ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

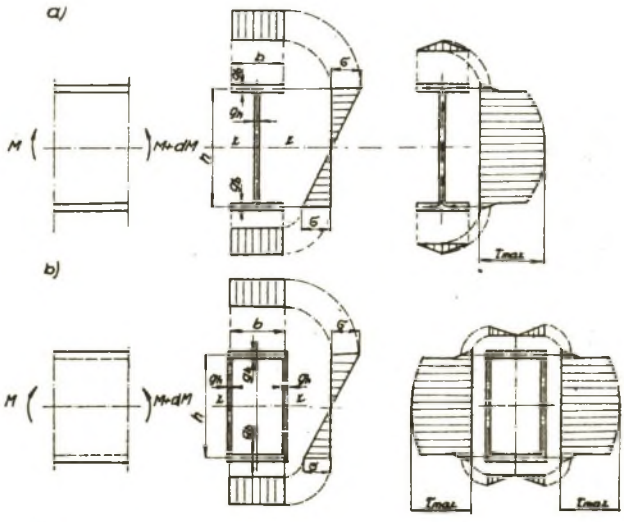
Seria: Mechanika z. 53 Nr kol. 439

Remigiusz Ćwik
Instytut Podstaw Konstrukcji Maszyn

OCENA WPŁYWU NAPRĘŻEŃ STYCZNYCH SWOBODNEGO ZGINANIA NA OPTYMALNE PARAMETRY PRZEKROJU ELEMENTÓW ZGINANYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę wpływu naprężeń stycznych swobodnego zginania na optymalne parametry przekroju elementów zginanych. Wyznaczono graniczne wielkości, przy których naprężenia styczne mogą być pominięte.

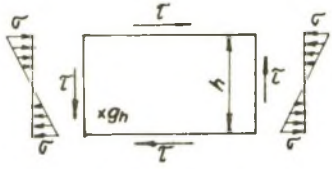
W pracach [1-4] zostały wyprowadzone wzory określające optymalne parametry przekroju elementów poddanych czystemu zginaniu. Wykazano, że wzory te mogą być stosowane także w przypadku zginania swobodnego, kiedy naprężenia styczne zginania są małe w porównaniu z naprężeniami normalnymi. Rozkład naprężeń w elemencie przy zginaniu swobodnym przedstawia rys. 1. Jak widać z wykresów naprężenia styczne wpływać będą głównie na wymiarowanie ścianek pionowych elementów.



Rys. 1. Obciążenie i rozkład naprężeń przy zginaniu swobodnym
a) przekrój teowy; b) przekrój skrzynkowy o różnej grubości pasów i stójek (dla przekroju o jednakowej grubości ścianek $g_b = g_h = g$)

Przy jednoczesnym występowaniu naprężeń normalnych i stycznych w płycie (rys. 2), związek między odpowiednimi naprężeniami krytycznymi określa wzór [5]:

$$\left(\frac{\sigma_k^{\tau}}{\sigma_k}\right)^2 + \left(\frac{\tau_k^{\sigma}}{\tau_k}\right)^2 = 1 \tag{1}$$



Rys. 2. Obciążenie płyty (ścianki pionowej przekroju) przy jednoczesnym zginaniu i ścinaniu

gdzie:

σ_k^{τ} i τ_k^{σ} - krytyczne naprężenia przy jednoczesnym działaniu naprężeń normalnych i stycznych;

naprężenia krytyczne dla $\tau = 0$

$$\sigma_k = k_h \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{g_h}{h}\right)^2, \tag{2}$$

naprężenie krytyczne dla $\sigma = 0$

$$\tau_k = k_\tau \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{g_h}{h}\right)^2, \tag{3}$$

przy swobodnym podparciu dla długich płyt można przyjąć współczynniki wybrzuszenia: $k_h = 23{,}9$ i $k_\tau = 5{,}34$;

E - moduł sprężystości podłużnej,

ν - współczynnik Poissona.

Kładąc $\sigma_k^{\tau} \leq n\sigma$ i $\tau_k \leq n\tau$ ze wzoru (1) otrzymuje się

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sigma_k}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_k}\right)^2} \leq \frac{1}{n}, \tag{4}$$

z którego

$$\sigma_n \leq \frac{\sigma_k}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\sigma}\frac{\sigma_k}{\tau_k}\right)^2}} \tag{5}$$

gdzie:

n - współczynnik pewności.

Podstawiając (2) do (5) otrzymuje się

$$\sigma_n \leq k_h \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\sigma}\frac{\sigma_k}{\tau_k}\right)^2}} \left(\frac{g_h}{h}\right)^2 =$$

$$= k_h' \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{g_h}{h}\right)^2 \tag{6}$$

gdzie:

$$k_h' = \frac{k_h}{\sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\sigma}\frac{\sigma_k}{\tau_k}\right)^2}} \tag{7}$$

Wzór (6) jest analogiczny do wzoru, z którego korzystano przy wyznaczaniu optymalnych parametrów przekroju elementów zginanych. Tak więc wzory określające optymalne parametry przekroju w pracach [1-4] mogą być wykorzystane dla zginania swobodnego, po zastąpieniu współczynnika k_h współczynnikiem k_h' określonym wzorem (7).

Z wzorów (2) i (3) dla stójki otrzymuje się

$$\frac{\sigma_k}{\tau_k} = \frac{k_h}{k_\tau} = \frac{23,9}{5,34} = 4,5, \tag{8}$$

wówczas

$$k_h' = \frac{k_h}{\sqrt{1+20\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^2}}. \tag{9}$$

Naprężenia normalne i średnie naprężenia styczne w stójce wyznacza się ze wzorów

$$\sigma = \frac{Mh}{2I_x} \tag{10}$$

i

$$\tau = \frac{T}{g_h h}, \tag{11}$$

gdzie:

- M - moment zginający w przekroju,
- T - siła poprzeczna,
- I_x - moment bezwładności pola przekroju.

Dla oceny wpływu naprężeń stycznych na parametry przekroju, a zwłaszcza na wartość pola i momentu bezwładności pola przekroju rozpatrzono belkę wspornikową o długości L obciążoną siłą P na swobodnym końcu o przekroju teowym i skrzynkowym o różnej i jednakowej grubości pasów i stójek, przy czym założono, że $L/h \geqslant 5$.
Moment zginający dla belki wspornikowej

$$M = PL \tag{12}$$

i siła poprzeczna

$$T = P. \tag{13}$$

1. Przekrój teowy

Moment bezwładności optymalnego pola przekroju teowego [1,3]:

$$I_x = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^4} \sqrt[6]{\frac{k_h \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{M^8}{R^9 n}} = \frac{g_h h^3}{3}. \tag{14}$$

gdzie:
R - naprężenie bezpieczne (dopuszczalne).
Wykorzystując wzory (9) do (14) otrzymuje się

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{2}{3}\frac{h}{L} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}133 \tag{a}$$

i

$$k_h' = 0{,}859\ k_h. \tag{b}$$

Optymalne pole przekroju przy czystym zginaniu [1,3]:

$$F = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{k_h \pi^2 E} \frac{M^4 n}{R^3}}. \tag{15}$$

Zamieniając we wzorach (15) i (14) k_h na k_h' otrzymuje się odpowiednie wielkości F' i I_x' przy swobodnym zginaniu. Wykorzystując te zależności odpowiednie stosunki tych wielkości będą:

$$\frac{F'}{F} = \sqrt[6]{\frac{k_h}{k_h'}} = \sqrt[6]{\frac{1}{0{,}859}} = 1{,}026 \tag{c}$$

i

$$\frac{I'_x}{I_x} = \sqrt[6]{\frac{k'_h}{k_h}} = \sqrt[6]{0,859} = 0,998. \tag{d}$$

2. Przekrój skrzynkowy o różnej grubości pasów i stójek

Optymalne pole i moment bezwładności przekroju przy czystym zginaniu określają wzory [2,3]:

$$F = 3\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\sqrt[6]{\frac{12(1-\nu^2)}{k_n \pi^2 E}\frac{M^4 n}{R^3}} \tag{16}$$

i

$$I_x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\sqrt[6]{\frac{k_h \pi^2 E}{12(1-\nu^2)}\frac{M^8}{R^9 n}} \tag{17}$$

Wartości liczbowe stosunku odpowiednich wielkości będą takie same jak określone wzorami (a) do (d).

3. Przekrój skrzynkowy o jednakowej grubości pasów i stójek

Optymalne pole i moment bezwładności przekroju przy czystym zginaniu [4]:

$$F = 2(\sqrt{\varkappa} + 1)\sqrt[6]{\frac{1}{(\sqrt{\varkappa} + \frac{1}{3})^4}\frac{12(1-\nu^2)}{k_h \pi^2 E}\frac{M^4 n}{R^3}} \tag{18}$$

i

$$I_x = \frac{1}{2}\sqrt[6]{\frac{1}{(\sqrt{\varkappa} + \frac{1}{3})^2}\frac{k_h \pi^2 E}{12(1-\nu^2)}\frac{M^8}{R^9 n}} = \frac{1}{2}(\sqrt{\varkappa} + \frac{1}{3})\, gh^3 \tag{19}$$

gdzie:

$$\varkappa = \frac{k_b}{k_h} = \frac{4}{23,9} = 0,167. \tag{20}$$

Pozostałe wielkości będą:

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{1}{2}(\sqrt{\varkappa} + \frac{1}{3})\,\frac{h}{L} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{0,167} + \frac{1}{3})\,\frac{1}{5} = 0,07413, \tag{e}$$

$$k'_h = 0,9492\ k_h, \tag{f}$$

$$\varkappa' = \frac{k_b}{k'_h} = 0,1588 \tag{g}$$

$$\frac{P'}{P} = \frac{\sqrt{\varkappa'} + 1}{\sqrt{\varkappa} + 1}\sqrt[6]{\left(\frac{\sqrt{\varkappa'} + \frac{1}{3}}{\sqrt{\varkappa'} + \frac{1}{3}}\right)^4 \frac{k_h}{k'_h}} = 1,01, \tag{h}$$

i

$$\frac{I'_x}{I_x} = \sqrt[6]{\left(\frac{\sqrt{\varkappa} + \frac{1}{3}}{\sqrt{\varkappa'} + \frac{1}{3}}\right)^2 \frac{k'_h}{k_h}} = 0,995. \tag{j}$$

Dla belki jednoprzęsłowej statycznie wyznaczalnej obciążonej siłą skupioną P w środku rozpiętości L, wyznaczone w punktach 1÷3 wartości stosunków wielkości statycznych przekroju uzyskuje się dla $\frac{L}{h} \geqslant 10$.

Wnioski

Wpływ naprężeń stycznych przy swobodnym zginaniu na optymalne parametry przekroju może być praktycznie pomijany przy $L/h \geqslant 5$ dla belek wspornikowych i $\frac{L}{h} \geqslant 10$ dla belek jednoprzęsłowych lub gdy $\frac{\tau}{\sigma} < 0,13$.

Parametry przekroju przy uwzględnieniu naprężeń stycznych mogą być wyznaczone według tych samych zależności jak przy czystym zginaniu, jeżeli współczynnik k_h zastąpiony zostanie przez k'_h, określonym przez wzór (7).

LITERATURA

[1] ĆWIK R.: Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika z. 42, Gliwice 1969, 95.

[2] ĆWIK R.: Dozór Techniczny 3 (43), 1971, 15.

[3] ĆWIK R.: Rozprawa doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1971.

[4] ĆWIK R.: Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika z. 52, Gliwice 1973, 145.

[5] BLEICH F.: Buckling Strenght of Metal Structures; Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1952.

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ СВОБОДНОГО ИЗГИБА НА ОПТИМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ СЕЧЕНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Р е з ю м е

В работе даётся анализ влияния касательных напражений свободного изгиба на оптимальные параметры сечения изгибаемых элементов. Были определены предельные величины, при которых касательными напряжениями можно пренебречь.

ESTIMATION OF AN INFLUENCE OF SHEARING STRESSES IN FREE BENDUNG ON THE OPTINUM CROSS SECTION PARAMETERS OF BENDING ELEMENTS

S u m m a r y

On the paper was shown an analysis of the influence of shearing stresses in free bending on the optimum cross-section parameters of bending elements.

The limiting guantities to which the shearing stresses may be neglected were determined.