

Józef Wojnarowski
Jan Tunk

Instytut Podstaw Konstrukcji Maszyn

PRÓBA DOŚWIADCZALNEGO OKREŚLANIA OBSZARÓW STATECZNOŚCI

Streszczenie. W pracy przedstawiono konstrukcję stanowiska do wyznaczania granic obszarów stateczności ruchu pręta dwuprzegubowego, wzbudzanego harmonicznie zmienną siłą osiową.

Wstęp

Podczas prowadzenia identyfikacji drgań układu, można spotkać przypadek, kiedy oddziaływanie zewnętrznych zmiennych sił lub przyspieszeń pociąga za sobą zmianę w czasie jednego lub kilku parametrów układu, występujących jako współczynniki równania różniczkowego ruchu. Mówimy wówczas o parametrycznym wzbudzeniu drgań [1].

W układach drgających o wzbudzeniu parametrycznym, czynnik zewnętrzny zmieniając parametr układu może w pewnych warunkach doprowadzać okresowo energię do układu a tym samym spowodować nieograniczony wzrost z czasem wartości amplitudy. Występuje wówczas tzw. rezonans parametryczny [2].

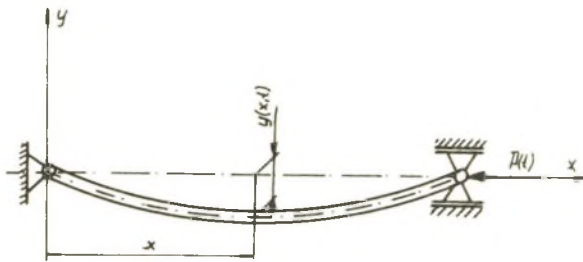
Z technicznego punktu widzenia analiza drgań parametrycznych sprowadza się do wyznaczenia obszarów stateczności, tj. obszarów, w których dla pewnych wartości parametrów układu, rozwiązanie równania ruchu drgającego pozostaje ograniczone przy $t \rightarrow \infty$.

W pracy podjęto próbę doświadczalnego wyznaczenia obszarów stateczności dla pręta dwuprzegubowego, między innymi dlatego, że w literaturze odczuwa się brak informacji odnośnie technicznej realizacji tego zagadnienia. Skonstruowane i wykonane stanowisko umożliwiające wzbudzenie parametryczne dla różnych wartości liczby pulsacji μ pozwala na ilościową ocenę wpływu strat na obszary stateczności.

Drgania poprzeczne pręta wymuszone działaniem siły podłużnej

Rozważmy dwuprzegubowy pręt przyrzmatyczny (rys. 1) wzbudzany harmoniczną siłą osiową $P(t)$

$$P(t) = P_0 + P_A \cos \omega t, \quad (1)$$



Rys. 1

Idealizacja sposobu podparcia pręta pozwala na następujące sformułowanie warunków brzegowych,

$$\text{dla } x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

$$x = l, \quad y = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

W przypadku dynamicznego obciążenia pręta siłami o natężeniu

$$q(x,t) = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - P(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (3)$$

równanie różniczkowe drgań poprzecznych pręta można sprowadzić do postaci [3]

$$\ddot{f}_n(t) + \Omega_n^2 (1 - \mu \cos \omega t) \cdot f_n(t) = 0 \quad (4)$$

gdzie:

$$\Omega_n = \lambda_n \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_E}} - \text{częstość drgań swobodnych pręta ściskanego siłą } P_0 < P_E, \quad (5)$$

$$\mu = \frac{P_A}{P_E - P_0} - \text{liczba pulsacji} \quad (6)$$

$$\frac{n^2 \pi^2}{1^2} \cdot EI = P_E \quad - \text{ statyczne obciążenie krytyczne} \quad (7)$$

$$\frac{n^4 \pi^4}{m \cdot 1^4} \cdot EI = \lambda_n^2 \quad - \text{ częstota drgań swobodnych gdy nie ma działania sił podłużnych} \quad (8)$$

Wprowadzając do równania (10) bezwymiarowy parametr ζ i analizując układ przy częstoci podstawowej $n = 1$ przekształcamy otrzymane równanie typu Mathieu do postaci:

$$\ddot{f}(\zeta) + (a - q \cos \zeta) \cdot f(\zeta) = 0, \quad (9)$$

gdzie:

$$a = \frac{\lambda_1^2}{\theta^2} \left(1 - \frac{P_0}{P_E}\right), \quad q = \frac{\lambda_1^2}{\theta^2} \left(1 - \frac{P_A}{P_E}\right) \quad (10)$$

Analityczne ujęcie obszarów stateczności

Teoretyczna analiza drgań parametrycznych prowadzi do wyznaczenia obszarów stateczności rozwiązania równania drgań poprzecznych pręta (9). Wykorzystując płaszczyznę parametrów (a, q) granice obszarów stateczności zgodnie z [4] można zapisać w postaci:

- pierwszy obszar niestateczny

$$1 - \frac{1}{12} q^2 < a < 1 + \frac{5}{12} q^2; \quad (11)$$

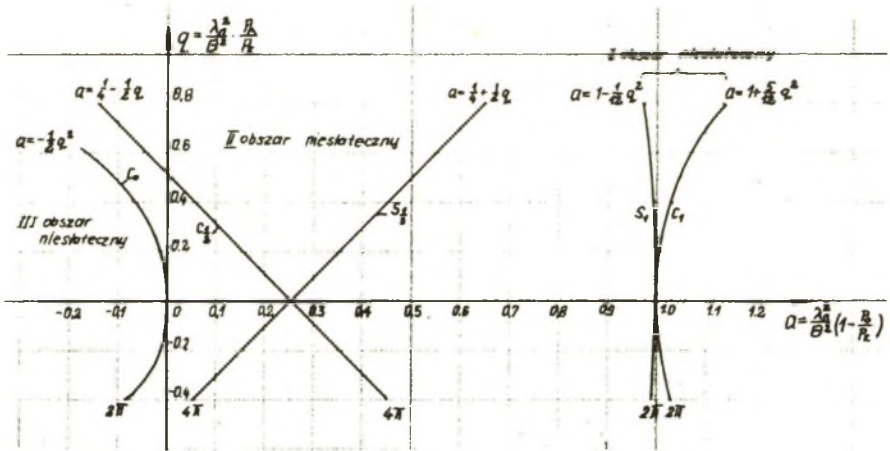
- drugi obszar niestateczny

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} q < a < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} q; \quad (12)$$

- trzeci obszar niestateczny

$$a < -\frac{1}{2} q^2 \quad (13)$$

Interpretację geometryczną obszarów (11), (12) i (13) pokazano na rysunku 2.

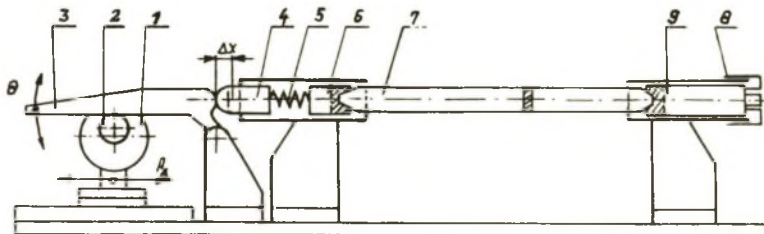


Rys. 2

W przypadku występowania w układzie tłumienia, obszary niestateczne dla danego "a" przesunięte są do wyższych wartości parametru "q" [5]. Dokładne określenie rzeczywistych dwóch obszarów niestatecznych jest możliwe na drodze eksperymentalnej.

Konstrukcja i opis działania stanowiska do doświadczalnego wyznaczania obszarów stateczności drgań parametrycznych

Dla realizacji drgań parametrycznych i próby doświadczalnego określania obszarów rezonansu parametrycznego pręta dwuprzegumowego obciążonego harmoniczną siłą osiową, skonstruowano i wykonano stanowisko pomiarowe (rysunek 3).



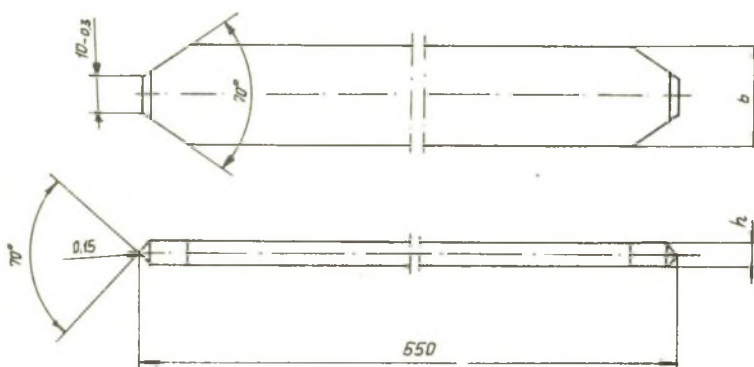
Rys. 3

Silnik 1 napędza przez przekładnię pasową wałek mimośrodowy 2. Obrót mimośrodowy powoduje zmianę ruchu obrotowego na ruch posuwisto zwrotny. Przemieszczenie Δx , spowodowane ruchem dźwigni 3, przeniesione jest przez trzpień 4 na sprężynę 5, która akumulując energię tego ruchu oddziałuje z siłą P_A poprzez uchwyt 6 na badany pręt 7. Obrót nakrętki 8, poprzez uchwyt 9 wywołuje siłę ściskającą P_0 przenoszona na sprężynę 5 przez pręt 7.

Przebieg badań

Przedmiot badań

Przedmiotem badań są dwa pręty o przekroju prostokątnym (rys. 4) i cechach geometrycznych zapewniających znacznie różniącą się sztywność poprzeczną w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach tabl. 1.



Rys. 4

Tablica 1

Cechy geometryczne badanych prętów

Nr pręta	h [mm]	b [mm]	EI_x [kGcm ²]	EI_y [kGcm ²]
1	$2,75_{-0,02}$	$24,0^{+0,2}$	665280,0	8715,0
2	$2,55^{+0,02}$	$29,0_{-0,2}$	1088358,6	8568,0

Wyznaczenie obszarów dynamicznej niestateczności

Ze względu na to, że badania doświadczalne oraz analityczne określenia obszarów dynamicznej niestateczności prowadzono w układzie $P_o = P_o(P_A, \omega)$, traktując ω jako stały parametr, równania (11), (12) i (13) przy uwzględnieniu zależności (10) sprowadzono do postaci:

- pierwszy obszar niestateczny

$$P_E \left[1 - \left(\frac{\omega}{\lambda_1} \right)^2 \right] - \frac{5}{12} \left(\frac{\lambda_1}{\omega} \right)^2 \frac{P_A^2}{P_E} < P_o < P_E \left[1 - \left(\frac{\omega}{\lambda_1} \right)^2 \right] + \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda_1}{\omega} \right)^2 \cdot \frac{P_A^2}{P_E} \quad (14)$$

- drugi obszar niestateczny

$$P_E \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{\lambda_1} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} P_A < P_o < P_E \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{\lambda_1} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} P_A \quad (15)$$

- trzeci obszar niestateczny

$$P_o > P_E + \frac{\lambda_1^2}{\omega} \cdot \frac{P_A^2}{2 P_E} \quad (16)$$

Doświadczalne określenie obszarów dynamicznej niestateczności

Badania obszarów dynamicznej niestateczności przeprowadzono przy ustalonych kolejno P_A , a zmiennym P_o . Dla każdego z badanych prętów przyjęto dwie wartości obrotów "n".

$$\begin{aligned} n_1 &= 900 \left[\frac{\text{obr}}{\text{min}} \right] & n_2 &= 1300 \left[\frac{\text{obr}}{\text{min}} \right] \\ \omega_1 &= 94 \left[\text{s}^{-1} \right] & \omega_2 &= 136 \left[\text{s}^{-1} \right] \end{aligned}$$

Dla określonej wartości liczby obrotów "n" dobierano kolejno $P_A = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10$ kG, zmieniając P_o od $P_o \text{ min} = P_A$ do $P_o \text{ max} = 32$ [kG] obserwując przebieg drgań na ekranie oscyloskopu ORION EMG typu 1538/B.

W przypadku pojawienia się przebiegu odpowiadającego utracie przez pręt stateczności rejestrowano wartości P_o . Wyniki badań podano w tabelicy 3 a ich geometryczną interpretację przedstawiono na rys. 5, 6, 7 i 8.

Tablica 2

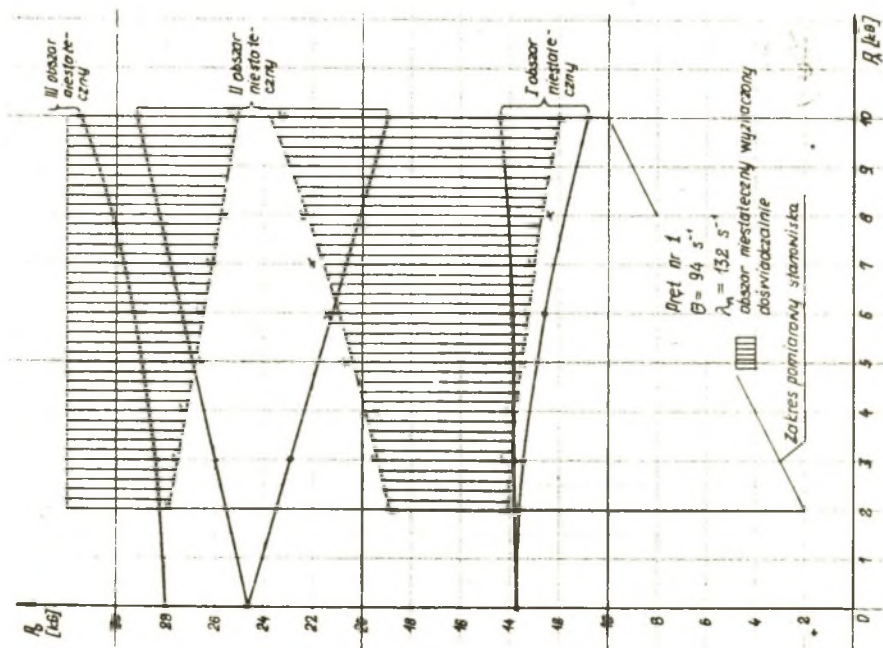
Zestawienie wyników numerycznej analizy obszarów niestatecznych

Nr próba	λ_1 [s ⁻¹]	B [s ⁻¹]	oznaczenie obszaru niestatecznego	P_E [kg]	R_A [kg]	R_B [kg]	0	3	6	10
1	132	94	1	28	/	/	13,7	13,5 ÷ 13,8	12,7 ÷ 13,9	10,8 ÷ 14,4
			2				24,7	22,9 ÷ 26,0	21,2 ÷ 27,3	19,0 ÷ 29,2
			3				28,0	> 28,32	> 29,3	> 31,4
		136	1	28	/	/	-1,7	-1,8 ÷ -1,7	-2,2 ÷ -1,6	-3,1 ÷ -1,4
			2				20,7	19,1 ÷ 22,1	11,6 ÷ 23,6	15,6 ÷ 25,6
			3				28,0	> 28,2	> 28,6	> 29,7
2	123	94	1	28	/	/	11,6	11,4 ÷ 11,7	10,7 ÷ 11,9	9,1 ÷ 12,8
			2				23,9	22,4 ÷ 25,4	20,9 ÷ 26,9	18,9 ÷ 28,9
			3				28,0	> 28,3	> 29,0	> 31,0
		136	1	28	/	/	-6,2	-6,3 ÷ -6,1	-6,6 ÷ -6,0	-7,4 ÷ -5,9
			2				8,5	7,0 ÷ 10,0	5,5 ÷ 11,5	3,5 ÷ 13,5
			3				28,0	> 28,1	> 28,5	> 29,5

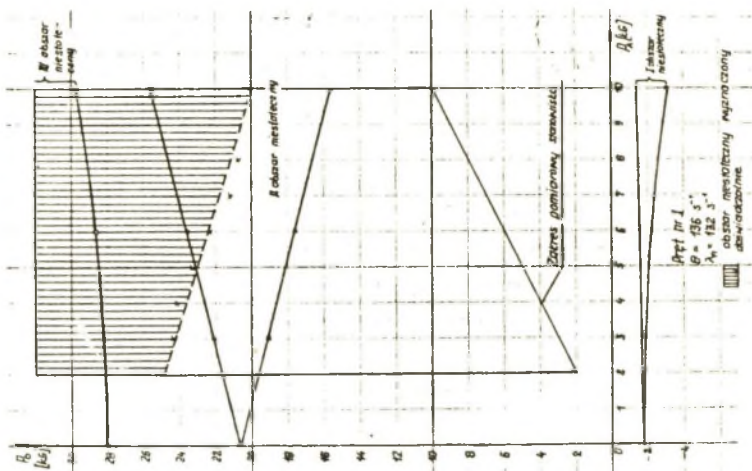
Tablica 3

Zestawienie wyników doświadczalnej analizy obszarów niestatecznych

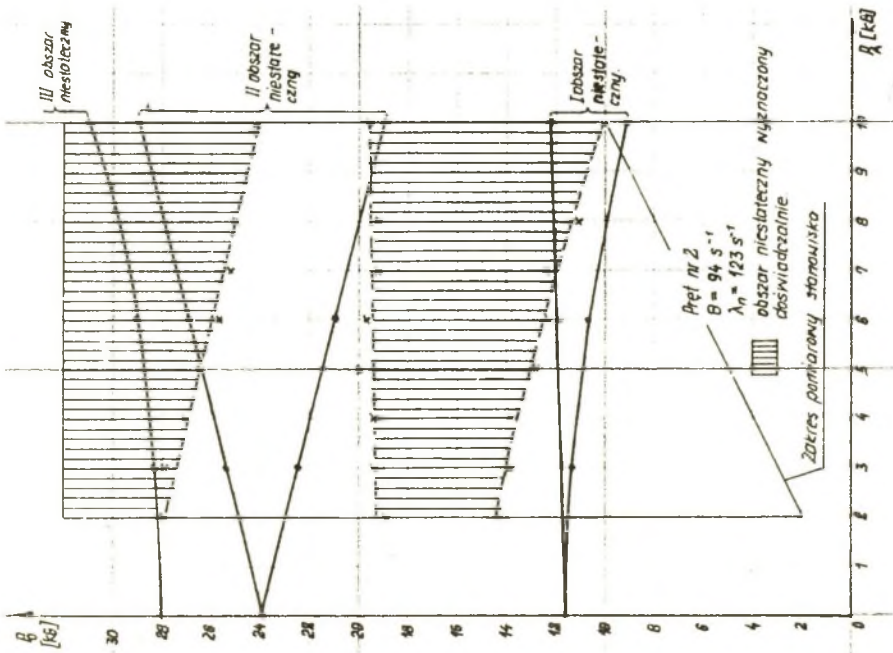
Nr próba	P_E [kg]	λ_1 [s ⁻¹]	B [s ⁻¹]	R_A [kg]	R_B [kg]	2	3	4	5	6	7	8	10
1	28	132	94	/	/	13,7 ÷ 18,8	14,3 ÷ 19,5	14,0 ÷ 19,5	13,5 ÷ 20,8	13,3 ÷ 21,4	13,1 ÷ 22,0	12,4 ÷ 22,4	11,9 ÷ 23,3
						27,9 ÷ 32,0	27,6 ÷ 32,0	27,3 ÷ 32,0	26,5 ÷ 32,0	26,6 ÷ 32,0	26,2 ÷ 32,0	25,6 ÷ 32,0	25,4 ÷ 32,0
1	28	132	136	/	/	25,0 ÷ 32,0	24,4 ÷ 32,0	24,2 ÷ 32,0	23,3 ÷ 32,0	22,3 ÷ 32,0	21,2 ÷ 32,0	20,7 ÷ 32,0	20,0 ÷ 32,0
2	28	123	94	/	/	14,3 ÷ 18,9	13,0 ÷ 19,4	13,8 ÷ 19,4	12,8 ÷ 20,0	12,3 ÷ 19,7	12,4 ÷ 19,2	11,0 ÷ 19,8	10,0 ÷ 19,5
						27,9 ÷ 32,0	27,9 ÷ 32,0	27,1 ÷ 32,0	25,5 ÷ 32,0	25,7 ÷ 32,0	25,2 ÷ 32,0	25,0 ÷ 32,0	24,2 ÷ 32,0
2	28	123	136	/	/	23,2 ÷ 32,0	23,8 ÷ 32,0	22,8 ÷ 32,0	21,7 ÷ 32,0	21,9 ÷ 32,0	21,2 ÷ 32,0	20,7 ÷ 32,0	19,4 ÷ 32,0



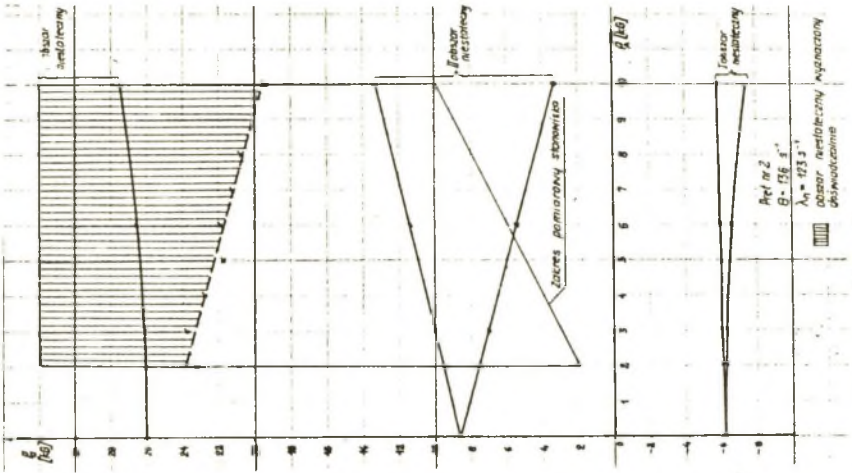
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Wnioski

Z przeprowadzonej analizy wynikają następujące wnioski:

- Przy identyfikacji drgań układu można wyodrębnić drgania o wzbudzeniu parametrycznym.
- Analiza drgań parametrycznych sprowadza się do wyznaczenia obszarów stateczności ruchu drgającego.
- Obszary niestateczne uzyskane z analizy doświadczalnej są przesunięte do wyższych wartości parametru " P_0 " w układzie (P_0, P_A) względem obszarów wyznaczonych analitycznie.
- Obszary niestateczne uzyskane z analizy doświadczalnej są przesunięte do niższych wartości parametru " a " w układzie (a, q) względem obszarów wyznaczonych analitycznie.
- Ze wzrostem sztywności EI maleje wpływ tłumienia w układzie na przesunięcie obszarów niestatecznych, wyznaczonych analitycznie i doświadczalnie.

LITERATURA

- [1] KALISKI S.: Drgania i fale w ciałach stałych. WNT, W-wa, 1966.
- [2] PANOWKO I.G.: Wiedzieinie w teorju mechaniczskich kolebanij, Nauka, Moskwa, 1971.
- [3] ZIEMBA St.: Analiza drgań, cz. II, PWN, W-wa, 1959.
- [4] CUNNINGHAM W.I.: Analiza układów nieliniowych, WNT, W-wa, 1962.
- [5] CHICHIRO HAYASHI: Drgania nieliniowe w układach fizycznych, WNT, W-wa, 1968.

ПОПЫТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ЗОН УСТОЙЧИВОСТИ

Резюме

В работе описывается конструкция поста для определения пределов зон устойчивости движения двухшарнирного прутка, гармонически возбуждаемого переменным осевым усилием.

AN ATTEMPT OF EXPERIMENTAL DETERMINATION OF
THE STABILITY REGIONS

S u m m a r y

In the paper the stand construction for the limit stability regions determination of the bjointed rod motion excited harmonically by an changeable axial force was talked over.