ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Mechanika z. 53 Nr kol. 439

Roman Bąk
Marek Pless
Instytut Podstaw Konstrukcji Maszyn

JAK UWZGLĘDNIĆ NIELINIOWE ZWIĄZKI KONSTYTUTYWNE TWORZYWA W METODZIE ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Streszczenie. W pracy podano algorytm iteracyjny, umożliwiający wykorzystanie programów liniowej teorii sprężystości do analizy stanu naprężenia w zakresie sprężysto-plastycznym.

Wprowadzenie

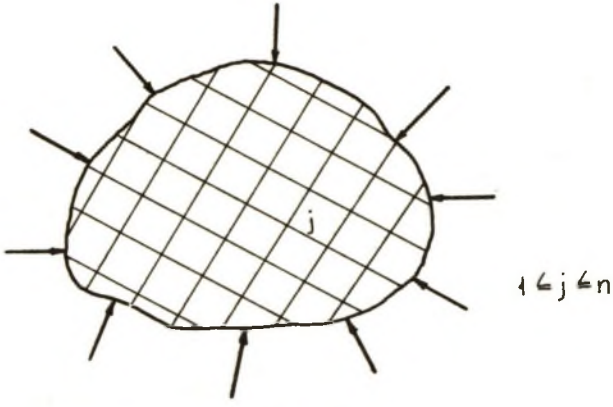
W Instytucie Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Śląskiej w okresie ostatnich dwóch lat opanowano w sposób praktyczny szereg numerycznych metod obliczeń wytrzymałościowych układów liniowo-sprężystych. Powstał problem, jak wykorzystać istniejące sprawdzone praktycznie programy metody elementów skończonych do obliczeń wytrzymałościowych, w których uwzględnić należy uplastycznienie oraz umocnienie tworzywa.
W artykule zaproponowano sposób rozwiązania tego problemu.

Założenia

1. Znany jest program obliczeń pozwalający określić metodą elementów skończonych stan naprężenia w układzie liniowo-sprężystym.
2. Określony jest związek pomiędzy stanem naprężenia i odkształcenia np. w postaci wykresu rozciągania.
3. Przyjmuje się, iż hipoteza wytężenia energii odkształcenia postaciowego jest słuszna powyżej granicy plastyczności aż do zniszczenia tworzywa.
4. Zakłada się, że obciążenie rośnie monotonicznie lub posiada niezbyt skomplikowaną historię (np. jednorazowe obciążenie i odciążenie).
5. Pomija się wpływ czasu, temperatury oraz składowych tensora prędkości odkształcenia na własności tworzywa.
6. Przyjmuje się, że quasistatyczny, nieodwracalny proces rozciągania pręta można przedstawić w każdej fazie obciążenia lub odciążenia jako pewien odwracalny proces liniowo-sprężysty.

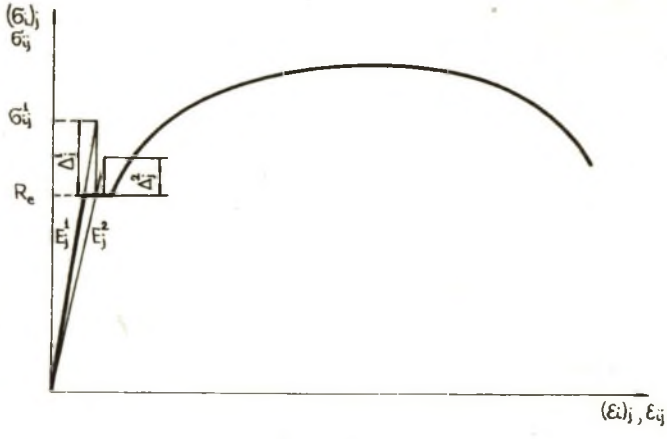
Iteracyjna metoda obliczeń

Na rysunku 1 przedstawiono ciało o dowolnych kształtach, przenoszące dowolne obciążenia utrzymujące go w równowadze.



Rys. 1

Ciało zamienia się na układ dyskretny zgodnie z wymogami metody elementów skończonych np. na j elementów prostopadłościennych. Na rysunku 2 podano wykres rozciągania tworzywa z którego wykonane jest rozważane ciało. Określa on w sposób jednoznaczny związek pomiędzy naprężeniem σ a odkształceniem ε w jednoosiowym stanie naprężenia.



Rys. 2

Jeżeli przyjąć słuszność hipotezy wytężenia odkształcenia postaciowego wykres rozciągania określa także związek pomiędzy intensywnością naprężenia σ_{ij}^{k}

$$\sigma_{ij}^{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)} \tag{1}$$

a intensywnoscią odkształcenia ε_{ij}^{k}

$$\varepsilon_{ij}^{k} = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+3(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)} \tag{2}$$

Obydwie te wielkości można związać zależnością (3) przypominającą formalnie prawo Hooke'a

$$\sigma_{ij}^{k} = E_j^k \cdot \varepsilon_{ij}^{k} \tag{3}$$

gdzie:

σ_{ij}^{k} - intensywność naprężenia w j-ym elemencie dla k-tej iteracji,

ε_{ij}^{k} - intensywność odkształcenia w j-ym elemencie dla k-tej iteracji,

E_j^k - zastępczy moduł sprężystości dla j-ego elementu i k-tej iteracji

$$1 \leqslant j \leqslant m \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

Obliczenia wytrzymałościowe polegają na określeniu miejsca, w którym wytężenie posiada wartość maksymalną, czyli w którym rzeczywista intensywność naprężenia σ_{ij}^{k} jest największa. Jeżeli potrafimy w sposób operacyjny określić obszary, w których występuje odkształcenie plastyczne to z łatwością możemy obliczenia wytrzymałościowe przeprowadzić również w oparciu o ocenę nośności granicznej.

W celu uwzględnienia w obliczeniach nieliniowych związków konstytutywnych tworzywa należy za pomocą znanego programu, opartego o metodę elementów skończonych rozwiązać zadanie przyjmując, iż ciało wykonane jest z materiału liniowo-sprężystego o module sprężystości E_j^1 stałym dla wszystkich elementów i określonym prostoliniową częścią wykresu rozciągania.

Na podstawie tak wyliczonych składowych tensora stanu naprężenia

$$S_j^k = \begin{Vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ & & \sigma_z \end{Vmatrix} \tag{4}$$

należy określić intensywności naprężenia σ_{ij}^{k} (oczywiście dla k = 1) we wszystkich elementach.
Następnie oblicza się Δ_{j}^{k} według formuły

$$\Delta_{j}^{k} = \sigma_{ij}^{k} - (\sigma_{i})_{j}^{k} \tag{5}$$

gdzie:

$(\sigma_{i})_{j}^{k}$ - rzeczywista wartość naprężenia odczytana z wykresu rozciągania dla ε_{ij}^{k}.

Jeżeli

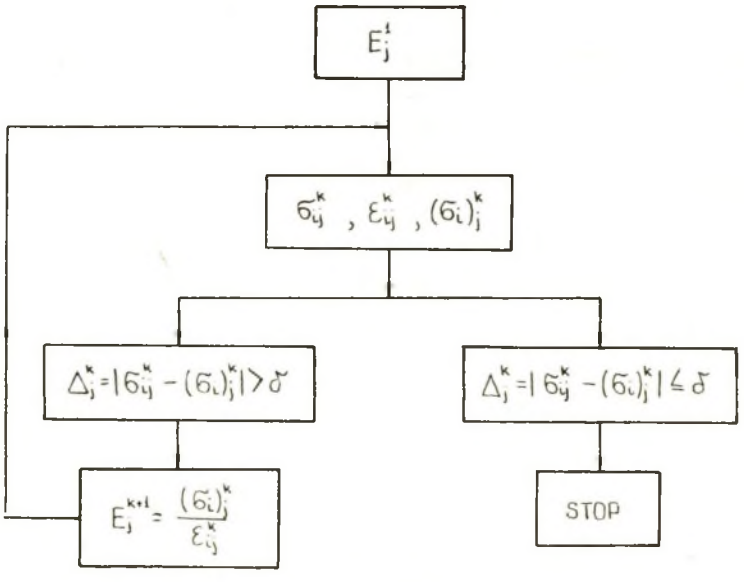
$$\Delta_{j}^{k} = \left|\sigma_{ij}^{k} - (\sigma_{i})_{j}^{k}\right| > \delta \tag{6}$$

gdzie:

δ - dowolnie mała liczba determinująca dokładność obliczeń,

należy określić zastępcze moduły sprężystości E_{j}^{k+1}.
Przyjmując w elementach skończonych zastępcze moduły sprężystości E_{j}^{k+1} należy wykorzystując znany program metody elementów skończonych rozwiązać ponownie zadanie, wyliczając składowe tensora stanu naprężenia, a na ich podstawie intensywność naprężenia σ_{ij}^{k+1}. Ponownie należy zbadać czy

$$\Delta_{j}^{k+1} = \left|\sigma_{ij}^{k+1} - (\sigma_{i})_{j}^{k+1}\right| > \delta \tag{7}$$



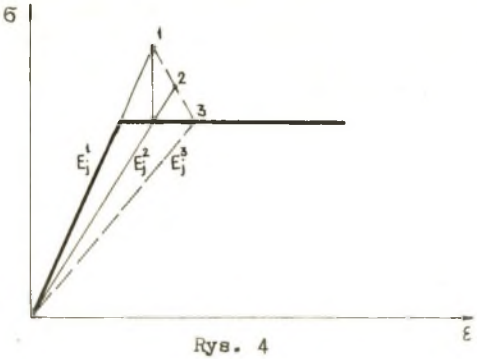
Rys. 3

Procedurę tę, która jak widać tworzy metodę iteracyjną poszukiwań naprężeń rzeczywistych zgodnych z zależnością określoną wykresem rozciągania prowadzi się do momentu, gdy

$$\Delta_j^k = \left| \sigma_{ij}^k - (\sigma_i)_j^k \right| \leqslant \delta$$

Oznacza to, iż we wszystkich elementach na które podzielono ciało intensywność naprężeń jest dostatecznie bliska wartości naprężeń rzeczywistych określonych z wykresu rozciągania.

Na rysunku 3 przedstawiono schemat algorytmu postępowania przy uwzględnieniu w obliczeniach wytrzymałościowych uplastycznienia i umocnienia materiału.



Rys. 4

Nic nie stoi na przeszkodzie, aby opisany sposób zastosować do uproszczonego modelu ciała sprężysto-plastycznego (rys. 4).

W celu zmniejszenia liczby iteracji koniecznych do osiągnięcia dostatecznie dużej dokładności obliczeń można postąpić w następujący sposób. Dokonuje się tylko iteracji pierwszej (k = 1) oraz drugiej (k = 2). Przez określone w ten sposób punkty na wykresie rozciągania (rys. 4) można poprowadzić linię prostą, aż do przecięcia się z prostą odpowiadającą granicy plastyczności R_e. Punkt przecięcia tych prostych pozwala na określenie zastępczego modułu sprężystości E_j^3, który praktycznie powinien już spełniać warunek dokładności.

Uwagi końcowe i wnioski

Metoda iteracyjna umożliwia bezpośrednie wykorzystanie programów metody elementów skończonych opracowanych dla zagadnień liniowo-sprężystych do analizy stanu naprężenia w zakresie sprężysto-plastycznym.

Metoda nie wymaga (w zakresie małych odkształceń trwałych) wprowadzenia uproszczeń w związkach konstytutowych tworzywa. Pozwala to uwzględnić zarówno uplastycznienie jak i umocnienie tworzywa w analizie stanu naprężenia.

Metoda jest szybkozbieżna. W przypadku pominięcia umocnienia wymaga dzięki zastosowaniu ekstrapolacji tylko dwóch a najwyżej trzech iteracji.

Algorytm metody narzuca konieczność określenia intensywności naprężenia, czyli naprężenia redukowanego we wszystkich elementach w każdym kro-

ku iteracyjnym. Dokonując obliczeń dla rosnącego ciągu wartości obciążenia można łatwo ocenić wytężenie czy nośność graniczną.

Algorytm metody daje się łatwo sformalizować i to czyni go przydatnym do obliczeń na maszynach cyfrowych.

W celu zwiększenia dokładności obliczeń, związki konstytutywne tworzywa można opisać wykresem naprężeń "rzeczywistych" uwzględniającym zmianę przekroju próbki w trakcie rozciągania.

LITERATURA

[1] ZIENKIEWICZ O.C.: Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1972

[2] FIEODOSJEV V.J.: Soprotivljenie materiałov. Fizmatgiz, Moskva, 1960.

[3] KAČANOV L.M.: Osnovy teorii płastičnosti. Gosudarstviennoje Izdatielstvo Techniko-Teoretičeskoj Literatury, Moskwa, 1956.

[4] JAEGER J.C.: Uprugost', pročnost' i tekučest', Mašgiz, Moskva, 1961.

КАК УЧИТЫВАТЬ НЕЛИНЕЙНЫЕ ОСНОВНЫЕ СВЯЗИ МАТЕРИАЛА В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Р е з ю м е

В работе приведен итерационный алгоритм дающий возможность использования программ линейной теории упругости к анализу напряжённого состояния в упруго-пластическом диапазоне.

HOW TO TAKE INTO ACCOUNT NON-LINEAR CONSTITUTIVE RELATIONS OF MATERIAL IN THE FINITE ELEMENT METHOD

S u m m a r y

The paper presents the iteration algorithm which enables the use of the elasticity linear theoretic programme to the stress state analysis in the elastic-plastic range.