ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Mechanika z. 53 Nr kol. 439

Józef Wojnarowski
Andrzej Buchacz

Instytut Podstaw Konstrukcji Maszyn

GRAFY I LICZBY STRUKTURALNE WYŻSZEJ KATEGORII JAKO EFEKTYWNY SPOSÓB MODYFIKACJI WŁASNOŚCI DYNAMICZNYCH UKŁADÓW LINIOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono sposób modyfikacji dyskretnych układów mechanicznych z wykorzystaniem grafów i liczb strukturalnych wyższej kategorii. Wprowadzając półgrupy przekształceń podano ogólny algorytm modyfikacji strukturalnej układu.

Wstęp

Zagadnienie modyfikacji własności dynamicznych nabiera właściwego znaczenia [1, 2]. Próbę optymalizacji systemu metodą zmiany struktury podejmuje J. Beneš [3]. Wykorzystanie grafów i liczb strukturalnych pierwszej kategorii w modyfikacji własności dynamicznych zaproponowali autorzy pracy [4]. Pełną ogólność zagadnienia modyfikacji układów fizycznych można uzyskać stosując grafy wyższej kategorii i algebrę liczb strukturalnych [5].

Wprowadzenie

Rozważmy dowolny układ liniowy zidentyfikowany grafem G i liczbą strukturalną A wyższej kategorii. Oznacza to, że struktura układu jest znana. Określone są również charakterystyki dynamiczne - macierz widmowa Λ i macierz modalna Y.

Przyjmijmy, że układ ten, który ma transformować wielkości wejściowe w wyjściowe nie spełnia założonej zgodności odpowiedzi. Wtedy nie zachodzi relacja

$$\bigwedge_{y_i \in y} \bigvee_{\varepsilon > 0} \Big((z_i - y_i(p)) < \varepsilon \Big) , \tag{1}$$

gdzie: $p = {}^T\{p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_m\}$ - zbiór parametrów konstrukcyjnych, $p_j \in P(j \in N)$ - zbiór wszystkich parametrów geometrycznych i fizycznych układu, $y = {}^T\{y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n\}$ $(i \in N)$ - wektor stanu, z_i - założona wartość wielkości wyjściowej, ε - dopuszczalna różnica między założonym i uzyskanym wyjściem.

Powstaje zatem problem jak zmodyfikować układ, aby spełniony został warunek (1). Można to uzyskać dokonując zmiany parametrów p układu, poprzez ich wariację, względnie modyfikację struktury.

Modyfikacja strukturalna układu

Zastosowanie grafów i liczb strukturalnych wyższej kategorii pozwala na uogólnienie problemu identyfikacji układu. Możemy bowiem dokonywać pewnych działań na liczbach strukturalnych bez wnikania w strukturę grafów (bloków) opisujących układ mechaniczny. Działania te mają charakter ogólny a zależności pozwalające prowadzić modyfikację są związkami funkcyjnymi. Podstawą prowadzenia modyfikacji własności dynamicznych układu są prawa cykliczne i prawa przekroju grafu oraz wyprowadzone z nich zależności, które dotyczą zwarcia i rozwarcia grafu [5]. Zauważmy, że działania na grafach tworzą półgrupę [6].

Do naszych rozważań wprowadzimy natomiast następujące półgrupy przekształceń:

$\varphi_1^{(k)}$ – łączenia grafów przez k par wierzchołków,

$\varphi_2^{(m)}$ – odłączenia części grafu o m wierzchołkach,

φ_3 – translokacji części grafu.

Można wykazać, że wymienione przekształcenia $\varphi_i \in \Phi$ $(i = 1,2,3)$ tworzą półgrupę przekształceń ponieważ spełniają następujące aksjomaty:

1) superpozycja każdych dwóch przekształceń ze zbioru Φ jest przekształceniem należącym do zbioru Φ

$$\bigwedge_{\varphi_i,\, \varphi_j \in \Phi} \varphi_i \circ \varphi_j \in \Phi,$$

2) istnieje przekształcenie neutralne należące do zbioru Φ, że dla każdego przekształcenia należącego do Φ zachodzi

$$\bigvee_{\varphi_0 \in \Phi} \bigwedge_{\varphi_i \in \Phi} \varphi_i \circ \varphi_0 = \varphi_i,$$

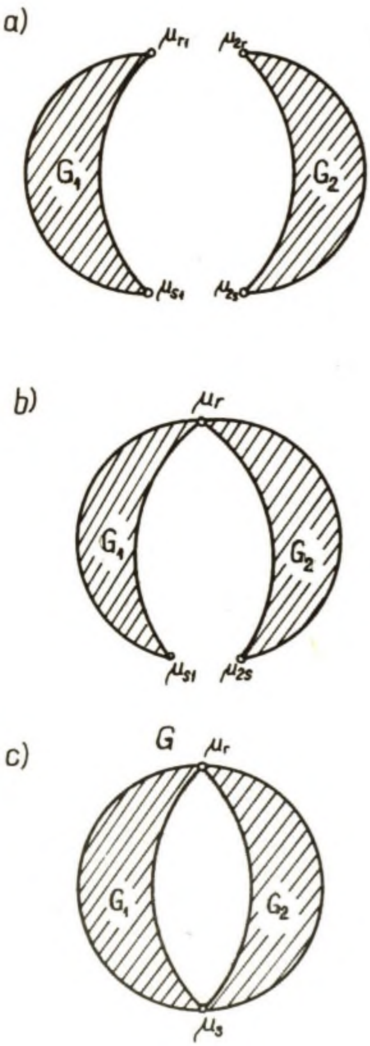
gdzie: Φ – zbiór wzajemnie jednoznacznych przekształceń φ_i $(i=0,1,2,\ldots)$ skończonego zbioru grafów Γ $(G_1, G_2, \ldots, G_n \in \Gamma)$ na siebie.

Modyfikacja strukturalna z zastosowaniem półgrupy $\varphi_1^{(k)}$

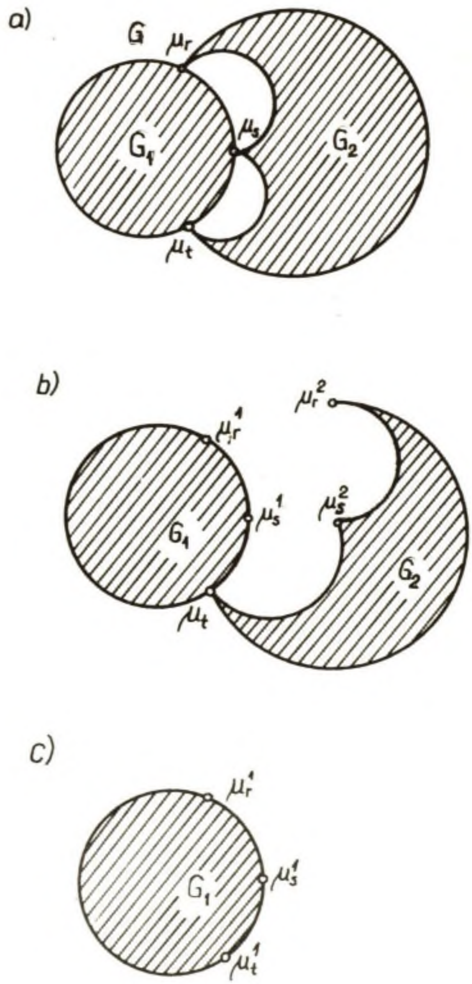
Załóżmy, że danych jest j grafów ($G_1,\dots,G_j \in \Gamma$) o znanych liczbach strukturalnych $A_1,\dots,A_j$. Półgrupę łączenia grafów określamy jako

$$\varphi_1^{(k)}:\left\{G_1,\dots,G_j\right\} \longrightarrow G \in \Gamma. \tag{2}$$

W wyniku połączenia grafów przez k wierzchołków otrzymujemy graf G o liczbie strukturalnej A. Przedstawimy obecnie półgrupę przekształceń $\varphi_1^{(2)}$



Rys. 1



Rys. 2

i sposób wyznaczenia liczby strukturalnej A grafu G na przykładzie połączenia grafów G_1 i G_2 o znanych liczbach strukturalnych A_1 i A_2 dokonanym przez dwie pary wierzchołków μ_r, μ_s zwierając odpowiednio μ_{r1} z μ_{2r} i μ_{s1} z μ_{2s} (rys. 1).
Po zwarciu wierzchołków μ_{r1} z μ_{2r} (rys. 1b) otrzymamy graf, którego liczba strukturalna wynosi

$$A_1 A_2 \overset{e}{=} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

gdzie: e - przekształcenie przyporządkowujące liczbie strukturalnej wyższej kategorii liczbę strukturalną pierwszej kategorii.
Po zwarciu drugiej pary wierzchołków μ_{s1} z μ_{2s} (rys. 1c) otrzymamy graf, którego liczba strukturalna wynosi

$$A \overset{e}{=} \frac{\partial \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}{\partial\left[\left[d\mu_{r1}\mu_{s1}\right]\left[d\mu_{2r}\mu_{2s}\right]\right]} \overset{e}{=} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial A_1}{\partial\left[d\,\mu_{r1}\mu_{s1}\right]} & A_1 \\ A_2 & \dfrac{\partial A_2}{\partial\left[d\mu_{2r}\mu_{2s}\right]} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

gdzie: $d\mu_{r1}\mu_{s1}$ - dowolna droga grafu G_1 między wierzchołkami, μ_{r1} i μ_{s1}, $d\mu_{2r}\mu_{2s}$ - dowolna droga grafu G_2 między wierzchołkami μ_{2r} i μ_{2s}.

Modyfikacja strukturalna z zastosowaniem półgrupy $\varphi_2^{(m)}$

Zakładamy, że dany jest graf G o liczbie strukturalnej A, od którego odłączamy jego część (podgraf) G_2 ($G_2 \in G$) o liczbie strukturalnej A_2. W wyniku otrzymamy graf G_1 ($G_1 \in G$), którego liczba strukturalna wynosi A_1. Półgrupę odłączenia podgrafu określamy zatem następująco

$$\varphi_2^{(m)}:\left\{G,\ G_2\right\} \longrightarrow G_1, (G_1, G_2, G \in \Gamma). \tag{5}$$

Półgrupę przekształceń $\varphi_2^{(3)}$ przedstawimy na przykładzie odłączenia od grafu G jego części G_2 (rys. 2). Otrzymamy w ten sposób graf G_1 o liczbie strukturalnej A_1, którą wyznaczymy zgodnie z zależnościami na podział wierzchołka.
Jeśli z wierzchołkiem μ_r^2 podgrafu G_2 incydentne są krawędzie α_{r1}^2, α_{r2}^2, ..., $\alpha_{rm_r}^2$ a z wierzchołkiem μ_s^2 krawędzie α_{s1}^2, α_{s2}^2, ..., $\alpha_{sm_s}^2$, to

liczba strukturalna grafu powstałego w wyniku podziału wierzchołków μ_r i μ_s w grafie G (rys. 2b) wynosi

$$A\left[\mu_r^2\right]\left[\mu_s^2\right] \tag{5a}$$

lub

$$A\left[\mu_r^1\right]\left[\mu_s^1\right], \tag{5b}$$

gdzie: $\left[\mu_r^2\right] = \left[\alpha_{r1}^2, \alpha_{r2}^2, \ldots, \alpha_{rm_r}^2\right]$ - liczba strukturalna utworzona z oznaczeń krawędzi incydentnych przykładowo z wierzchołkiem μ_r^2 (podobnie dla innych wierzchołków).

Graf ten jest słabospójny z punktem przegubowym w wierzchołku μ_t wobec czego jego liczbę strukturalną można także wyrazić jako iloczyn liczb strukturalnych A_1 i A_2. Ponadto, ponieważ oba podgrafy G_1 i G_2 nie posiadają wspólnych krawędzi, czyli

$$\frac{\partial A_1}{\partial D_2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial A_2}{\partial D_2} = 1,$$

gdzie: D_2 - liczba strukturalna dowolnego drzewa podgrafu G_2, to

$$A_1 = \frac{\partial(A_1A_2)}{\partial D_2}.$$

Zastępując w tym wyrażeniu iloczyn A_1A_2 wyrażeniami (5a) lub (5b) uzyskujemy

$$A_1 = \frac{\partial\left(A\left[\mu_r^2\right]\left[\mu_s^2\right]\right)}{\partial D_2} \tag{6a}$$

lub

$$A_1 = \frac{\partial\left(A\left[\mu_r^1\right]\left[\mu_s^1\right]\right)}{\partial D_2}. \tag{6b}$$

W ogólnym przypadku, gdy podgrafy G_1 i G_2 łączy m wierzchołków, wyrażenia (6a) lub (6b) przyjmują postać

$$A_1 = \frac{\partial\left(A\prod_{i=1}^{m-1}\left[\mu_i^2\right]\right)}{\partial D_2} \tag{7a}$$

i sposób wyznaczenia liczby strukturalnej A grafu G na przykładzie połączenia grafów G_1 i G_2 o znanych liczbach strukturalnych A_1 i A_2 dokonanym przez dwie pary wierzchołków μ_r, μ_s zwierając odpowiednio μ_{r1} z μ_{2r} i μ_{s1} z μ_{2s} (rys. 1).
Po zwarciu wierzchołków μ_{r1} z μ_{2r} (rys. 1b) otrzymamy graf, którego liczba strukturalna wynosi

$$A_1A_2 \overset{e}{=} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

gdzie: e - przekształcenie przyporządkowujące liczbie strukturalnej wyższej kategorii liczbę strukturalną pierwszej kategorii.
Po zwarciu drugiej pary wierzchołków μ_{s1} z μ_{2s} (rys. 1c) otrzymamy graf, którego liczba strukturalna wynosi

$$A \overset{e}{=} \frac{\partial \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}{\partial\left[\left[d\mu_{r1}\mu_{s1}\right]\left[d\mu_{2r}\mu_{2s}\right]\right]} \overset{e}{=} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial A_1}{\partial\left[d\,\mu_{r1}\mu_{s1}\right]} & A_1 \\ A_2 & \dfrac{\partial A_2}{\partial\left[d\mu_{2r}\mu_{2s}\right]} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

gdzie: $d\mu_{r1}\mu_{s1}$ - dowolna droga grafu G_1 między wierzchołkami, μ_{r1} i μ_{s1}, $d\mu_{2r}\mu_{2s}$ - dowolna droga grafu G_2 między wierzchołkami μ_{2r} i μ_{2s}.

Modyfikacja strukturalna z zastosowaniem półgrupy $\varphi_2^{(m)}$

Zakładamy, że dany jest graf G o liczbie strukturalnej A, od którego odłączamy jego część (podgraf) G_2 ($G_2 \in G$) o liczbie strukturalnej A_2. W wyniku otrzymamy graf G_1 ($G_1 \in G$), którego liczba strukturalna wynosi A_1.
Półgrupę odłączenia podgrafu określamy zatem następująco

$$\varphi_2^{(m)}: \left\{G,\ G_2\right\} \longrightarrow G_1, (G_1, G_2, G \in \Gamma). \tag{5}$$

Półgrupę przekształceń $\varphi_2^{(3)}$ przedstawimy na przykładzie odłączenia od grafu G jego części G_2 (rys. 2). Otrzymamy w ten sposób graf G_1 o liczbie strukturalnej A_1, którą wyznaczymy zgodnie z zależnościami na podział wierzchołka.
Jeśli z wierzchołkiem μ_r^2 podgrafu G_2 incydentne są krawędzie α_{r1}^2, α_{r2}^2, ..., $\alpha_{rm_r}^2$ a z wierzchołkiem μ_s^2 krawędzie α_{s1}^2, α_{s2}^2, ..., $\alpha_{sm_s}^2$, to

liczba strukturalna grafu powstałego w wyniku podziału wierzchołków μ_r i μ_s w grafie G (rys. 2b) wynosi

$$A\left[\mu_r^2\right]\left[\mu_s^2\right] \tag{5a}$$

lub

$$A\left[\mu_r^1\right]\left[\mu_s^1\right], \tag{5b}$$

gdzie: $\left[\mu_r^2\right] = \left[\alpha_{r1}^2, \alpha_{r2}^2, \ldots, \alpha_{rm_r}^2\right]$ - liczba strukturalna utworzona z oznaczeń krawędzi incydentnych przykładowo z wierzchołkiem μ_r^2 (podobnie dla innych wierzchołków).
Graf ten jest słabospójny z punktem przegubowym w wierzchołku μ_t wobec czego jego liczbę strukturalną można także wyrazić jako iloczyn liczb strukturalnych A_1 i A_2. Ponadto, ponieważ oba podgrafy G_1 i G_2 nie posiadają wspólnych krawędzi, czyli

$$\frac{\partial A_1}{\partial D_2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial A_2}{\partial D_2} = 1,$$

gdzie: D_2 - liczba strukturalna dowolnego drzewa podgrafu G_2, to

$$A_1 = \frac{\partial(A_1A_2)}{\partial D_2}.$$

Zastępując w tym wyrażeniu iloczyn A_1A_2 wyrażeniami (5a) lub (5b) uzyskujemy

$$A_1 = \frac{\partial\left(A\left[\mu_r^2\right]\left[\mu_s^2\right]\right)}{\partial D_2} \tag{6a}$$

lub

$$A_1 = \frac{\partial\left(A\left[\mu_r^1\right]\left[\mu_s^1\right]\right)}{\partial D_2}. \tag{6b}$$

W ogólnym przypadku, gdy podgrafy G_1 i G_2 łączy m wierzchołków, wyrażenia (6a) lub (6b) przyjmują postać

$$A_1 = \frac{\partial\left(A\prod_{i=1}^{m-1}\left[\mu_i^2\right]\right)}{\partial D_2} \tag{7a}$$

lub

$$A_1 = \frac{\partial\left(A \prod\limits_{i=1}^{m-1} \left[\mu_i^1\right]\right)}{\partial D_2} \cdot \qquad (7b)$$

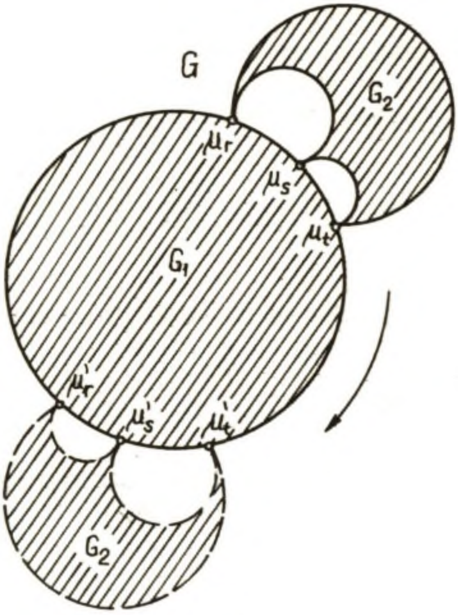
Modyfikacja strukturalna z zastosowaniem półgrupy φ_3

Półgrupę translokacji φ_3 otrzymujemy przez wykonanie odłączenia części grafu (podgrafu), a następnie - zmianę połączenia podgrafu z pozostałą częścią grafu. Jest to więc superpozycja półgrup $\varphi_1^{(k)}$ i $\varphi_2^{(m)}$, którą określamy jako

$$\Phi \ni \varphi_3 = \varphi_2^{(m)} \hat{\sigma}\, \varphi_1^{(k)}; \qquad (k = m), \qquad (8)$$

gdzie: $\hat{\sigma}$ - oznacza superpozycję translokacji.

Przykład półgrupy translokacji φ_3 podgrafu G_2 ilustruje rys. 3. Na rysunku tym liniami kreskowanymi narysowano podgraf G_2 po translokacji z położenia pierwotnego.



Rys. 3

Liczbę strukturalną grafu otrzymanego w wyniku translokacji wyznaczamy następująco

1° ustalamy liczbę strukturalną A_1 grafu G_1, uzyskanego po odłączeniu podgrafu G_2 od grafu G,

2° przyłączamy podgraf G_2 do innych wierzchołków grafu G_1,

3° obliczamy liczbę strukturalną tak otrzymanego grafu, posługując się zależnościami podanymi w poprzednich przykładach.

Uwagi końcowe

Przedstawiona metoda modyfikacji układu przy pomocy grafów i liczb strukturalnych wyższej kategorii jest efektywnym sposobem pozwalającym na zmianę struktury dyskretnych układów mechanicznych.

Dokonując wyboru właściwej półgrupy przekształceń możemy zwiększyć efektywność metody.
Proponowany sposób modyfikacji bazujący na grafach i algebrze liczb strukturalnych wyższej kategorii jest metodą ogólną a związki, z których korzystamy pozwalają, w sensie zmian struktury układu utworzyć ogólny algorytm modyfikacji.

LITERATURA

[1] LALLEMENT G.: Modyfikacja własności dynamicznych układów liniowych, Dynamika Maszyn, Wyd. PAN, 1974.

[2] LALLEMENT G., TUREK F.: Proceedings of the VIII Conf. Dynamics of Machines, ČSAV, U.T. Praha, Liblice, Sept. 1973, 285.

[3] BENEŠ J.: Teorie systemu, Academia, Praha, 1974.

[4] WOJNAROWSKI J., BUCHACZ A.: XIV Sympozjon Optymalizacja w Mechanice, zbiór referatów, Gliwice-Jaszowiec 1975, 253.

[5] BELLERT S., WOŹNIACKI H.: Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych, WNT, Warszawa 1968.

[6] MELICHOV A.N.: Orientirovannyje grafy i konečnye avtomaty, Nauka, Moskva, 1971.

ГРАФЫ И СТРУКТУРНЫЕ ЧИСЛА ВЫСШЕЙ КАТЕГОРИИ КАК ЭФФЕКТИВНЫЙ СПОСОБ МОДИФИКАЦИИ СВОЙСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В работе представлен способ модификации дискретных механических систем с использованием графов и структурных чисел высшей категории. Вводя полугруппы преобразований приводится общий алгоритм структурной модификации системы

GRAPHS AND STRUCTURAL HIGHER CATEGORY NUMBERS AS EFFECTIVE METHOD FOR DYNAMIC PROPERTIES MODYFICATIONS IN LINEAR SYSTEMS

S u m m a r y

The paper present the way for discrete mechanical systems modyfication utilizing graphs and structural numbers of higher category. Introducing transformation halfgroups of universal algorythm of structural system modyfication has been given.