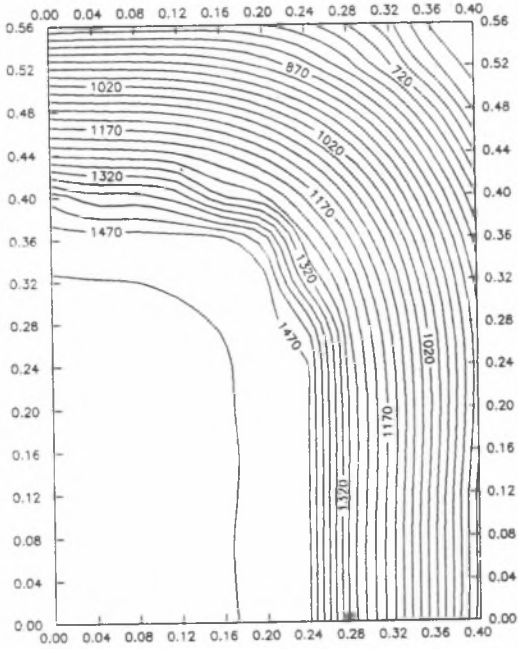
Sposób aproksymacji strumienia ciepła na obwodzie wlewka przedstawiono w pracy [12].

Na rys. 7.7, 7.8 pokazano chwilowe pole temperatury dla czasów $t = 1800$ s i $t = 3600$. Niewielkie zaburzenia w przebiegu izoterm widoczne szczególnie na rys. 7.8 są wynikiem nie tyle błędu metody, co niedoskonałości procedury graficznej kreślenia izolinii. Dla małych gradientów temperatury i siatek trójkątnych stosowana procedura graficzna nie jest zbyt dokładna.



Rys.7.7. Pole temperatury po czasie $t = 1800$ s

Fig.7.7. The temperature field after the time $t = 1800$ s

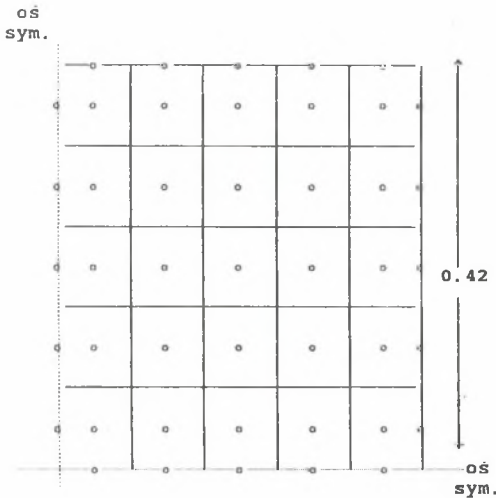


Rys.7.8. Pole temperatury po czasie $t=3600s$

Fig.7.8. The temperature field after the time $t=3600s$

Otrzymane na podstawie przedstawionego algorytmu wyniki można ocenić tylko jakościowo, ponieważ dane doświadczalne zebrane w [12] dotyczą pola temperatury na zewnętrznej powierzchni wlewnicy i pośrednio strumieni ciepła oddawanych z obszaru wlewnicy do obszaru wlewnicy. Widać jednak, że model odzwierciedla charakterystyczne cechy procesu krzepnięcia wlewnicy (krzepnięcie od naroży, równoległość izoterm w pobliżu osi symetrii, łukowy kształt izosolidusów w pobliżu przekątnej).

Na pewnym etapie prac rozwiązano również analogiczne zadanie, przy czym kwadratowy (bez zaokrągleń) przekrój wlewka pokryto siatką kwadratową i rozważano stałe elementy brzegowe i wewnętrzne - rys.7.9.



Rys.7.9. Siatka

Fig.7.9. Mesh

Rozwiązanie numeryczne otrzymano na bazie metody przemiennej fazy.

Ponieważ przedmiotem rozważań było staliwo węglowe, więc problem krzepnięcia w interwale temperatury sprowadzono do zadania z ostrym frontem i tzw. ekwiwalentną temperaturą krzepnięcia (por.rozdz.5). Szczegóły dotyczące tego rozwiązania omówiono w [11], natomiast w tablicach 7.1 i 7.2 przedstawiono pole temperatury w węzłach brzegowych i wewnętrznych wynikających z podziału siatkowego.

T A B L I C A 7.1.

Czas=3600s

1399	1267	1226	1067	949		
1492	1435	1364	1303	1144	1022	949
1525	1511	1479	1428	1326	1144	1067
1530	1525	1525	1509	1428	1303	1226
1560	1560	1547	1525	1479	1364	1267
1560	1560	1560	1525	1511	1435	1399
1560	1560	1530	1525	1492		

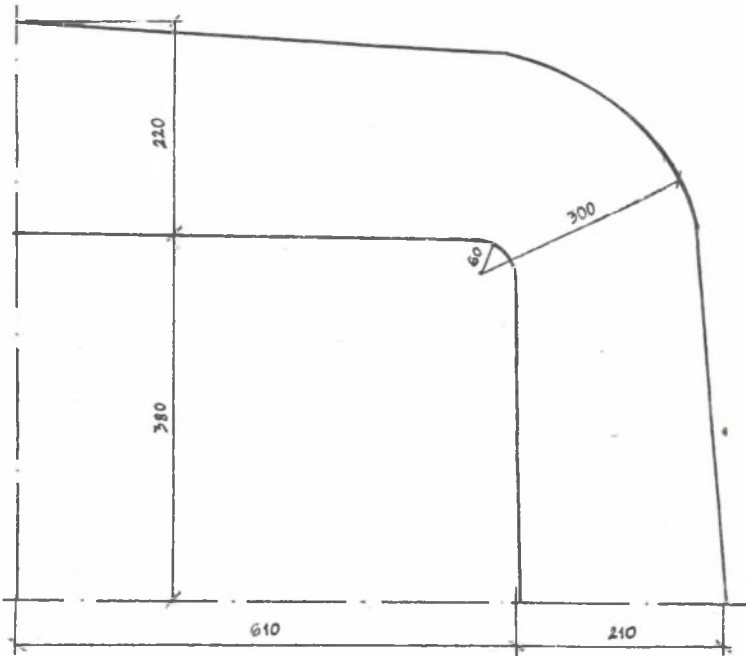
T A B L I C A 7.2

Czas=7200s

1197	1105	1033	945	846		
1262	1224	1158	1088	1000	900	846
1311	1297	1255	1190	1104	1000	945
1388	1374	1337	1275	1190	1088	1033
1521	1505	1420	1337	1255	1158	1105
1560	1536	1505	1374	1297	1224	1197
1560	1521	1388	1311	1262		

7.3. KRZEPNIĘCIE WLEWKA WE WLEWNICY

Rozważano przekrój poprzeczny stalowego wlewka krzepnącego we wlewnicy-
rys.7.10.



Rys.7.10. Przekrój poprzeczny

Fig.7.10. Lateral section

Można zauważyć, że wymiary przekroju wlewka odpowiadają wymiarom z pierwszego przykładu omówionego w podrozdziale 7.2.

Przedstawione rozwiązanie było w pewnym sensie uwieńczeniem badań omówionych poprzednio i połączeniem szeregu procedur dotyczących procesów cieplnych w krzepnącym wlewk, wymiany ciepła między wlewkiem i wlewnicą przy kontakcie idealnym, przepływu ciepła przez szczelinę gazową, wymiany ciepła między wlewnicą a otoczeniem, podziału obszaru niewypukłego na podobszary wypukłe.

Przyjęto następujący opis matematyczny wymiany ciepła w układzie

$$x \in D \text{ (odlew): } C_m \rho_m \frac{\partial T_m}{\partial t} = \lambda_m \sum_{e=1}^2 \frac{\partial^2 T_m}{\partial x_e^2}, \quad m=1,2,3,$$

$$x \in D_4 \text{ (forma): } C_4 \rho_4 \frac{\partial T_4}{\partial t} = \lambda_4 \sum_{e=1}^2 \frac{\partial^2 T_4}{\partial x_e^2},$$

$$x \in \Gamma_{12}(t): \begin{cases} -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \\ T_1 = T_2 = T_L \end{cases}, \quad x \in \Gamma_{23}(t): \begin{cases} -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = -\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial n} \\ T_2 = T_3 = T_S \end{cases},$$

$$x \in \Gamma_{34}(t): \begin{cases} -\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial n} = -\lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial n} \\ T_3 = T_4 - q R \end{cases}, \quad (7.8)$$

przy czym dla $t < t_{od}$ $R=0$ (t_{od} - czas odejścia^{*)})

$$x \in \Gamma_{ot}: -\lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial n} = \alpha(T_4 - T_{ot}), \quad x \in \Gamma_{ym}: -\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial n} = 0,$$

$$t=0: \quad x \in D: \quad T(x,t)=T_p, \quad t=0: \quad x \in D_4: \quad T(x,t)=T_{pf}.$$

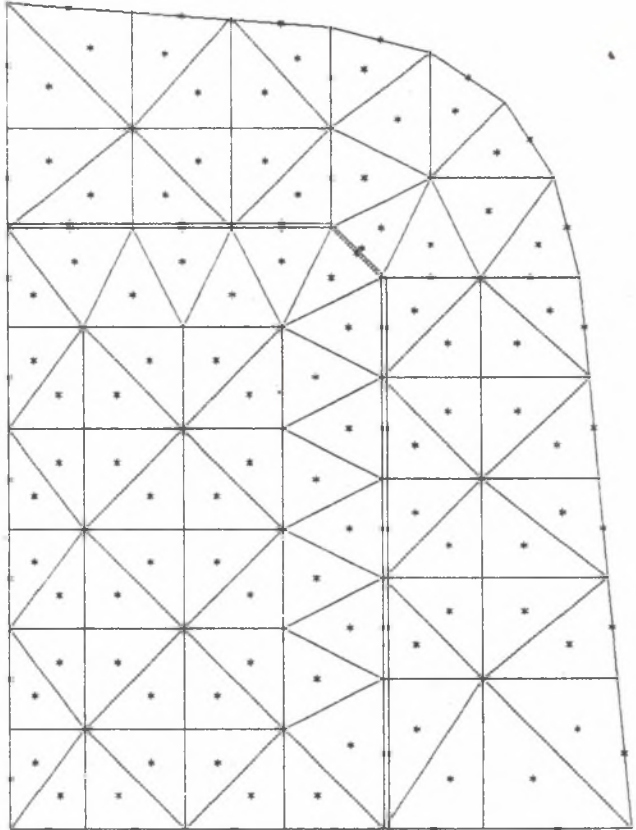
Obliczenia ciepłne w obszarze wlewka prowadzono identycznie jak w przykładzie poprzednim (korekta warunków pseudopoczątkowych), natomiast obszar wlewnicy umownie podzielono na trzy podobszary wypukłe, w których za pomocą I schematu MEB rozwiązano trzy równania paraboliczne z parametrami termofizycznymi wlewnicy i formalnie przyjętymi warunkami IV rodzaju na liniach rozdzielających podobszary.

Na rys. 7.11 pokazano siatkę w ćwiartce centralnego przekroju poprzecznego wlewka i wlewnicy. Elementy brzegowe i wewnętrzne były elementami stałymi.

Punkty zlokalizowane we wnętrzach trójkątów były ich środkami ciężkości i

^{*)} Czas odejścia dobrano eksperymentalnie w ten sposób, aby temperatura na zewnętrznej powierzchni wlewnicy w miarę dokładnie odpowiadała temperaturze zmierzonej metodami termowizyjnymi na obiekcie rzeczywistym [2, 12].

Triangulacja obszaru wlewka i wlewnicy



Rys.7.11. Siatka

Fig.7.11. The mesh

wykorzystywano je w procedurze całkowania numerycznego. Węzły brzegowe na zewnętrznej powierzchni wlewka oraz wzdłuż linii dzielących wlewnicę na obszary wypukłe muszą mieć numerację podwójną, co wynika ze sposobu modelowania warunków brzegowych IV rodzaju zarówno przy kontakcie idealnym jak i przy warunku z oporem cieplnym. Na zewnętrznej powierzchni wlewnicy przyjęto warunek brzegowy III rodzaju. Warunek ten, jak również warunek opisujący przepływ ciepła w szczelinie są nieliniowe. Współczynniki wymiany ciepła w szczelinie (por. rozdz. 3.6) i między wlewnicą a otoczeniem są funkcjami lokalnych i chwilowych temperatur powierzchni, które nie są znane. Wykorzystany w symulacji algorytm obliczeń polegający na wprowadzeniu do warunków brzegowych współczynników wymiany ciepła z poprzedniego kroku czasu (warunki brzegowe są "opóźnione" w stosunku do czasu liczonego o Δt) prowadzi do linearyzacji zadania.

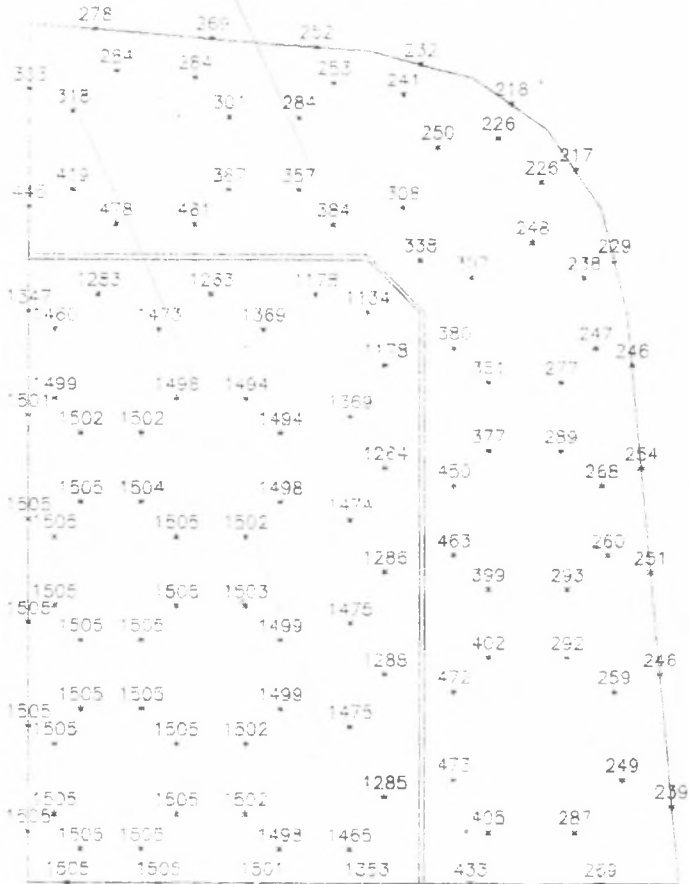
Program podstawowy tzn. numeryczna realizacja zadania brzegowo-początkowego opisanego równaniami parabolicznymi współpracował z następującymi procedurami

- poprawianie pola temperatury w węzłach obszaru wlewka,
- tworzenie układu rozwiązującego dla trzech podobszarów wlewnicy z umownie przyjętymi warunkami IV rodzaju i dla obszaru wlewka,
- obliczenia oporu cieplnego szczeliny gazowej z uwzględnieniem wariantów kontakt idealny i kontakt z oporem,
- obliczenia współczynnika wymiany ciepła między wlewnicą a otoczeniem.

Wyniki symulacji numerycznej przedstawiono na rys. 7.12, 7.13, 7.14 i 7.15.

Opisany wyżej problem rozwiązano również wykorzystując uogólnioną metodę przemiennej fazy (por. np. poz. lit. [17,18] w rozdziale 4) tzn. rozszerzenie algorytmu podanego przez J. Rogersa, A. Bergera i M. Cimenta na przypadek krzepnięcia metalu w przedziale temperatury. Rozwiązanie numeryczne tak sformułowanego zadania przedstawiono w pracy [12].

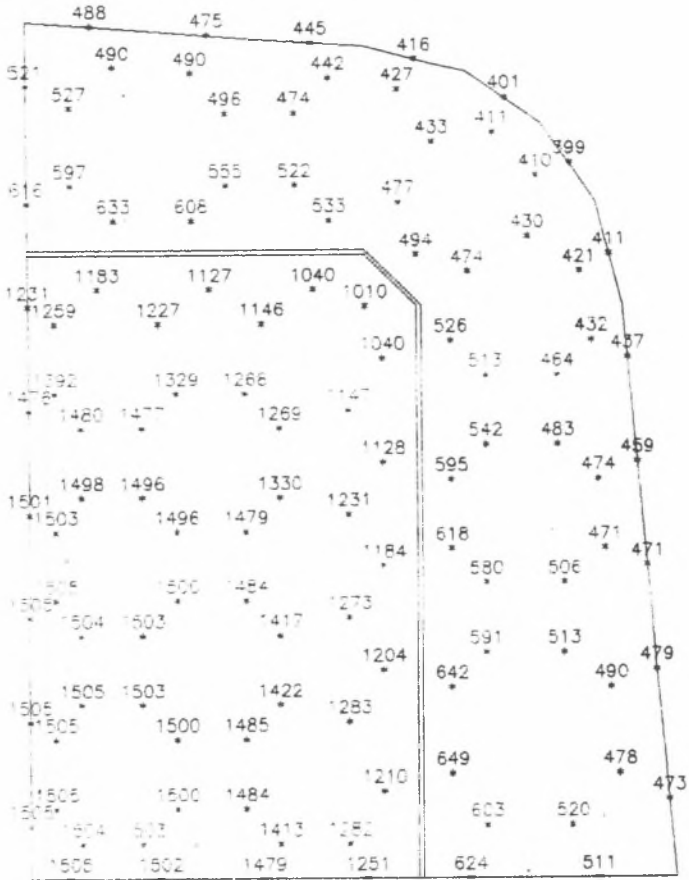
Pole temperatury po czasie 30 minut



Rys.7.13. Pole temperatury w przekroju wlewa i wlewnicy (30 min.)

Fig.7.13. Temperature field in the section of ingot and ingot mould (30 min)

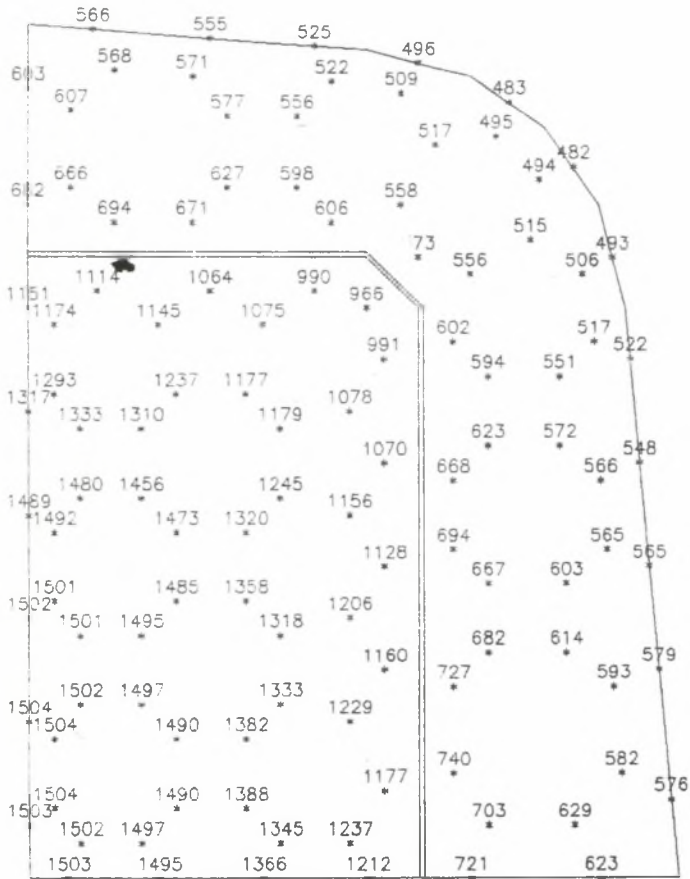
Pole temperatury po czasie 60 minut



Rys.7.14. Pole temperatury w przekroju wlewnicy i wlewnicy (60 min.)

Fig.7.14. Temperature field in the section of ingot and ingot mould (60 min)

Pole temperatury po czasie 90 minut



Rys.7.15. Pole temperatury w przekroju wlewnicy i wlewnicy (90 min.)

Fig.7.15. Temperature field in the section of ingot and ingot mould (90 min)

7.4. KRZEPNIĘCIE ODLEWU W MASIE FORMIERSKIEJ

Kolejnym zadaniem dotyczącym symulacji numerycznej procesów krzepnięcia i stygnięcia są obliczenia przepływu ciepła w układzie odlew-forma.

Najbardziej typowymi cechami tych zadań są

- złożoność geometryczna obiektu (w odróżnieniu od wlewków i wlewków ciągłych),
- istotne różne parametry termofizyczne podobszarów odlewu i podobszarów formy.

Przedmiotem rozważań były stalowe węzły cieplne typu L i T, krzepnące w typowej (w sensie parametrów termofizycznych) masie formierskiej. Węzłem cieplnym nazywa się tę część odlewu, która krzepnie najdłużej. W obszarze złożonego geometrycznie odlewu można z reguły wyróżnić tzw. układy podstawowe, które krzepną niezależnie od siebie i na które składa się zasilany najczęściej osobnym nadlewem węzeł cieplny oraz ścianki do niego przylegające. Analiza krzepnięcia układów podstawowych jest w zasadzie bazą do projektowania poprawnych technologii wytwarzania odlewów. Można również odlew traktować całościowo i optymalizować technologie jego wytwarzania za pomocą obliczeń symulacyjnych [14,15,16,17].

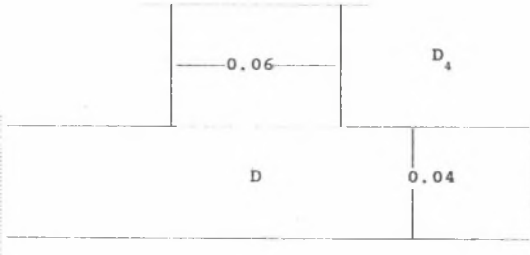
Przykłady, które rozwiązywano, spełniają postulat odpowiedniego stopnia komplikacji geometrycznej i wnioski jakie wynikają ze sposobu modelowania przebiegu procesów cieplnych można przenosić na bardziej złożone obiekty.

7.4.1. KRZEPNIĘCIE PROSTOKĄTNEGO WĘZŁA TYPU T [18]

Rozważano węzeł cieplny jak na rys.7.16.

Proces przepływu ciepła w układzie węzeł-masa formierska opisano układem równań parabolicznych (7.7a,b) z warunkami (7.7c) na ruchomych brzegach $\Gamma_{12}(t)$ $\Gamma_{23}(t)$, warunkiem brzegowym IV rodzaju z kontaktem idealnym na styku odlewu i formy oraz warunkiem w postaci $-\lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} = 0$ na prostokacie ograniczającym rozpatrywany fragment węzła i masy do niego przylegającej. Warunek początkowy przyjęto w postaci $x \in D: T(x,0)=T_p$, $x \in D_n: T(x,0)=T_{p_f}$, gdzie T_{p_f} jest tempe-

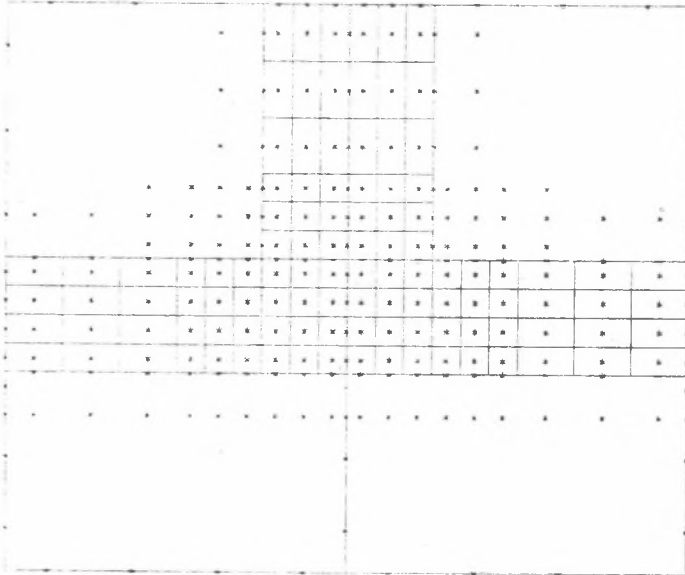
raturą początkową masy formierskiej.



Rys 7.16. Węzeł typu T

Fig 7.16. Hot spot of T type

Obszar węzła pokryto siatką prostokątną, elementy brzegowe były odcinkami, natomiast elementy wewnętrzne prostokątami lub kwadratami (były to elementy stałe) - rys.7.17.

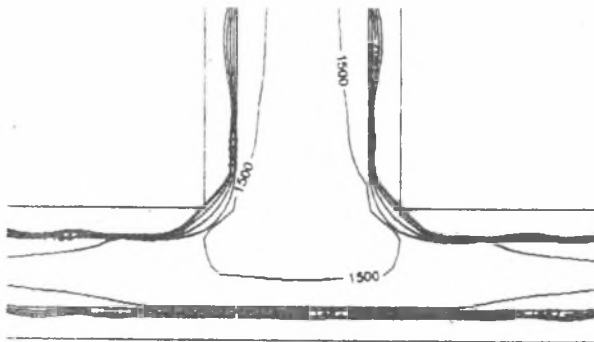


Rys.7.17. Siatka

Fig.7.17. The mesh

W obszarze masy formierskiej (a ściślej w trzech jej podobszarach) wyróżniono zbiór punktów, w których wyznaczano chwilowe pola temperatury. Zgodnie z algorytmem przedstawionym w rozdziale 3 zastosowano mieszany wariant MEB a mianowicie I schemat wykorzystano do obliczeń w obszarze węzła, a drugi dla podobszarów masy formierskiej. Założono przy tym zerowy warunek początkowy w D_4 (masa) wprowadzając do obliczeń temperaturę zdefiniowaną następująco: $T' = T - T_{pf}$. Przeliczanie temperatury na wartości rzeczywiste było potrzebne tylko przy drukowaniu wyników. Dzięki temu uniknięto potrzeby całkowania po wnętrzu podobszarów D_4 , tak więc dyskretyzacja ograniczyła się tylko do stałych elementów brzegowych, natomiast temperaturę we wnętrzu tego obszaru na t^f poziomie czasu można wyznaczyć w zupełnie dowolnym zbiorze wyróżnionych punktów. Ponieważ obszar węzła jest obszarem niewypukłym, więc został on sztucznie podzielony na podobszary wypukłe rozdzielone linią jak na rys.7.16. Do symulacji krzepnięcia węzła wykorzystano wynikającą z lokalnych bilansów energii procedurę poprawiania chwilowych pól temperatury dla przypadku krzepnięcia w przedziale $\langle T_L, T_S \rangle$.
Na rys. 7.18, 7.19, 7.20 przedstawiono chwilowe pole temperatury dla czasów $t=60, 120, 180s$.

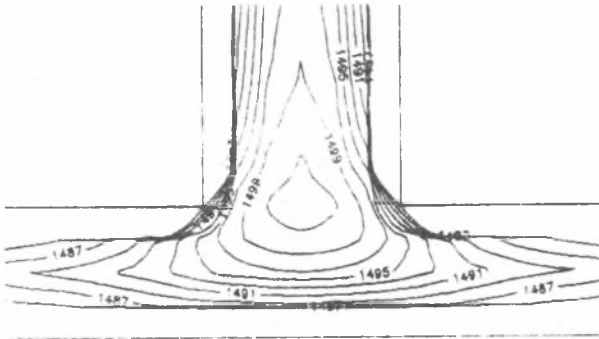
Rozkład temperatury ($t=60s$)



Rys.7.18. Pole temperatury w przekroju węzła cieplnego typu T (60s)

Fig.7.18. Temperature field in the section of hot spot of T type (60s)

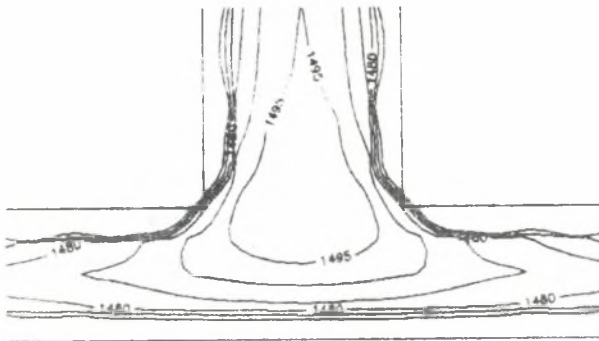
Rozkład temperatury ($t=120s$)



Rys.7.19. Pole temperatury w przekroju węzła cieplnego typu T (120s)

Fig.7.19. Temperature field in the section of hot spot of T type (120s)

Rozkład temperatury ($t=180s$)



Rys.7.20. Pole temperatury w przekroju węzła cieplnego typu T (180s)

Fig.7.20. Temperature field in the section of hot spot of T type (180s)

7.4.2. KRZEPNIĘCIE UKOŚNOKĄTNEGO WĘZŁA TYPU L

Przedmiotem obliczeń zebranych w niniejszym podrzdziale był ukośnokątny stalowy węzeł typu L krzepnący w typowej masie formierskiej. Kąt między ściankami węzła wynosił 60° , grubości ścianek 0.04m, naroże wewnętrzne było zaokrąglone, przy czym promień zaokrąglenia wynosił 0.015.

Opis matematyczny (model scalony) procesu krzepnięcia i stygnięcia był identyczny jak w przykładzie poprzednim. Podstawową różnicą między zadaniem omówionym poprzednio a zadaniem tutaj prezentowanym był inny podział wnętrza obszaru na elementy (triangulacja) oraz fakt, że fragmenty brzegu ograniczającego obszar węzła nie były prostopadłe do osi układu współrzędnych (lokalne cosinusy kierunkowe były zróżnicowane).

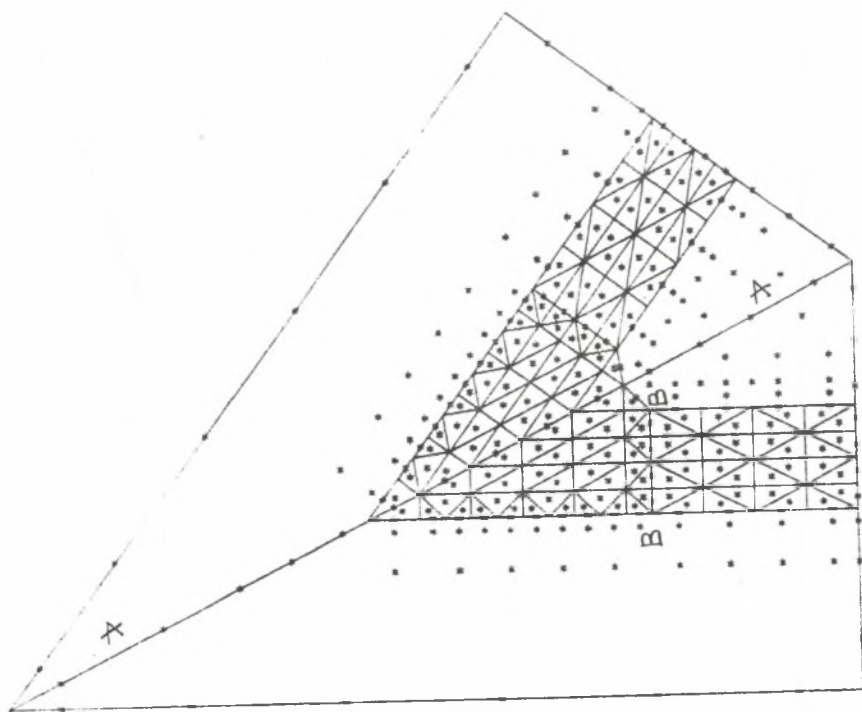
Jest to przykład zadania, w którym widać liczne przewagi metody elementów brzegowych nad najbardziej rozpowszechnioną w termodynamice procesów odlewniczych metodą różnic skończonych. Siatka prostokątna w MRS byłaby tu bezużyteczna lub przynajmniej prowadziła do dużych błędów rozwiązania numerycznego, natomiast zorientowanie węzła we współrzędnych afinicznych [19, 20] prowadzi do bardzo skomplikowanej postaci równania energii i konieczności stosowania gęstych siatek czasu.

Przyjęty podział siatkowy obszaru węzła cieplnego pokazano na rys.7.21. Jeżeli uwzględnić symetrię cieplną wzdłuż linii A-A, to obszar węzła wystarczy podzielić na dwa podobzary wypukłe linią B-B - rozpatrując węzeł jako całość należałoby dodatkowo dokonać podziału linią A-A lub w jeszcze inny sposób. Zarówno elementy brzegowe jak i elementy wewnętrzne były elementami stałymi, do obliczeń procesów cieplnych w obszarze węzła wykorzystano I schemat MEB z poprawianiem pola temperatury, natomiast dla obszaru formy wykorzystano II schemat MEB. Podobnie jak w poprzednim przykładzie wyzerowano warunek początkowy w obszarze formy tzn. wyznaczano pole temperatury

$$T'(x,t) = T(x,t) - T_{pf}.$$

Tak więc punkty wewnętrzne w obszarze formy zaznaczone na rys.7.21 nie odgrywają roli węzłów siatki MEB, a tylko arbitralnie wybranych miejsc, w których obliczano chwilową temperaturę na podstawie brzegowych temperatur i st-

rumieni ciepła.



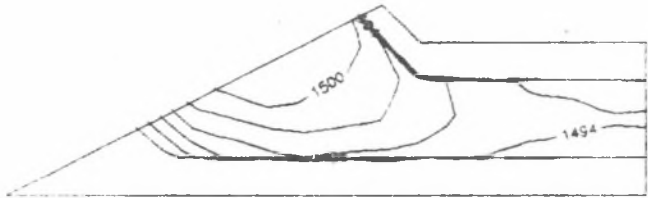
kys. 7.21. Siatka

Fig. 7.21. The mesh

Z przyczyn technicznych długości ścianek przylegających do węzła są zbyt krótkie. Z reguły przy analizie krzepnięcia tego typu obiektów przyjmuje się, że w odległości ok $4g$ (g -grubość ścianki przylegającej) ścianka ta krzepnie jak płyta nieskończona i w tym miejscu można węzeł "uciąć" przyjmując na brzegu warunek adiabatyczności. Niestety, komputer, na którym prowadzono obliczenia (IBM PC/AT/386) jak i programy systemowe uniemożliwiały wprowadzenie większej liczby węzłów brzegowych i wewnętrznych w obszarze węzła cieplnego i ścianek przylegających oraz "przedłużenie" analizowanego fragmentu ścianki.

Na rys. 7.22 pokazano chwilowe pola temperatury w symetrycznym fragmencie węzła cieplnego obliczone dla czasów 60, 120, 180s.

Rozkład temperatury ($t=60s$)



Rozkład temperatury ($t=120s$)



Rozkład temperatury ($t=180s$)



Rys.7.22. Pole temperatury w przekroju węzła cieplnego

Fig.7.22. Temperature field in the section of the hot spot

LITERATURA DO ROZDZIAŁU 7

- [1] E.Majchrzak, Numerical Simulation of Solidification by Boundary Element Method, [w:] Mat.Konf. FOCOMP'88, Sofia (1988), 208-217
- [2] W.Sakwa, B.Mochnacki, E.Majchrzak, Utilization of Microcomputers in Thermal Theory of Foundry, [w:] Proceedings 21, Twenty-First Annual Pittsburgh Conference on Modelling and Simulation, Pittsburgh, Usa (1990)
- [3] E.Majchrzak, Numerical Simulation of Continuous Casting Solidification by Boundary Element Method, Engineering Analysis with Boundary Elements' (przyjęto do druku)
- [4] R.Grzymkowski, B.Mochnacki, Analiza krzepnięcia wlewka w procesie ciągłego odlewania, Ktzeplnięcie metali i Stopów, Ossolineum (1980), 69-134
- [5] J.Szargut, J.Skorek, Analysis of Ingot Temperature Field in Continuous Casting, Metals Technology, 36 (1980), 36-40
- [6] Majchrzak E., Mochnacki B., The Collocational Method of Determining the Solidification Front in the Continuous Casting Volume, Bull. of Pol.Ac. of Sc., Techn., Vol.36, No 5-6, Warszawa (1988), 301-308
- [7] Rogers J., Berger A., Ciment M., The Alternating Phase Truncation Method for a Stefan Problem, SIAM.J.Num.Anal. 16(1979), 562-587
- [8] Rogers J., Berger A., Ciment M., Numerical Solution of a Diffusion Consumption Problem with a Free Boundary, SIAM.J.Num.Anal. 12 (1975), 645-659
- [9] E.Majchrzak, B.Mochnacki, Modelowanie krzepnięcia stopów na bazie metody elementów brzegowych, Archiwum TBM, nr 9 (1990)
- [10] E.Majchrzak, B.Mochnacki, A Temperature Field Identification in the Volume of Ingot Mould, [w:] Mat.Konf. VII Konf. Metody i Środki Projektowania Wspomaganeego Komputerowo, Pol.Warsz. ITBM, Warszawa (1989), 202-209
- [11] E.Majchrzak, Wykorzystanie metody brzegowych równań całkowych do identyfikacji frontu krzepnięcia w przekroju poprzecznym wlewka (Komunikat) [w:] Mat. Konf. XIV Symp.Nauk., ITiMO AGH, Kraków (1988), 35-41
- [12] B.Mochnacki, E.Majchrzak, A.Kapusta, Numerical Model of Heat Transfer Processes in Solidification and Cooling Steel Ingot (on the Basis of BEM), [w:] Comp. Modelling of Free and Moving Boundary Problems, Southampton (1991)
- [13] J.Kawaler, B.Mochnacki, R.Parkitny, E.Majchrzak, T.Włodarczyk, Optymalizacja kształtu wlewnicy W01 do wytwarzania wlewków stalowych, Inst. Odl., Kraków, DHN "Nauka" (1988), Raport
- [14] J.Gawroński, S.Jura, B.Mochnacki, The Mathematical Modelling of Solidifying and Cooling of Complex Casting, [w:] Mat. Kongr. 45th Int. Foundry Congress, Budapest (1978)
- [15] B.Mochnacki, J.Gawroński, B.Krajczyk, E.Majchrzak, Numerical Verification of the Block Anvil Production Project as an Example of Utilization of CAD Methods in the Foundry, [w:] Mat. Konf. FOCOMP'86, Kraków (1986), 118-125

- [16] J.Gawroński, B.Krajczy, E.Majchrzak, B.Mochnacki, Komputerowa weryfikacja projektów technologii wytwarzania odlewów złożonych, [w:] Matematyczne metody w obliczeniach procesów krystalizacji i krzepnięcia odlewów, Inst. Odl. Pol. Śl., Gliwice (1985), 61-71
- [17] J.Gawroński, B.Krajczy, E.Majchrzak, B.Mochnacki, F.Zasada, Wspomagane komputerowo projektowanie technologii wytwarzania odlewów o złożonym kształcie, [w:] Krzepnięcie metali i Stopów. badania wdrożeniowe, I.Odl. Pol.Śl., Gliwice (1988), 299-308
- [18] E.Majchrzak, Utilization of BEM for Numerical Analysis of Thermal Processes in the Casting-Mould System, [w:] Comp. Modelling of Free and Moving Boundary Problems, Southampton (1991)
- [19] E.Majchrzak, B.Mochnacki, Numerical Simulation of Heat Transfer Processes in the Hot Spots of L, T and X type, Bull.of Pol. Ac. of Sc.,Therm., Vol.36, No 5-6 (1988), 285-300
- [20] E.Majchrzak, Praca doktorska, Gliwice 1987

8. WNIOSKI

W pracy przeprowadzono wszechstronną analizę możliwości wykorzystania metody elementów brzegowych w zadaniach termodynamiki procesów odlewniczych, a w szczególności w identyfikacji frontu krzepnięcia i niestacjonarnych pól temperatury w szeroko rozumianym układzie odlew-forma (odlewy wytwarzane w masach formierskich, krzepnięcie wlewków, odlewanie ciągłe).

Szczególną uwagę zwrócono na praktyczne aspekty wykorzystania metody, a więc modelowanie krzepnięcia w interwale temperatury, zadania z ostrym frontem, problemy symulacji warunków brzegowych między odlewem i formą (wlewkami i wlewnicą), złożoność geometryczną odlewów.

Z kilku możliwych reprezentacji MEB dla zadań niestacjonarnych wybrano metodę bezpośrednią wykorzystującą rozwiązania fundamentalne zależne od czasu. Takie podejście jest w tej chwili najbardziej popularne i wydaje się szczególnie efektywne, co nie oznacza, że nie można adaptować również innych wariantów MEB do symulacji krzepnięcia i stygnięcia metalu w formie.

Jeżeli bardzo obszerną literaturę dotyczącą metod numerycznych podzielić umownie na trzy grupy tzn. teorię, zastosowania i konkretne algorytmy, to prezentowana praca zawiera w sobie elementy grupy drugiej i trzeciej, dotyczy bowiem praktyki a nie teorii MEB mimo, że w tekście pracy nie można było uniknąć wielu rozważań matematycznych, często dość trudnych.

Na podstawie przeprowadzonych badań, testowanych algorytmów i wyników obliczeń można sformułować następujące wnioski

- 1°. Metoda brzegowych równań całkowych potwierdziła swoją efektywność do obliczeń przepływu ciepła w zadaniach termodynamiki procesów odlewniczych.
- 2°. Szczególnie wygodnym sposobem jej realizacji jest połączenie algorytm-

mu dla liniowych równań parabolicznych z procedurami poprawiania pola temperatury na kolejnych poziomach czasu (np. metoda przemiennej fazy, korekta na bazie bilansów energii).

- 3°. W obliczeniach przepływu ciepła w obszarach o istotnie różnych parametrach termofizycznych np. odlew i masa formierska najbardziej efektywnym sposobem wykorzystania metody brzegowych równań całkowych jest połączenie I schematu MEB dla obszaru odlewu i II schematu dla obszaru formy, w szczególności jeżeli można przyjąć, że dla $t=0$ temperatura początkowa formy jest w całym jej obszarze taka sama.
- 4°. Podany w pracy sposób modelowania warunków brzegowych na powierzchni styku odlewu i formy (również przy dodatkowym oporze cieplnym - np. szczelina gazowa) jest uniwersalny a także prosty w realizacji numerycznej i jak pokazały obliczenia testujące dokładny. Należy przy tym podkreślić, że odpowiednia procedura będzie również poprawna w przypadku nieliniowości warunków brzegowych np. zmiennego z temperaturą oporu cieplnego szczeliny gazowej.
- 5°. Stwierdzono ponad wszelką wątpliwość, że dla zadań niestacjonarnych podział rozpatrywanego obszaru na podobszary wypukłe jest niezbędny, oraz, że sposób łączenia tych podobszarów za pomocą formalnie przyjętego warunku kontaktu idealnego daje w pełni zadawalające wyniki.
- 6°. Niewątpliwą zaletą metody elementów brzegowych jest dokładne odwzorzenie kształtu rozważanego obszaru oraz duża dowolność dyskretyzacji brzegu i wnętrza. Ma to szczególne znaczenie dla zadań praktyki odlewniczej, w których istnieje konieczność analizy obszarów o złożonej geometrii.
- 7°. Metoda elementów brzegowych jest metodą pojęciowo dość trudną i z całą pewnością metoda różnic skończonych czy też metoda elementów skończonych są łatwiej "przyswajalne". Z drugiej strony jednak przy pewnej wprawie i doświadczeniu można łączyć całe bloki powtarzalnych procedur i tworzyć w ten sposób odpowiednie programy. Między innymi w ramach tej pracy stworzono również bibliotekę najważniejszych procedur MEB dla zadań brzegowo-początkowych, przy czym użytkownik takiej biblioteki nie musi być wcale specjalistą w dziedzinie MEB.

ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W TERMODYNAMICE PROCESÓW ODLEWNICZYCH

STRESZCZENIE

W pracy przedstawiono problemy wykorzystania brzegowych równań całkowych w teorii cieplnej procesów odlewniczych.

Przepływ ciepła w szeroko rozumianym układzie odlew-forma traktuje się w pracy jako zadanie brzegowo-początkowe z ruchomymi granicami-opisane przez układ równań energii (równań Fouriera) uzupełniony odpowiednimi warunkami jednoznaczności.

W szczególności rozważano następujące problemy

- adaptację metody elementów brzegowych do numerycznego rozwiązywania zadań nieliniowych (w szczególności problemu krzepnięcia),
- wykorzystania MEB do obliczeń cieplnych w obszarach niejednorodnych o istotnie różnych parametrach termofizycznych (np. odlew-forma piaskowa),
- symulację przepływu ciepła w obszarach niejednorodnych z warunkiem brzegowym zawierającym w sobie opór cieplny na styku podobszarów (np. szczelina między wlewką a wlewnicą),
- wykorzystania MEB w zadaniach dwuwymiarowych (2D) dla obszarów niewypukłych,
- numerycznej aproksymacji warunku Stefana,
- obliczeń cieplnych w obszarach metalu krzepnącego w interwale temperatury.

UTILIZATION OF BOUNDARY ELEMENT METHOD IN THERMAL THEORY OF FOUNDRY

SUMMARY

The problems of Boundary Element Method utilization in the numerical modeling of solidification and cooling processes are presented.

The thermal processes in the wide class of casting-mould systems are treated as the boundary-initial problems with moving boundaries - described by a system of partial differential equations (Fourier's equations) supplemented by the adequate conditions.

In particular the following problems are discussed

- adaptation of the method for numerical solution of non-linear problems (solidification of metal),
- utilization of BEM for heterogenous areas e.g. casting-mould (the areas with essentially different thermophysical parameters),
- numerical simulation in the case of 4th kind boundary conditions with thermal resistance (e.g. ingot-ingot mould),
- utilization of BEM for non-convex areas,
- modeling of Stefan's boundary conditions,
- thermal computations in the case of solidification in an interval of temperature.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕРМОДИНАМИКЕ
ЛИТЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

РЕЗЮМЕ

Представлены проблемы применения МГЭ в термодинамике литейных процессов.

Теплопередача в системе отливка-форма в этой работе обращается к начально-граничной задаче с движущимися контурами - описанной системой дифференциальных уравнений и соответствующих условию однозначения.

В частности рассматриваются следующие проблемы

- приспособление МГЭ к численному решению нелинейных задач (прежде всего задач затвердевания),
- применение МГЭ к термическим вычислениям для неоднородных тел при значительно разных теплофизических свойствах (нп. отливка-песчаная форма),
- численное моделирование теплопереноса в неоднородных телах с граничным условием IV рода из термическим сопротивлением (нп. зазор между слитком и изложницей),
- применение МГЭ в двумерных задачах для вогнутых областей,
- численное моделирование условия Стефана,
- термические вычисления в областях металла затвердевающего в пределе температуры.

