ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Mechanika z. 53 Nr kol. 439

Remigiusz Ćwik

Instytut Podstaw Konstrukcji Maszyn

OPTYMALIZACJA PRZEKROJU SKRZYNKOWEGO O JEDNAKOWEJ GRUBOŚCI ŚCIANEK BELEK ZGINANYCH Z UWZGLĘDNIENIEM WŁASNOŚCI SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH TWORZYWA

Streszczenie. W pracy określono optymalne wymiary przekroju poprzecznego belek przy czystym zginaniu w zakresie niesprężystym. Jako kryterium przyjęto minimalny ciężar belek, przy jednoczesnym spełnieniu warunku wytrzymałości i stateczności miejscowej ścianek.

1. Wstęp

Podane w pracy [1] wzory określające optymalne parametry przekroju skrzynkowego o jednakowej grubości ścianek, przy przyjęciu jako kryterium optymalizacji minimalny ciężar belki, wyprowadzone zostały przy założeniu ważności prawa Hooke'a, a więc dla $\sigma \leq R_H$.

W płytach cienkich, za które uważa się ścianki belki, wykonanych z materiału o dużej granicy sprężystości, naprężenia krytyczne leżą w obszarze sprężystym. Natomiast w płytach grubszych o małej granicy sprężystości, naprężenia krytyczne znaleźć się mogą w obszarze sprężysto-plastycznym. Do materiałów o małej granicy sprężystości należą m.in. stopy aluminium, dla których $R_H \approx 0,5\ R_{0,2}$ [2].

W pracy podano propozycję określenia optymalnych parametrów przekroju belek w przypadku, kiedy naprężenia krytyczne będą większe od granicy sprężystości. Utrzymane zostaną podstawowe założenia optymalizacji, podane w pracy [1], z tym, że odniesione one zostaną do zakresu niesprężystego.

2. Naprężenia krytyczne w zakresie niesprężystym

Wartość naprężeń krytycznych w zakresie niesprężystym określona została wzorem [3]:

$$\sigma_k = k\,\frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{g}{b}\right)^2\sqrt{\varphi} \qquad (1)$$

gdzie

$$\psi = \frac{(R_e - \sigma_k)\,\sigma_k}{(R_e - R_H)\,R_H}, \tag{2}$$

k - współczynnik wybrzuszenia płyty,

E - moduł sprężystości podłużnej (Younga),

ν - współczynnik Poissona,

R_e - granica plastyczności,

R_H - granica sprężystości,

g - grubość płyty,

b - szerokość płyty.

Podstawiając (2) do (1) otrzymuje się:

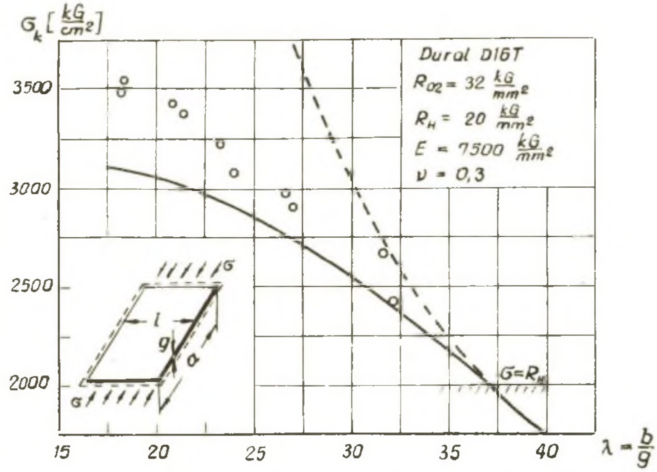
$$\sigma_k = \frac{R_e}{1 + \frac{D}{k^2}\left(\frac{b}{g}\right)^4}, \tag{3}$$

gdzie:

$$D = \left[\frac{12(1 - \nu^2)}{\pi^2 E}\right]^2 (R_e - R_H)\,R_H \tag{4}$$

Na rys. 1 przedstawiono zależność między krytycznymi naprężeniami w zakresie niesprężystym σ_k, a stosunkiem $\frac{b}{g}$ dla płyty długiej ze stopu aluminiowego D16T, podpartej przegubowo na brzegach, poddanej ściskaniu w jednym kierunku [4].

Wyznaczone wg wzoru (3) i doświadczalnie wartości naprężeń krytycznych jak widać wykazują dostateczną zgodność.

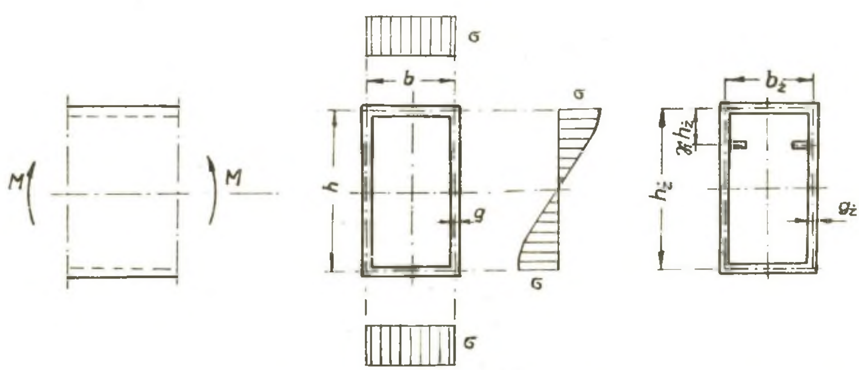


Rys. 1. Naprężenia krytyczne dla płyty z duralu obciążonej układem stałych naprężeń ściskających

- - - wg równania $\sigma_k = k\ \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{b}{g}\right)^2$ (hiperbola Eulera);

——— wg równania $\sigma_k = k\ \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{b}{g}\right)^2 \sqrt{\psi}$

o wartości doświadczalne



Rys. 2. Obciążenie i przekrój elementu belki przy czystym zginaniu

3. Warunki wymiarowania

a) warunek ekonomiczności: minimum ciężaru lub pola przekroju (rys. 2):

$$F = 2g(b + h) = \min \tag{5}$$

b) warunek wytrzymałości

$$\sigma = \sigma_b = \sigma_h = \frac{M}{gbh + \frac{1}{3}gh^2} \leqslant R, \tag{6}$$

gdzie:

$$R = \frac{R_e}{z}, \tag{7}$$

M - moment zginający,

σ - naprężenie obliczeniowe (σ_b - dla pasa, σ_h - dla stójki),

R - naprężenia bezpieczne (dopuszczalne lub graniczne),

z - liczba pewności przy wymiarowaniu na wytrzymałość;

c) warunek miejscowej stateczności dla pasów

$$\sigma_{kb} = \frac{R_e}{1 + \frac{D}{k_b^2}\left(\frac{b}{g}\right)^4} \geqslant \sigma n \tag{8}$$

dla stójek

$$\sigma_{kh} = \frac{R_e}{1 + \frac{D}{k_h^2}\left(\frac{h}{g}\right)^4} \geqslant \sigma n \tag{9}$$

gdzie:

n - liczba pewności przy stateczności miejscowej.

Współczynniki wyboczenia dla płyt długich podpartych przegubowo: $k_b = 4$, $k_h = 23{,}9$.

Przy żądaniu jednoczesnej utraty stateczności pasów i stójek tzn. dla

$$\frac{\sigma_{kb}}{\sigma_{kh}} = 1. \qquad (10)$$

Z równań (8) do (10) otrzymuje się

$$\frac{b}{h} = \sqrt{\frac{k_b}{k_h}} = \sqrt{\varkappa} \qquad (11)$$

4. Optymalne parametry przekroju

Ograniczając się do znaku równości i kładąc w równaniach: (8) i (9) $\sigma = R$, z równań (4) do (11), otrzymuje się parametry przekroju:

- grubość ścianek

$$g = \sqrt[6]{\frac{(R_e - R_H)\,R_H}{\frac{z}{n} - 1}}\;\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{\varkappa} + \frac{1}{3}}\;\frac{12(1-\nu^2)}{k_h \pi^2 E}\;\frac{Mz}{R_e}}, \qquad (12)$$

wysokość

$$h = \sqrt[12]{\frac{\frac{z}{n} - 1}{(R_e - R_H)\,R_H}}\;\sqrt[6]{\frac{1}{(\sqrt{\varkappa} + \frac{1}{3})^2}\;\frac{k_h \pi^2 E}{12(1-\nu^2)}\;\frac{M^2 z^2}{R_e^2}}, \qquad (13)$$

szerokość

$$b = \sqrt[12]{\frac{\frac{z}{n} - 1}{(R_e - R_H)\,R_H}}\;\sqrt[6]{\frac{\varkappa^3}{(\sqrt{\varkappa} + \frac{1}{3})^2}\;\frac{k_h \pi^2 E}{12(1-\nu^2)}\;\frac{M^2 z^2}{R_e^2}}, \qquad (14)$$

oraz wielkości statyczne przekroju:

- pole przekroju

$$F = 2(\sqrt{\varkappa} + 1)\;\sqrt[12]{\frac{(R_e - R_H)\,R_H}{\frac{z}{n} - 1}}\;\sqrt[6]{\frac{1}{(\sqrt{\varkappa} + \frac{1}{3})^4}\;\frac{12(1-\nu^2)}{k_h \pi^2 E}\;\frac{M^4 z^4}{R_e^4}}, \qquad (15)$$

oraz moment bezwładności pola przekroju

$$I_x = \frac{1}{2}\sqrt[12]{\frac{\frac{z}{n}-1}{(R_e-R_H)\,R_H}}\sqrt[6]{\frac{1}{(\sqrt{\varkappa}+\frac{1}{3})^2}\;\frac{k_h\pi^2E}{12(1-\nu^2)}\;\frac{M^8z^8}{R_e^8}}. \tag{16}$$

Odpowiednio stosunki wymiarowe przekroju wynoszą:

$$\frac{h}{g} = \sqrt[4]{\frac{\frac{z}{n}-1}{(R_e-R_H)\,R_H}\left[\frac{k_h\pi^2E}{12(1-\nu^2)}\right]^2} \tag{17}$$

$$\frac{b}{g} = \sqrt[4]{\frac{\frac{z}{n}-1}{(R_e-R_H)\,R_H}\left[\frac{k_b\pi^2E}{12(1-\nu^2)}\right]^2}, \tag{18}$$

$$\frac{b}{h} = \sqrt{\varkappa} \tag{19}$$

Zastępując w podanych wzorach k_h przez $\frac{k_{h1}}{\delta_1^2}$, a przez $\varkappa_z = \delta_1^2\,\frac{k_b}{k_{h1}}$

otrzymuje się optymalne parametry przekroju z żebrem podłużnym w stójce (rys. 2); tutaj δ_1 - jest współczynnikiem określającym położenie żebra, a k_{h1} - współczynnikiem wybrzuszenia dla płyty leżącej nad żebrem.

5. Optymalne parametry przekroju z uwzględnieniem ciężaru własnego

Wyznaczenie parametrów przekroju elementu zginanego rozpatrzono dla belki jednoprzęsłowej statycznie wyznaczalnej, o stałym przekroju. Moment zginający w belce

$$M = M_p + M_q = M_p + \frac{F\,\gamma_q\,\varphi L^2}{8}, \tag{20}$$

gdzie:

M_p - moment od obciążeń skupionych,

M_q - moment od ciężaru własnego belki,

γ_q - ciężar właściwy belki,

φ - współczynnik konstrukcyjny, uwzględniający zwiększenie ciężaru teoretycznego przez żebra, spoiny itp., dla belek można przyjmować $\varphi = 1,15 \div 1,20$.

Wykorzystując równania (5), (6), (7), (12)÷(15) z równania (20) otrzymuje się grubość stójki:

$$g^3 - \frac{\sqrt{\varkappa}+1}{\sqrt{\varkappa}+\frac{1}{3}} \sqrt[4]{\frac{(R_e - R_H)\,R_H}{\frac{z}{n}-1}} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{k_h \pi^2 E}} \frac{z\,\gamma_q\,\varphi L^2}{4\,R_e} g^2 -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\varkappa}+\frac{1}{3}} \sqrt[4]{\frac{(R_e - R_H)\,R_H}{\frac{z}{n}-1}} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{k_h \pi^2 E}} \frac{Mz}{R_e} = 0 \qquad (21)$$

Znając grubości stójki "g" pozostałe parametry przekroju można określić z równań (17)÷(19). Dla przekroju z żebrem podłużnym k_h w równaniu (21) należy zastąpić przez k_{h1} i $\varkappa$ przez $\varkappa_{\dot{z}}$.

6. Porównanie parametrów przy wymiarowaniu w zakresie sprężystym i sprężysto-plastycznym

Porównanie parametrów przekroju ograniczono do wielkości statycznych pola i momentu bezwładności. Liczby pewności przy wymiarowaniu w zakresie sprężystym zaopatrzono w indeksy "s", a w zakresie sprężysto-plastycznym w "p".

Pole przekroju i moment bezwładności dla zakresu sprężystego określają wzory [2]:

$$F_s = 2(\sqrt{\varkappa}+1) \sqrt[6]{\frac{1}{(\sqrt{\varkappa}+\frac{1}{3})^4} \frac{12(1-\nu^2)}{k_h \pi^2 E} \frac{M^4 n_s}{R_s^3}} \qquad (22)$$

i

$$I_{xs} = \frac{1}{2} \sqrt[6]{\frac{1}{(\sqrt{\varkappa}+\frac{1}{3})^2} \frac{k_h \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{M^8}{R_s^9\, n_s}}, \qquad (23)$$

przy czym

$$R_s = \frac{R_e}{z_s} \tag{24}$$

i

$$\frac{R_H}{R_e} = \frac{n_s}{z_s} \tag{25}$$

Odpowiednie stosunki będą więc:

$$\frac{F_p}{F_s} = \sqrt[12]{\frac{z_p^8}{\left(\frac{z_p}{n_p} - 1\right) z_s^6 n_s^2} \quad \frac{(R_e - R_H)\, R_H}{R_e^2}} \tag{26}$$

i

$$\frac{I_{xp}}{I_{xs}} = \sqrt[12]{\frac{\left(\frac{z_p}{n_p} - 1\right) z_s^{16} n_s^2}{z_s^{18}} \quad \frac{R_e^2}{(R_e - R_H)\, R_H}} \tag{27}$$

Liczbowe wartości tych stosunków wyznaczono dla stali St3 i stopu aluminium AlMg5MnCr.

Dla stali St3 zgodnie z PN-62/B-03200 przyjęto:

$$R_e = 24\ \frac{kG}{mm^2}; \quad R_H = 19{,}4\ \frac{kG}{mm^2}; \quad R = 15\ \frac{kG}{mm^2};$$

$$n_s = n_p = 1{,}4,$$

wówczas

$$z_p = \frac{R_e}{R} = \frac{24}{15} = 1{,}6,$$

$$z_s = n_s \frac{R_e}{R_H} = 1{,}4\ \frac{24}{19{,}4} = 1{,}73$$

i odpowiednio

$$\frac{F_p}{F_s} = 0,99$$

$$\frac{I_{xp}}{I_{xs}} = 0,864.$$

Dla stopu aluminium AlMg5MnCr zgodnie z PN-64/B-03220 przyjęto:

$$R_{e02} = 16\ \frac{kG}{mm^2}; \quad R_H = 8\ \frac{kG}{mm^2}; \quad R = 9,5\ \frac{kG}{mm^2}; \quad n_s = n_p = 1,4,$$

wówczas

$$z_p = \frac{R_{e02}}{R} = \frac{16}{9,5} \cong 1,7,$$

$$z_s = n_s\ \frac{R_{e02}}{R_H} = 1,4\ \frac{16}{8} = 2,8$$

i odpowiednio

$$\frac{F_p}{F_s} = 0,815$$

$$\frac{I_{xp}}{I_{xs}} = 0,70.$$

7. Uwagi końcowe

Otrzymane dla zakresu niesprężystego parametry przekroju można uznać za dostatecznie ścisłe, mimo, że po przekroczeniu granicy sprężystości (R_H) rozkład naprężeń w przekroju nie jest dokładnie liniowy. Należy jednak zwrócić uwagę, że wartość przyjmowanych naprężeń bezpiecznych zwykle nieznacznie przekracza granicę sprężystości, a co za tym idzie rozkład naprężeń przy zginaniu pozostaje praktycznie liniowy.

Ponieważ dla zakresu niesprężystego zmniejszenie momentu bezwładności jest silniejsze niż pola przekroju, zatem wymiarowanie to jest wskazane tam, gdzie nie jest wymagana wysoka sztywność belki.

LITERATURA

[1] ĆWIK R.: Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika z. 52, Gliwice 1973, 145.
[2] MROMLIŃSKI R.: Konstrukcje aluminiowe, Arkady, Warszawa 1964.
[3] BLEICH F.: Buckling Strenght of Metal Structures: Mc Graw-Hill, New York, 1952.
[4] ĆWIK R.: Rozprawa doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1971.

ОПТИМИЗАЦИЯ КОРОБЧАТОГО СЕЧЕНИЯ ОДИНАКОВОЙ ТОЛЩИНЫ СТЕНОК
ИЗГИБАЕМЫХ БАЛОК С УЧЁТОМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Р е з ю м е

В работе были определены оптимальные размеры поперечного сечения балок при чистом изгибе в неупругом диапазоне.

В качестве критерия был принят минимальный вес балок при одновременным удовлетворении условию прочности и местной устойчивости стенок.

OPTIMIZATION OF THE BENDING LOX SECTIONS WITH AN EQUITHICKNESS
WALLS INCLUDING ELASTO-PLASTISITY OF MATERIALS

S u m m a r y

On the paper the optimum cross-section dimensions of free bending beams in inelastic range were determined.

As a criterion was taken a minimum weight of beams with simultanous satisfy of strength and local stability conditions.