ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Mechanika z. 53 Nr kol. 439

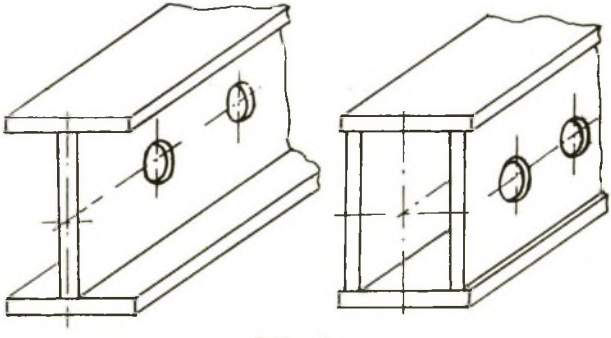
Antoni Jakubowicz, Krystyna Harężlak,
Józef Kapłanek

ANALIZA STANU NAPRĘŻENIA WOKÓŁ OTWORU W ŚRODNIKACH DŹWIGARÓW

Streszczenie. W pracy przeprowadzono analizę stanu naprężenia w tarczy prostokątnej o skończonej szerokości z otworem kołowym obciążonej momentem gnącym. W oparciu o metodę Muschieliszwiliego [1] uzyskano formuły opisujące wpływ otworu na spiętrzenie naprężeń. Wyniki analizy zilustrowano graficznie i ustalono wartość współczynników koncentracji naprężeń dla różnych średnic otworów.

Wstęp

W dźwigarach blachowniczych o przekrojach dwuteowych lub skrzynkowych w celu zmniejszenia ich ciężaru lub z innych względów konstrukcyjnych wykonuje się otwory w ścianach o powierzchniach prostopadłych do osi obojętnej zginania (rys. 1). Na ogół przyjmuje się, że rozmieszczenie otworów w osi obojętnej zginania ma zupełnie nieistotny wpływ na ogólną nośność dźwigarów.



Rys. 1

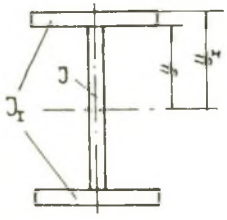
Celem pracy jest dokładniejsza analiza stanu naprężenia w sąsiedztwie otworu w przypadku czystego zginania dźwigara. Zagadnienie to można sprowadzić do analizy stanu naprężenia w tarczy prostokątnej z otworem w jej osi, obciążonej momentem gnącym $M = k\,Mg$, stanowiącym część całkowitego

momentu Mg działającego na dźwigar. Współczynnik k w przypadku przekroju dwuteowego (rys. 2) można określić z równości

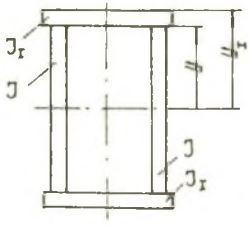
$$\frac{Mg}{J + J_I} = \frac{kMg}{J}, \tag{1}$$

skąd

$$k = \frac{J}{J + J_I} \tag{1a}$$



Rys. 2



Rys. 3

W przypadku przekroju skrzynkowego (rys. 3)

$$\frac{Mg}{2J + J_I} = \frac{kMg}{J}, \tag{2}$$

skąd

$$k = \frac{J}{2J + J_I}, \tag{2a}$$

gdzie:

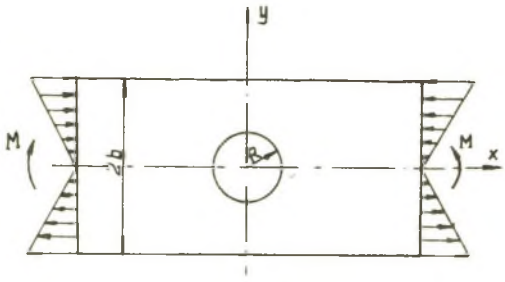
J - moment bezwładności przekroju tarczy względem osi obojętnej,

J_I - moment bezwładności półek względem osi obojętnej.

W znormalizowanych przekrojach dwuteowych współczynnik k wynosi od 0,19 do 0,42.

1. Opis stanu naprężenia

Analizę stanu naprężenia w tarczy o skończonej szerokości 2b z otworem umieszczonym w środku i obciążonej momentem zginającym M (rys. 4) przeprowadzono w oparciu o metodę Muschieleszwiliego [1,2] zastosowaną dla tarczy o nieskończonej szerokości.



Rys. 4

Składowe stanu naprężenia w pobliżu otworu można przedstawić jako sumę naprężeń w tarczy nieosłabionej otworem σ_x^o, σ_y^o, τ_{xy}^o i dodatkowych naprężeń σ_x^*, σ_y^*, σ_{xy}^*

$$\sigma_x = \sigma_x^o + \sigma_x^*,$$

$$\sigma_y = \sigma_y^o + \sigma_y^*, \tag{3}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^o + \tau_{xy}^*.$$

W omawianym przypadku:

$$\sigma_x^o = -\frac{M}{J}\,y, \quad \sigma_y^o = 0, \quad \tau_{xy}^o = 0. \tag{4}$$

Stan ten określa z dokładnością do stałych C_1 i C_2 funkcja naprężeń $U_o(x,y)$ o związkach

$$\sigma_x^o = \frac{\partial^2 U_o(x,y)}{\partial y^2},$$

$$\sigma_y^o = \frac{\partial^2 U_o(x,y)}{\partial x^2}, \tag{5}$$

$$\tau_{xy}^o = \frac{\partial^2 U_o(x,y)}{\partial x\,\partial y}.$$

Dla obszaru jednospójnego stałe te można przyjąć równe zeru. Ostateczną postać funkcji naprężeń wyraża równanie

$$U_o(x,y) = -\frac{M}{6J}\, y^3. \tag{6}$$

Funkcja naprężeń $U_o(x,y)$ musi spełniać równanie biharmoniczne

$$\nabla^4 U = 0. \tag{7}$$

Muschieleszwili [1] wykazał, że rozwiązaniem takiego równania może być funkcja zmiennej zespolonej w postaci:

$$U_o(x,y) = \mathrm{Re}\left[\bar{z}\,\varphi^o(z) + \lambda^o(z)\right], \tag{8}$$

gdzie:

$$\lambda^o(z) = \left[\psi^o(z)\right]', \tag{8a}$$

$$z = x + iy,$$

przy czym

$$\frac{\partial^2 U_o}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_o}{\partial y^2} = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi^{o\prime}(z)\right] \tag{9}$$

Części rzeczywiste i urojone funkcji $\varphi^o(z)$ i $\psi^o(z)$ muszą spełniać warunki Couchy'ego - Riemana.
Wprowadzając związki

$$\begin{aligned} \left[\varphi^o(z)\right]' &= P(x,y) + iQ(x,y), \\ \left[\psi^o(z)\right]' &= R(x,y) + iS(x,y), \end{aligned} \tag{10}$$

można wyznaczyć funkcje $\varphi^o(z)$ i $\psi^o(z)$

$$\begin{aligned} \varphi^o(z) &= i\,\frac{M}{8J}\, z^2, \\ \psi^o(z) &= -\,i\,\frac{M}{8J}\, z^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Analogicznie do równania (3) funkcje $\varphi_1(z)$ i $\psi_1(z)$ określające stan naprężenia w tarczy z otworem przyjęto w formie:

$$\varphi_1(z) = \varphi^o(z) + \varphi^*(z),$$
$$\psi_1(z) = \psi^o(z) + \psi^*(z), \tag{12}$$

$$\varphi_1(z) = \varphi^*(z) + i\,\frac{M}{8J}\,z^2,$$
$$\psi_1(z) = \psi^*(z) - i\,\frac{M}{8J}\,z^2. \tag{12a}$$

Wprowadzając odwzorowanie konforemne $z = \omega(\xi)$ na jednostkowy okrąg równania (12) przyjmują postać:

$$\varphi_1[\omega(\xi)] = \varphi^o[\omega(\xi)] + \varphi^*[\omega(\xi)],$$
$$\psi_1[\omega(\xi)] = \psi^o[\omega(\xi)] + \psi^*[\omega(\xi)]. \tag{13}$$

Postać funkcji odwzorowującej $\omega(\xi)$ zależy od kształtu otworu i dla otworu kołowego wynosi:

$$z = R\xi^{-1}, \tag{14}$$

gdzie:

R - promień otworu.

Oznaczając

$$\varphi_1[\omega(\xi)] = \varphi(\xi), \qquad \psi_1[\omega(\xi)] = \psi(\xi),$$
$$\varphi^o[\omega(\xi)] = \varphi^1(\xi), \qquad \psi^o[\omega(\xi)] = \psi^1(\xi), \tag{15}$$
$$\varphi^x[\omega(\xi)] = \varphi_o(\xi), \qquad \psi^x[\omega(\xi)] = \psi_o(\xi),$$

wtedy

$$\varphi(\xi) = \varphi^1(\xi) + \varphi_o(\xi),$$
$$\psi(\xi) = \psi^1(\xi) + \psi_o(\xi), \tag{16}$$

gdzie:

$$\varphi_o(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi^n,$$
$$\psi^o(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \xi^n. \tag{17}$$

Funkcje $\varphi_o(\xi)$ i $\psi_o(\xi)$ muszą spełniać warunki brzegowe:

$$\varphi_o(\xi) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\nu} \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \frac{\overline{\varphi_o'(\sigma)}}{\sigma - \xi} d\sigma + \bar{b}_o = \frac{1}{2\pi i}\int_{\nu} \frac{f_1^o + if_2^o}{\sigma - \xi} d\sigma,$$
$$\psi_o(\xi) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\nu} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi_o'(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{\nu} \frac{f_1^o - if_2^o}{\sigma - \xi} d\sigma, \tag{18}$$

gdzie σ jest zmienną ξ, przebiegającą po jednostkowym konturze ν. Dla konturu otworu wolnego od obciążeń $f_1 = f_2 = 0$. Podstawiając $\varphi_1(\sigma)$ i $\psi_1(\sigma)$ do warunków brzegowych, otrzymuje się dla zginania:

$$f_1^o + if_2^o = -i\frac{M}{8J}\left[\omega(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}\right]^2,$$
$$f_1^o - if_2^o = i\frac{M}{8J}\left[\overline{\omega(\sigma)} - \omega(\sigma)\right]^2. \tag{19}$$

Ze spełnienia warunków brzegowych wynikają funkcje:

$$\varphi_o(\xi) = -i\frac{MR^2}{8J}\xi^2,$$
$$\psi_o(\xi) = i\frac{MR^2}{8J}(\xi^2 - \xi^4). \tag{20}$$

Funkcje określone w równaniu (16) można ostatecznie określić jako:

$$\varphi(\xi) = i\frac{MR^2}{8J}\left(\frac{1}{\xi^2} - \xi^2\right),$$
$$\psi(\xi) = i\frac{MR^2}{8J}\left(\xi^2 - 2\xi^4 - \frac{1}{\xi^2}\right), \tag{21}$$

lub w tarczy rzeczywistej:

$$\varphi(z) = i\,\frac{MR^2}{8J}\left(\frac{z^2}{R^2} - \frac{R^2}{z^2}\right),$$

$$\psi(z) = i\,\frac{MR^2}{8J}\left(\frac{R^2}{z^2} - 2\right). \tag{22}$$

Funkcja naprężeń $U(x,y)$ określona związkiem (8) wyraża się równaniem

$$U(x,y) = \frac{MR^2}{8J}\left[\frac{-x^2y - y^3}{R^2} - R^2\,\frac{3x^2y - y^3}{(x^2+y^2)^2} - \right.$$

$$\left. - R^2\,\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{2}{3}R^4\,\frac{3x^2y - y^3}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2y}{R^2} - \frac{1}{3R^2}\,y^3\right]. \tag{23}$$

Dla przejrzystego sformułowania warunków na brzegu otworu wprowadza się współrzędne biegunowe

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \tag{24}$$

i oznaczając

$$R = a, \quad r = b\rho, \quad \lambda = \frac{a}{b},$$

funkcję naprężeń określa równanie

$$U(\rho,\theta) = \frac{Mb^3}{4J}\sin\theta\left[\frac{\lambda^4}{\rho}\left(\frac{\lambda^2}{\rho^2} - 2\right) - \right.$$

$$\left. - 2\sin^2\theta\left(\frac{2}{3}\,\frac{\lambda^6}{\rho^3} + \frac{1}{3}\rho^3 - \frac{\lambda^4}{\rho}\right)\right]. \tag{25}$$

Funkcja ta spełnia wymienione warunki brzegowe

$$\sigma_\rho = \frac{1}{b^2}\left[\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial U}{\partial\rho}\right] = 0,$$

$$\tau_{\rho\theta} = -\frac{1}{b^2}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) = 0, \tag{26}$$

lecz nie spełnia warunków brzegowych na krawędzi zewnętrznej tarczy. Ostatecznie więc składowe stanu naprężenia określone przez funkcję naprężeń

$$\sigma_x = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\sigma_y = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \tag{27}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta},$$

gdzie:

$$\xi = \frac{x}{b},$$

$$\eta = \frac{y}{b},$$

wyrażą się w postaci:

$$\sigma_x = \frac{Mb}{J}\eta\left[-\frac{16\eta^4\lambda^6}{(\xi^2+\eta^2)^5} + \frac{4\eta^2\lambda^4}{(\xi^2+\eta^2)^4}(5\lambda^2+3\eta^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda^4}{(\xi^2+\eta^2)^3}(5\lambda^2+18\eta^2) + \frac{6\lambda^4}{(\xi^2+\eta^2)^2} - 1\right],$$

$$\sigma_y = \frac{Mb}{J}\frac{\lambda^4\eta}{(\xi^2+\eta^2)^2}\left\{\left(\frac{\lambda^2}{\xi^2+\eta^2}-1\right)\left(\frac{2\eta^2}{\xi^2+\eta^2}-1\right)\left(1-\frac{4\xi^2}{\xi^2+\eta^2}\right) - \right.$$

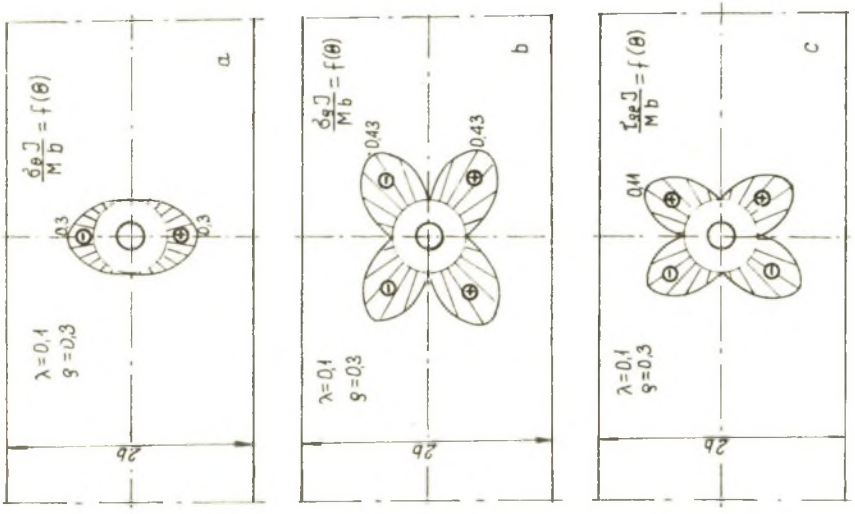
$$\left. - 2\frac{\xi^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}\left[\lambda^2\frac{2\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}-1) + 2\eta^2\left(\frac{\lambda^2}{\xi^2+\eta^2}-1\right)\right]\right\}, \tag{28}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Mb}{J}\lambda^4\frac{\xi}{(\xi^2+\eta^2)^3}\left[\frac{2\lambda^2\eta^2(3\xi^2-5\eta^2)}{(\xi^2+\eta^2)^2} - \right.$$

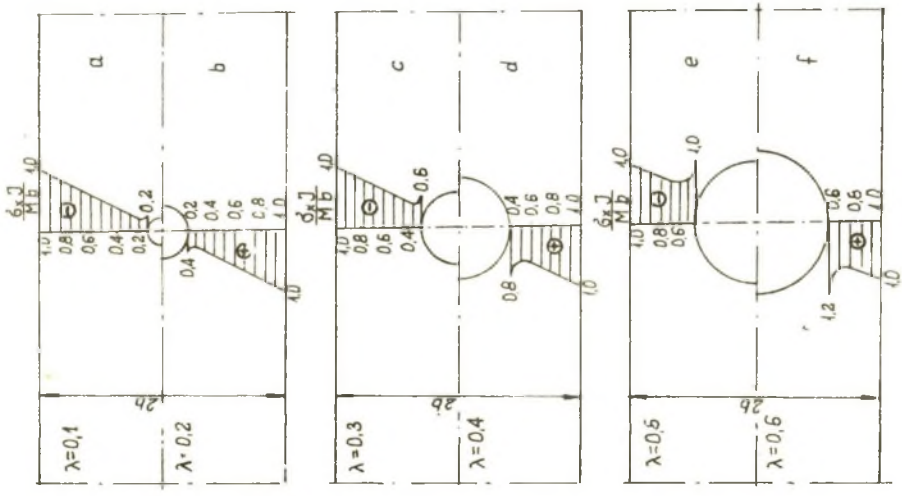
$$\left. - \frac{\lambda^2\xi^2 - 3\lambda^2\eta^2 + 6\eta^2\xi^2 - 6\eta^4 - 2\eta^2\lambda^2}{\xi^2+\eta^2} + \xi^2 - 3\eta^2\right].$$

W przekroju prostopadłym do osi tarczy, czyli dla $\theta = 90^\circ$

$$\sigma_x = -\frac{Mb}{J}\rho\left(\frac{\lambda^6}{\rho^6}+1\right). \tag{29}$$


a
b
c
λ=0,1
ϑ=0,3
2b
0,3
0,43
0,41

Rys. 6


a
b
c
d
e
f
λ=0,1
λ=0,2
λ=0,3
λ=0,4
λ=0,5
λ=0,6
2b
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
1,2

Rys. 5

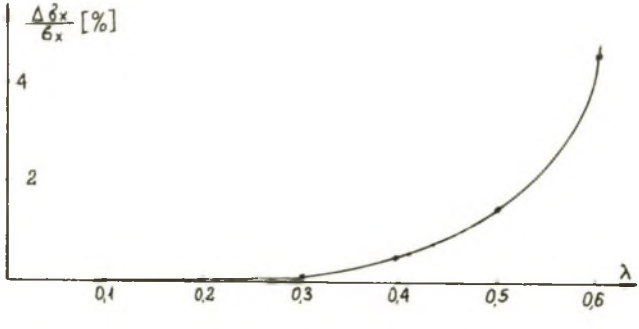
Wnioski

Uzyskane wzory (28) pozwalają na wyczerpujące zbadanie ilościowe stanu naprężenia w obszarze sąsiadującym z otworem.

W celu poglądowego przedstawienia wpływu otworu okrągłego na stan naprężenia w przekroju normalnym do osi belki wyznaczono naprężenia σ_x w zależności od wielkości względnej otworu dla różnych λ (rys. 5).

Współczynnik koncentracji naprężeń α określający stosunek całkowitej wartości naprężeń σ_x w przekroju normalnym na brzegu otworu do wartości naprężeń σ_x^o w tym samym miejscu w tarczy pełnej posiada wartość stałą $\alpha = 2$.

W przypadku $\lambda = 0,5$ naprężenia σ_x osiągają wartość maksymalnych naprężeń zginania $\sigma_{max} = \frac{M}{W}$ stanowiących w obliczeniach na dopuszczalne naprężenia wartość kryterialną. Błąd wynikły z niespełnienia warunków brzegowych na szerokości "b" tarczy dla wartości $\lambda \leqslant 0,5$ nie przekracza 2% (rys. 7).



Rys. 7

LITERATURA

[1] MUSCHIELISZWILI N.J.: Niekotoryje osnownyje zadaci matematiceskoj teorii uprugosti, Izd. ANSSSR, Moskva, 1949.

[2] SAWIN G.N.: Raspredielenije napriażenij około otvierstij, Izd. Naukova dumka, Kijev, 1969.

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ВОКРУГ ОТВЕРСТИЯ ПОЛОТНА ДВУТАВРА

Р е з ю м е

Был произведен анализ напряжённого состояния в полотне двутавровой балки рассматриваемом как прямоугольный щит ограниченной ширины с круговым отверстием, нагруженном изгибающим моментом. Опираясь на метод Мусхелишвили были получены формулы описывающие влияние отверстия на концентрацию напряжений.

Результаты для различных диаметров отверстий представлены графически и было определено значение коэффициента концентрации напряжений.

STATE OF STRESS ANALYSIS A ROUND THE STALE IN THE WEBS OF GIRDERS

S u m m a r y

State of stress was analysed in the web of girder treated as the rectangular plane of finite width with circular hole under the action of bending moment.

The formulac describing the influence of the hole on the stress concentration were found on the basis of the Muschielishwili's method. The results for different hole diameters were illustrated graplically and the volue of the stress concentration coefficient were established.