ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

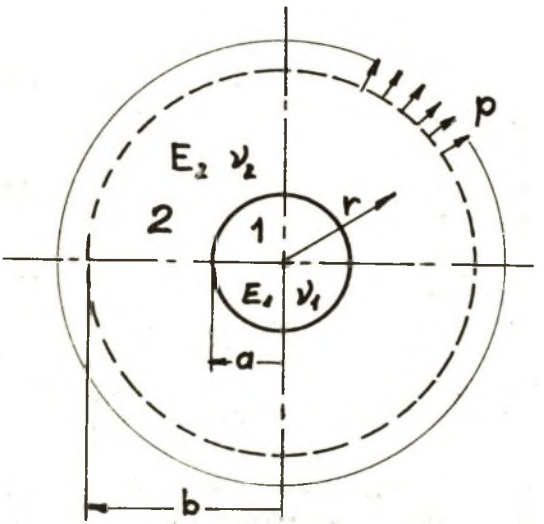
Seria: Mechanika z. 53 Nr kol. 439

Antoni Jakubowicz
Instytut Podstaw Konstrukcji Maszyn

KONCENTRACJA NAPRĘŻEŃ I ENERGII WOKÓŁ SPRĘŻYSTEJ INKLUZJI KULISTEJ

Streszczenie. W ośrodku sprężystym poddanym równomiernemu rozciąganiu znajduje się kulista inkluzja o różnych od środka właściwościach sprężystych. W oparciu o znane rozwiązania ogólne przeprowadzono analizę stanu naprężenia i właściwej energii odkształcenia w sąsiedztwie inkluzji i w samej inkluzji.

W jednorodnym izotropowym sprężystym ośrodku równomiernie rozciąganym $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=p$ lub ściskanym znajduje się kulista inkluzja o różnych od środka właściwościach sprężystych (rys. 1). Podstawą do określenia wpływu inkluzji na przemieszczenia i na stan naprężenia w sąsiedztwie nieciągłości jest rozwiązanie w przemieszczeniach środkowo symetrycznego zagadnienia sprężystego w układzie sferycznym [1].



Rys. 1

W obszarze 1

$$u_1 = A_1 r + \frac{B_1}{r^2}, \tag{1}$$

$$\sigma_{r1} = \frac{E_1}{1-\nu_1-2\nu_1^2}\left[A_1(1+\nu_1) - (1-2\nu_1)\frac{2}{r^3}B_1\right], \tag{2}$$

$$\sigma_{t_1} = \frac{E_1}{1-\nu_1-2\nu_1^2}\left[A_1(1+\nu_1) + (1-2\nu_1)\frac{B_1}{r^3}\right], \tag{3}$$

gdzie:

u_1 - przemieszczenie promieniowe,
σ_{r_1} - naprężenie promieniowe,
σ_{t_1} - naprężenie obwodowe,
E_1 - moduł sprężystości podłużnej,
ν_1 - współczynnik Poissona,
$A_{1,2}$ B_1 - stałe.

Podobnie w obszarze 2.

$$u_2 = A_2 r + \frac{B_2}{r^2}, \tag{4}$$

$$\sigma_{r_2} = \frac{E_2}{1-\nu_2-2\nu_2^2}\left[A_2(1+\nu_2) - (1-2\nu_2)\frac{2}{r^3}B_2\right], \tag{5}$$

$$\sigma_{t_2} = \frac{E_2}{1-\nu_2-2\nu_2^2}\left[A_2(1+\nu_2) + (1-2\nu_2)\frac{B_2}{r^3}\right]. \tag{6}$$

Ustalamy warunki brzegowe:

$$\sigma_{r_1}\Big|_{r=0} = \sigma_{t_1}\Big|_{r=0}, \tag{7}$$

$$u_1\Big|_{r=a} = u_2\Big|_{r=a} \tag{8}$$

$$\sigma_{r_1}\Big|_{r=a} = \sigma_{r_2}\Big|_{r=a} \tag{9}$$

$$\sigma_{r_2}\Big|_{r=b} = p. \tag{10}$$

Ponieważ z warunku (7) wynika $B_1 = 0$ i wyznaczenie pozostałych stałych sprowadza się do rozwiązania układu trzech równań wyrażających warunki (8 (9) i (10)

$$A_1 a^3 = A_2 a^3 + B_2, \tag{11}$$

$$\frac{E_1}{1-\nu_1-2\nu_1^2}(1+\nu_1)A_1 = \frac{E_2}{1-\nu_2-2\nu_2}\left[(1+\nu_2)A_2 - (1-2\nu_2)\frac{2}{a^3}B_2\right], \tag{12}$$

$$\frac{E_2}{1-\nu_2-2\nu_2}\left[(1+\nu_2)A_2 - (1-2\nu_2)\frac{2}{b^3}B_2\right] = p. \tag{13}$$

Z równań (11), (12), (13) wyznaczamy:

$$A_1 = \frac{p}{E_1}\frac{3\varkappa(1-\nu_2)\beta_1}{2\beta_1+\varkappa(1+\nu_1)(1+\nu_2) - 2\alpha^3\left[\beta_1-\varkappa(1+\nu_1)(1-2\nu_2)\right]}, \tag{14}$$

$$A_2 = \frac{p}{E_2}\frac{\varkappa(1+\nu_1)\beta_2 + 2(1-2\nu_2)\beta_1}{2\beta_1+(1+\nu_1)(1+\nu_2) - 2\alpha^3\left[\beta_1-\varkappa(1+\nu_1)(1-2\nu_2)\right]}, \tag{15}$$

$$B_2 = -\frac{pa^3}{E_2}\frac{\varkappa(1+\nu_1)\beta_2 - (1+\nu_2)\beta_1}{2\beta_1+\varkappa(1+\nu_1)(1+\nu_2) - 2\alpha^3\left[\beta_1-\varkappa(1+\nu_1)(1-2\nu_2)\right]} \tag{16}$$

gdzie:

$$\varkappa = \frac{E_1}{E_2} \qquad \beta_1 = 1-\nu_1-2\nu_1^2 \qquad \beta_2 = 1\nu_2 - 2\nu_2^2 \qquad \alpha = \frac{a}{b}.$$

Po uwzględnieniu wartości stałych (14), (15), (16) wyznaczamy naprężenia

$$\sigma_{r_1} = \sigma_{t_1} = p\frac{3\varkappa(1-\nu_2)(1+\nu_1)}{\varkappa(1+\nu_1)(1+\nu_2) + 2\beta_1 - 2\alpha^3\left[\beta_1-\varkappa(1+\nu_1)(1-2\nu_2)\right]}, \tag{17}$$

$$\sigma_{r_2} = p\frac{\varkappa(1+\nu_1)(1+\nu_2) + 2\beta_1 + 2\frac{a^3}{r^3}\left[\varkappa(1+\nu_1)(1-2\nu_2)-\beta_1\right]}{\varkappa(1+\nu_1)(1+\nu_2) + 2\beta_1 - 2\alpha^3\left[\beta_1-\varkappa(1+\nu_1)(1-2\nu_2)\right]}, \tag{18}$$

$$\sigma_{t_2} = p\frac{\varkappa(1+\nu_1)(1+\nu_2) + 2\beta_1 - \frac{a^3}{r^3}\left[\varkappa(1+\nu_1)(1-2\nu_2)-\beta_1\right]}{\varkappa(1+\nu_1)(1+\nu_2) + 2\beta_1 - 2\alpha^3\left[\beta_1-\varkappa(1+\nu_1)1-2\nu_2)\right]}, \tag{19}$$

i przemieszczenia

$$u_1 = \frac{p}{E_1} \frac{3\varkappa(1-\nu_2)\beta_1 \cdot r}{2\beta_1+\varkappa(1+\nu_1)(1+\nu_2) - 2\alpha^3\left[\beta_1-\varkappa(1+\nu_1)(1-2\nu_2)\right]}, \tag{20}$$

$$u_2 = \frac{p}{E_2} \frac{\left[\varkappa(1+\nu_1)\beta_2 + 2(1-2\nu_2)\beta_1\right] r - \frac{a^3}{r^3}\left[\varkappa(1+\nu_1)\beta_2 - (1+\nu_2)\beta_1\right]}{2\beta_1+\varkappa(1+\nu_1)(1+\nu_2) - 2\alpha^3\left[\beta_1-\varkappa(1+\nu_1)(1-2\nu_2)\right]}. \tag{21}$$

Dla dostatecznie dużego obszaru otaczającego inkluzję ($b \geqslant 6a$) można przyjąć $\alpha = 0$.

Ponadto w przypadku jednakowych wartości współczynników Poissona $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ wzory (17), (18), (19) przyjmują postać:

$$\sigma_{r_1} = \sigma_{t_1} = p \frac{3\varkappa(1-\nu)}{\varkappa(1+\nu) + 2(1-2\nu)} \tag{22}$$

$$\sigma_{r_2} = p\left(1 + 2\frac{a^3}{r^3}\frac{(\varkappa-1)(1-2\nu)}{\varkappa(1+\nu) + 2(1-2\nu)}\right), \tag{23}$$

$$\sigma_{t_2} = p\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\frac{(\varkappa-1)(1-2\nu)}{\varkappa(1+\nu) + 2(1-2\nu)}\right). \tag{24}$$

Jeżeli inkluzja jest sztywna $\varkappa \to \infty$ wzory (17), (18), (19) przyjmą postać

$$\sigma_{r_1} = \sigma_{t_1} = p \frac{3(1-\nu_2)}{(1+\nu_2)}, \tag{25}$$

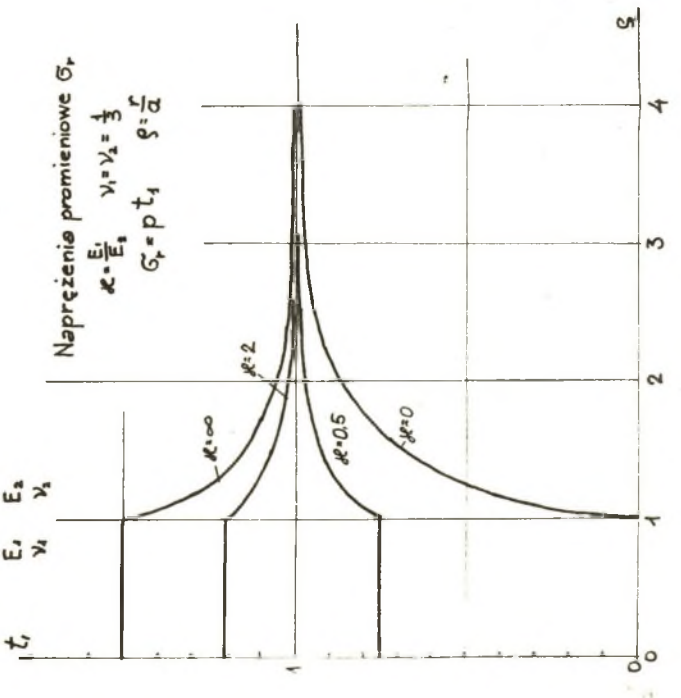
$$\sigma_{r_2} = p\left(1 + 2\frac{a^3}{r^3}\frac{1-2\nu_2}{1+\nu_2}\right), \tag{26}$$

$$\sigma_{t_2} = p\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\frac{1-2\nu_2}{1+\nu_2}\right). \tag{27}$$

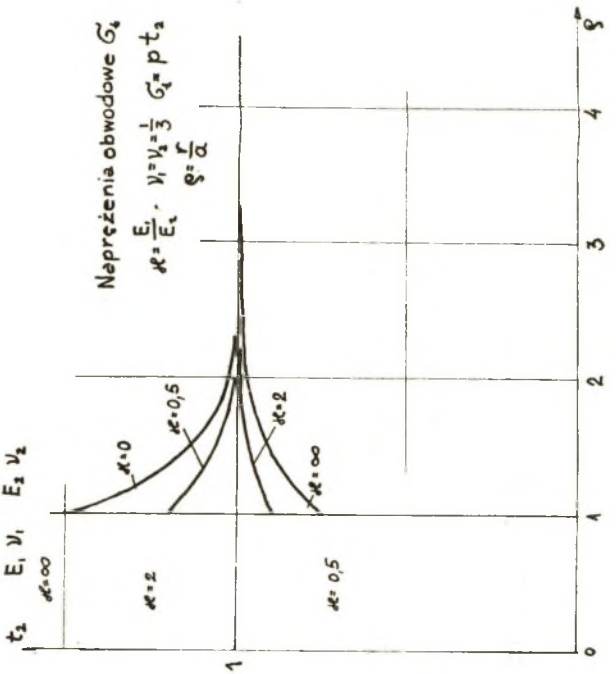
W przypadku otworu kulistego ($\varkappa = 0$)

$$\sigma_{r_1} = \sigma_{t_1} = 0,$$

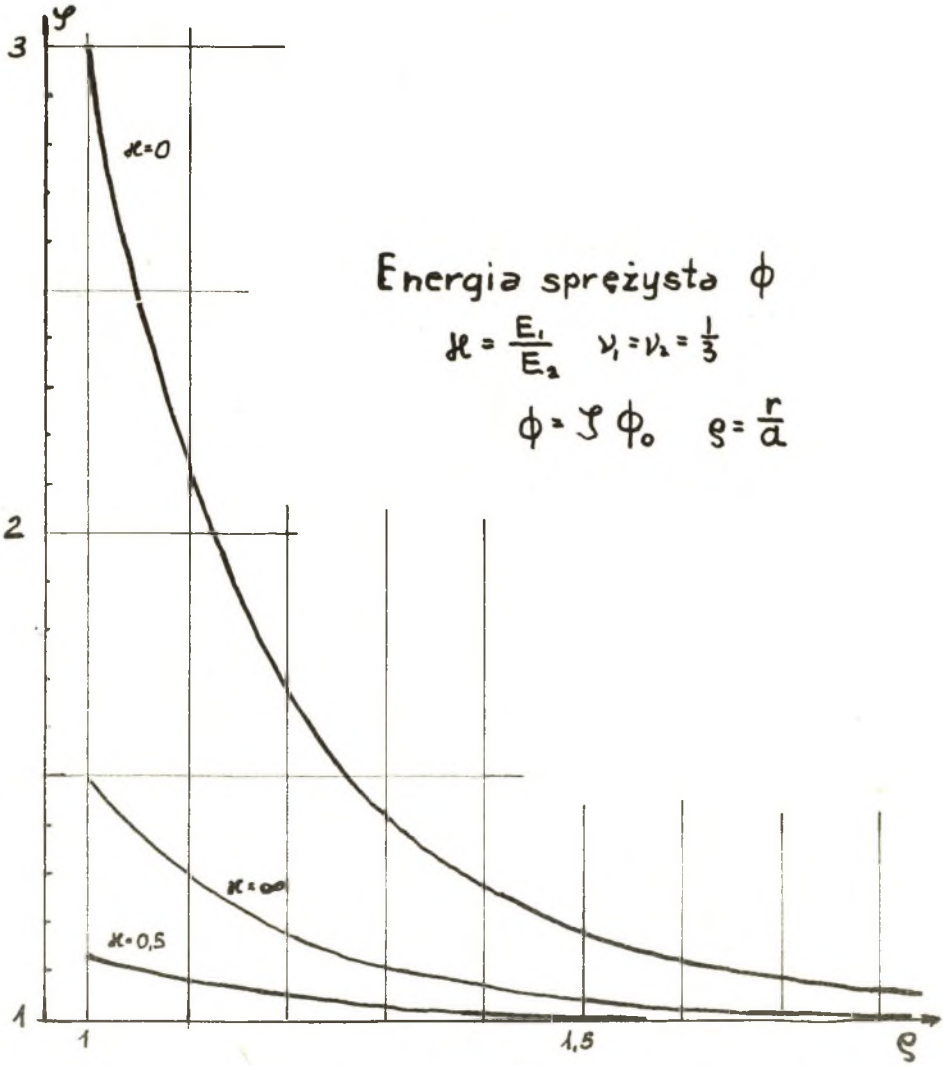
$$\sigma_{r_2} = p\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \qquad \sigma_{t_2} = p\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right).$$


Naprężenia promieniowe σ_r
$\varkappa = \frac{E_1}{E_2}$ $\nu_1 = \nu_2 = \frac{1}{3}$
$\sigma_r = p t_1$ $\rho = \frac{r}{a}$
t_1 E_1 ν_1 E_2 ν_2
$\varkappa = \infty$
$\varkappa = 2$
$\varkappa = 0,5$
$\varkappa = 0$
ρ

Rys. 2


Naprężenia obwodowe σ_t
$\varkappa = \frac{E_1}{E_2}$ $\nu_1 = \nu_2 = \frac{1}{3}$ $\sigma_t = p t_2$
$\rho = \frac{r}{a}$
t_2 E_1 ν_1 E_2 ν_2
$\varkappa = \infty$
$\varkappa = 2$
$\varkappa = 0,5$
$\varkappa = 0$
$\varkappa = 0,5$
$\varkappa = 2$
$\varkappa = \infty$
ρ

Rys. 3



Rys. 4

Na rys. 2 i 3 podano wykresy rozkładu naprężeń σ_r i σ_t dla $\varkappa = \infty$; 2; 0,5; 0 przyjmując $\nu_1 = \nu_2 = \frac{1}{3}$.

Całkowita właściwa energia sprężysta wyrazi się wzorem

$$\Phi = \frac{1}{2E}\left[(\sigma_r + 2\sigma_t)^2 - 2((1+\nu)2\sigma_r\sigma_t + \sigma_t^2)\right].$$

Przy przyjęciu $\alpha = 0$ energia sprężysta właściwa inkluzji wynosi

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{E_2}\,3(1-2\nu_2)\cdot\frac{(1-2\nu_1)}{(1-2\nu_2)}\,\frac{9\varkappa(1-\nu_2)^2}{\left[\varkappa(1+\nu_2)+2(1-2\nu_1)\right]^2}.$$

Energia sprężysta w obszarze 2:

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{E_2}\,3(1-2\nu_2)\left[1+\frac{a^6}{r^6}\,\frac{2(1+\nu_2)}{(1-2\nu_2)}\left(\frac{\varkappa(1-2\nu_2)-(1-2\nu_1)^2}{\varkappa(1+\nu_2)+2(1-2\nu_1)}\right)\right].$$

Właściwa energia sprężysta odkształcenia postaciowego wyrazi się wzorem

$$\Phi_t = \frac{1+\nu_2}{3E_2}\left(\sigma_r^2+\sigma_t^2-2\sigma_r\sigma_t\right).$$

Dla inkluzji

$$\Phi_{f1} = 0,$$

zaś w obszarze 2:

$$\Phi_{f2} = \frac{p^2}{2E_2}\,3(1-2\nu_2)\,\frac{a^6}{r^6}\,\frac{2(1+\nu_2)}{9(1-2\nu_2)}\left(\frac{\varkappa(1-2\nu_2)-(1-2\nu_1)^2}{\varkappa(1+\nu_2)+2(1-2\nu_1)}\right), \tag{30}$$

gdzie:

$\frac{p^2}{2E_2}\,3(1-2\nu_2) = \Phi_0$ – wyraża energię w obszarze jednorodnym równomiernego rozciągania.

Na rys. 4 podano przykładowo wykresy rozkładu właściwej energii sprężystej dla $\varkappa = \infty$; 2; 0,5; 0, $\nu_1 = \nu_2 = \frac{1}{3}$.

LITERATURA

[1] S.P. TIMOSHENKO: Teoria sprężystości, Arkady, Warszawa 1962.

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ЭНЕРГИИ
ВОКРУГ УПРУГОГО ШАРООБРАЗНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Р е з ю м е

В упругой среде, которая равномерно растягивается, находится шарообразное включение. Это включение имеет различные чем среда упругие свойства. Опираясь на известных общих решениях определено напряжения и удельную энергию деформирования вокруг включения и в самом включении.

THE STRESS AND ENERGY CONCENTRATION ROUND
AN ELASTIC SPHERICAL INCLUSION

S u m m a r y

In an elastic medium under the action regular extension there is a spherical inclusion with different elastic properties from those of the centre. Basing on the generally known solutions the state of stress and of the specific strain energy were analysed round the inclusion and in the inclusion itself.