ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Mechanika z. 53 Nr kol. 439

Karol Wyleżych
Instytut Podstaw Konstrukcji Maszyn

NIEKTÓRE SPOSOBY OPISU PEŁZANIA DLA DEWIATOROWEGO STANU NAPRĘŻEŃ LINIOWEGO OŚRODKA LEPKOSPRĘŻYSTEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono analityczne ujęcie przebiegu pełzania dla eksponencjalnej i potęgowej postaci jąder pełzania w przypadku dewiatorowego stanu naprężeń.

1. Wstęp

W celu opisania własności ciał lepkosprężystych w zależności od metody badania, ciała te poddaje się badaniom pełzania, relaksacji, reakcji materiału na obciążenia okresowo zmienne i inne [1-3]. Reologiczne równania stanu tworzywa o budowie łańcuchowej można zapisać równaniami różniczkowymi, wiążącymi naprężenia, odkształcenia i ich pochodne różnych rzędów względem czasu, które mogą być liniowe lub nieliniowe. Bardzo często zamiast równań różniczkowych do opisu rozpatrywanego zjawiska stosuje się zależności o postaci całkowej [4,5].

Podstawą teorii liniowych ciał lepkosprężystych jest zasada superpozycji Boltzmanna stwierdzająca, że odkształcenie wywołane przez różne, przyłożone w czasie obciążenia jest sumą odkształceń wywoływanych przez obciążenia poszczególne.

Liniowymi ośrodkami lepkosprężystymi podlegającymi prawu dziedziczenia przyjęto nazywać ośrodki, których fizyczne zależności między składowymi dewiatora stanu naprężeń s_{ij} a składowymi dewiatora stanu odkształceń ϑ_{ij} można zapisać splotem całkowym

$$\vartheta_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial s_{ij}(t)}{\partial \tau} \Phi(t-\tau)d\tau, \tag{1}$$

lub

$$\vartheta_{ij}(t) = \frac{1}{2G_0}\left[s_{ij}(t) + \int_{-\infty}^{t} \Pi(t-\tau)s_{ij}(\tau)d\tau\right], \tag{2}$$

$$i,j = 1,2,3$$

przedstawiające sobą prawo naprężenie - odkształcenie typu pełzania.

Prawo odwrotne nazywa się prawem naprężenie-odkształcenie typu relaksacyjnego i ma postać

$$s_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial \vartheta_{ij}(t)}{\partial \tau} \psi(t-\tau)d\tau, \tag{3}$$

lub

$$s_{ij}(t) = 2G_o\left[\vartheta_{ij}(t) - \int_{-\infty}^{t} R(t-\tau)\,\vartheta_{ij}(\tau)d\tau\right], \tag{4}$$

gdzie:

$\Phi(t)$, $\psi(t)$ - funkcje pełzania i relaksacji odkształcenia postaciowego,

$\Pi(t)$, $R(t)$ - jądra pełzania i relaksacji odkształcenia postaciowego,

G_o - natychmiastowy moduł odkształcenia postaciowego.

Funkcja i jądro pełzania określają wpływ historii obciążenia w chwili τ na odkształcenie w chwili t, a funkcja i jądro relaksacji określają wpływ historii odkształcenia w chwili τ na naprężenie w chwili t.

Przyjmując, że historia obciążenia nie zaczyna się od $-\infty$ lecz w chwili $t_o = 0_+$, w podanych związkach należy zmienić odpowiednio dolne granice całkowania.

Wykazano [5], że pomiędzy funkcjami określającymi własności reologiczne ośrodka, występują następujące zależności

$$\Pi(t) = 2G_o \frac{d\Phi(t)}{dt}, \tag{5}$$

$$R(t) = -\frac{1}{2G_o}\frac{d\psi(t)}{dt}, \tag{6}$$

$$G_o = \frac{1}{2\Phi(0)} \tag{7}$$

oraz

$$\int_{0}^{t} \Phi(\tau)\,\psi(t-\tau)d\tau = t, \tag{8}$$

$$\Pi(t) = R(t) + \int_{0}^{t} \Pi(\tau)R(t-\tau)d\tau, \tag{9}$$

Równania (8) i (9) są odpowiednio równaniami Volterry I i II rodzaju.

2. Funkcja pełzania przy skręcaniu walca cienkościennego oraz walca pełnego jako przypadki odkształcenia postaciowego

Wiadomo, że tensor odkształceń ε_{ij} można rozłożyć na dwa tensory: dewiator stanu odkształceń ϑ_{ij} oraz kulisty tensor odkształceń $e\delta_{ij}$ w następujący sposób

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij} - e\delta_{ij}) + e\delta_{ij}, \tag{10}$$

lub w zapisie macierzowym

$$\| \varepsilon_{ij} \| = \| \varepsilon_{ij} - e\delta_{ij} \| + \| e\delta_{ij} \|, \tag{11}$$

gdzie:

e - średnie odkształcenie objętościowe,

δ_{ij} - symbol Kroneckera, zdefiniowany jako

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = j \\ 0 & \text{dla} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Skręcanie walca cienkościennego lub walca pełnego pozwala na, realizację dewiatorowego stanu naprężenia, (tzw. proste ścinanie), przy czym w pierwszym przypadku osiągany jest praktycznie jednorodny a w drugim przypadku niejednorodny rozkład naprężeń stycznych.

Odkształcenie postaciowe i odpowiadające im składowe tensora naprężeń odpowiednio dla walca cienkościennego i walca pełnego (układ współrzędnych walcowych) wynoszą

$$\gamma = 2\varepsilon_{12}, \qquad s_{12} = \sigma_{12}, \tag{12}$$

$$\gamma = 2\varepsilon_{z\varphi}, \qquad s_{z\varphi} = \sigma_{z\varphi}. \tag{13}$$

Przykładając na wolnym brzegu walca parę sił zgodnie z osią pręta o stałym w czasie momencie skręcającym $M_s = M_s(t) = \text{const}$, to stan naprężenia będzie także wielkością stałą.

Z warunku równowagi dla walca cienkościennego [6] otrzymuje się

$$\sigma_{12}(t) = \frac{2\, M_s(t)}{\pi g (R_1 + R_2)^2}, \tag{14}$$

dla walca pełnego

$$\sigma_{z\varphi}(t) = \frac{2M_s(t)}{\pi R^3}, \tag{15}$$

gdzie:

$g = (R_2 - R_1)$ - grubość ścianki walca,

R_1, R_2 - promień wewnętrzny i zewnętrzny walca cienkościennego,

R - promień walca pełnego.

Funkcję pełzania odkształcenia postaciowego przy skręcaniu walca cienkościennego otrzymuje się [6] korzystając ze wzoru

$$\Phi(t) = \frac{\pi R_2 g (R_1 + R_2)^2}{4l\, M_s(0)} \varphi(l,t), \tag{16}$$

a przy skręcaniu walca pełnego

$$\Phi(t) = \frac{\pi R^4}{4l\, M_s(0)} \varphi(l,t), \tag{17}$$

gdzie $\varphi(l,t)$ jest przemieszczeniem kątowym wolnego brzegu próbki w czasie pełzania.

3. Ujęcie analityczne przebiegu pełzania

Do wyznaczenia całkowitych składowych dewiatora stanu odkształceń można wykorzystać np. równanie (2), otrzymując przy $s_{ij}(t) = s_{ij}(0) = \text{const}$

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{s_{ij}(0)}{2G_0} + \frac{s_{ij}(0)}{2G_0} \int_0^t \Pi(t-\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

gdzie pierwszy składnik przedstawia składowe odkształcenia natychmiastowego $\varepsilon_{ij}(0)$, a drugi składowe odkształcenia opóźnionego.

Przyjmijmy dla odtworzenia zachowania się ośrodka lepkosprężystego eksponencjalną oraz potęgową postać jądra pełzania

$$\Pi(t) = Ae^{-Bt}, \tag{19}$$

$$\Pi(t) = Ct^{(\alpha-1)}, \tag{20}$$

którym na podstawie (5) uwzględniając (7) odpowiadają funkcje pełzania w postaci

$$\Phi(t) = D + F(1 - e^{-Bt}), \tag{21}$$

oraz

$$\Phi(t) = M + Nt^{\alpha}, \tag{22}$$

gdzie odpowiednie stałe zależne są od warunków pomiarów.

Jądro pełzania o postaci (20) zwane jest w literaturze jądrem Duffinga [5].

Po podstawieniu kolejno (19) i (20) do równania (18) otrzymuje się odpowiednio całkowite składowe dewiatora stanu odkształceń w następujących postaciach

$$\vartheta_{ij}(t) = \vartheta_{ij}(0) + K_1(1 - e^{-Bt}), \tag{23}$$

oraz

$$\vartheta_{ij}(t) = \vartheta_{ij}(0) + K_2 t^{\alpha}, \tag{24}$$

gdzie

$$K_1 = \frac{A\, s_{ij}(0)}{2G_o B}, \quad K_2 = \frac{C\, s_{ij}(0)}{2G_o \alpha}.$$

Prędkość pełzania określona zależnością

$$\dot{\vartheta}_{ij}(t) = \frac{d\vartheta_{ij}(t)}{dt}, \tag{25}$$

dla poszczególnych jąder pełzania ma postać

$$\dot{\vartheta}_{ij}(t) = \vartheta_{ij}(0) A e^{-Bt}, \tag{26}$$

$$\dot{\vartheta}_{ij}(t) = \vartheta_{ij}(0) C\, t^{(\alpha-1)}. \tag{27}$$

Jeśli wyniki pomiarów przemieszczenia kątowego walca cienkościennego lub walca pełnego, obciążonego na wolnym brzegu stałym w czasie momentem skręcającym, a uwzględniając (16) i (17) funkcje pełzania odkształcenia postaciowego, można aproksymować krzywymi o równaniach (21) lub (22), wte-

dy, sam przebieg pełzania - odkształcanie postaciowe w funkcji czasu opisuje się odpowiednio równaniami (23) i (24).

Na podstawie obliczonych wg wzorów (26) i (27) prędkości pełzania można m.in. wnioskować, czy w zakresie stosowanych w badaniach czasów, proces pełzania jest ustalony lub nieustalony.

LITERATURA

[1] J.T. PINDERA: Reologiczne własności materiałów modelowych, WNT, Warszawa, 1962.

[2] J.D. FERRY: Lepkosprężystość polimerów, WNT, Warszawa, 1965.

[3] M. SHEN i inni: Viscoelastic Relaxation in Polymers, Wiley, New York, 1971.

[4] A.A. ILJUSZIN, B.E. POBEDRJA: Osnovy matematičeskoj teorii termovjazko-uprugosti, Nauka, Moskva, 1970.

[5] W.W. MOSKVITIN: Soprotivlenie vjazko-uprugich materiałov, Nauka, Moskva, 1972.

[6] K. WYLEŻYCH: Dysertacja doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1974.

НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЕВИАТОРНОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Р е з ю м е

В работе даётся аналитический подход к течению ползучести для экспоненциального и степенного вида ядра ползучести в случае девиаторного напряжённого состояния.

SOME MEANS OF CREEP SPECIFICATION FOR THE LINEAR VISCUOUS-ELASTIC MEDIUM STRAINED STATE DEVIATOR

S u m m a r y

The paper presents analitically creeping for exponential and power forms of creep cores in strained state deviators.