ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1987

Seria: MECHANIKA z. 85 Nr kol. 1010

XI OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA TEORII MASZYN I MECHANIZMÓW

11th POLISH CONFERENCE ON THE THEORY OF MACHINES AND MECHANISMS

27—30. 04. 1987 ZAKOPANE

J. KNAPCZYK
Politechnika Krakowska, Kraków

A. STĘPNIEWSKI
Akademia Rolnicza, Lublin

# ANALIZA KINEMATYCZNA I DYNAMICZNA MANIPULATORA Z PIĘCIOMA PARAMI OBROTOWYMI METODĄ MACIERZOWĄ DLA ZADANEJ TRAJEKTORII RUCHU

Streszczenie. Przedstawiono macierzową metodę analizy przestrzennego otwartego łańcucha kinematycznego, mającego pięć par obrotowych, przy zastosowaniu macierzy 4 x 4 jednorodnych przekształceń współrzędnych Hartenberga - Denavita. Rozwiązano zadanie analizy kinematycznej i dynamicznej manipulatora robota IRb-60 dla przyjętej trajektorii członu roboczego. Wyznaczono przebiegi zmian przemieszczeń i przyspieszeń w poszczególnych parach obrotowych oraz sił i momentów oddziaływań związanych z ruchem mas członów dla określonych przebiegów zmian prędkości kątowych.

## 1. Wprowadzenie

Analiza kinematyki i dynamiki manipulatora pozwala określić jego możliwości wykonania określonych operacji technologicznych. Wyniki takiej analizy zwykle wykorzystuje się przy projektowaniu układu sterowania.

Proste zadanie analizy kinematyki polega na wyznaczeniu położeń członu roboczego oraz pozostałych członów dla przyjętych przemieszczeń w ruchach względnych członów tworzących pary kinematyczne związane uogólnionymi współrzędnymi $q_i$ $(i = 1,2,...,n)$. Współrzędne $q_i$ mogą być zadane w postaci zestawu wartości, określających pewne ustalone położenie manipulatora lub w postaci funkcji czasu $q_i = q_i(t)$. W ogólnym przypadku określa się równanie trajektorii środka chwytaka w postaci parametrycznej jako funkcji czasu oraz orientację chwytaka wzdłuż całej trajektorii.

Zadanie odwrotne polega na wyznaczeniu uogólnionych wsp. $q_i$ dla zadanych położeń członu roboczego w nieruchomym ukł. wsp. W niektórych zada-

niach może być wiele rozwiązań. Zadanie odwrotne jest bardziej skomplikowane od prostego i w wielu przypadkach można je rozwiązać tylko numerycznie.

Realizacja zadanej trajektorii chwytaka manipulatora była przedmiotem wielu prac, np. Duffy [1], Paul [4], Litvin [3] i innych. Jedna ze stosowanych metod jest oparta na równaniach zamknięcia łańcucha kinematycznego w postaci macierzowej. Rozwiązanie w postaci jawnej można uzyskać tylko dla manipulatorów o specjalnej geometrii. W innych przypadkach stosuje się linearyzację zadania, wprowadzając różniczkowe zmiany położenia i orientacji chwytaka z zadanego punktu w zależności od różniczkowych zmian współrzędnych uogólnionych. Zależność tę wyraża się przez macierz jakobianową. Istnieje wiele metod dla wyznaczania tej macierzy. Wyznaczanie macierzy odwrotnej do macierzy jakobianowej prowadzi do skomplikowanych wyrażeń, które są mało przydatne przy rozwiązywaniu zadania odwrotnego dla typowych manipulatorów. Alternatywne podejście do tego zadania polega na różniczkowaniu wprost rozwiązań równań zamknięcia.

Przy projektowaniu manipulatorów oraz ich zastosowań znaczny wysiłek poświęca się systematycznej analizie dynamicznej kompletnego układu [6] w celu odpowiedniego sterowania dla zadanego ruchu.

W niniejszej pracy zaproponowano zastosowanie macierzowej analizy kinematycznej i siłowej, która pozwala na opracowanie algorytmu obliczeniowego dla konkretnego manipulatora. Otrzymane wartości maksymalne momentów dynamicznych pozwalają na ocenę zdolności napędowych badanego robota.

## 2. Wyznaczenie położeń członów manipulatora

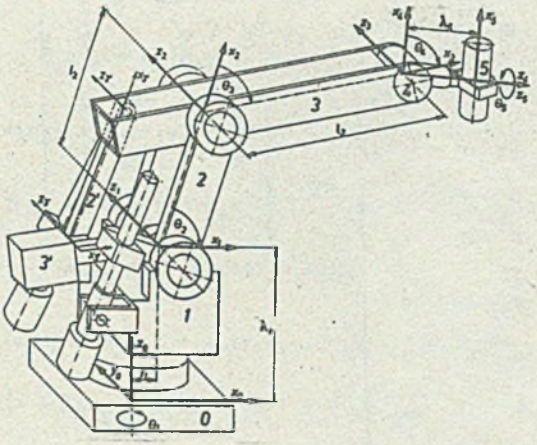
Jeśli manipulator ma zadaną trajektorię punktu chwytaka i określoną orientację układu współrzędnych związanego z nim względem podstawy, wtedy mamy dane elementy macierzy:

$$T_{1,5} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x & p_x \\ l_y & m_y & n_y & p_y \\ l_z & m_z & n_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

gdzie: l, m, n - wersory osi układu współrzędnych związanego z chwytakiem, p - wektor położenia środka chwytaka względem nieruchomego układu współrzędnych.

Położenie członów manipulatora można wyznaczyć z równania zamknięcia w postaci macierzowej:

$$T_{1,5} = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \tag{2}$$




Rys. 1

gdzie:

$$A_i = \begin{bmatrix} c\Theta_i & -s\Theta_i c\alpha_i & s\Theta_i s\alpha_i & l_i c\Theta_i \\ s\Theta_i & c\Theta_i c\alpha_i & -c\Theta_i s\alpha_i & l_i s\Theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & \lambda_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad s\Theta_i = \sin\Theta_i \tag{3}$$

Z równania (2) można wydzielić sześć niezależnych równań, które przedstawiają zależności kątów $\Theta_i$ od elementów macierzy $T_{1,5}$.

Dla manipulatora IRb-60 wymiary członów są następujące:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_i$ = | -90°, | 0, | 0, | -90°, | 0 |
| $l_i$ = | 0,13, | 0,8, | 1,28, | 0, | 0 |
| $\lambda_i$ = | 0, | 0, | 0, | 0, | 0,4 |

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & l_1c_1 \\ s_1 & 0 & c_1 & l_1s_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie $s_1 = s\theta_1$.

Porównując elementy macierzy (1) i (2) z uwzględnieniem (4) otrzymuje się:

$$l_x = c_1c_5[c_2(c_3c_4 - s_3s_4) - s_2(s_3c_4 + c_3s_4)] + s_1s_5$$

$$l_x = c_1c_5\cos\tau + s_1s_5$$

$$l_y = s_1c_5[c_2(c_3c_4 - s_3s_4) - s_2(s_3c_4 + c_3s_4)] - c_1s_5$$

$$l_y = s_1c_5\cos\tau - c_1s_5$$

$$l_z = c_5[s_2(s_3s_4 - c_3c_4) - c_2(s_3c_4 + c_3s_4)] = -c_5\sin\tau$$

$$m_x = c_1s_5[c_2(s_3s_4 - c_3c_4) + s_2(s_3c_4 + c_3s_4)] + s_1c_5$$

$$m_x = s_1c_5 - c_1s_5\cos\tau$$

$$m_y = s_1s_5[c_2(s_3s_4 - c_3c_4) + s_2(s_3c_4 + c_3s_4)] - c_1c_5$$

$$m_y = -s_1s_5\cos\tau - c_1c_5$$

$$m_z = s_5[c_2(s_3c_4 - c_3s_4) + s_2(c_3c_4 - s_3s_4)] = s_5\sin\tau$$

$$n_x = c_1[s_2(s_3s_4 - c_3c_4) - c_2(c_3s_4 + s_3c_4)] = -c_1\sin\tau$$

$$n_y = s_1[s_2(s_3s_4 - c_3c_4) - c_2(c_3s_4 + s_3c_4)] = -s_1\sin\tau \tag{5}$$

$$n_z = s_2(c_3s_4 + s_3c_4) + c_2(s_3s_4 - c_3c_4) = -\cos\tau$$

$$p_x = c_1\{-\lambda_5[s_2(c_3c_4 - s_3s_4) + c_2(s_3c_4 + c_3s_4) + l_3(c_2c_3 - s_2s_3) + l_2c_2 + l_1]\} = \lambda_5 n_x + c_1[l_3\cos\sigma + l_2c_2 + l_1]$$

$$p_y = s_1\{-\lambda_5[s_2(c_3c_4 - s_3a_4) + c_2(s_3c_4 + c_3s_4) + l_3(c_2c_3 - s_2s_3) + l_2c_2 + l_1]\} = \lambda_5 n_y + s_1[l_3\cos\sigma + l_2c_2 + l_1]$$

$$p_z = \lambda_5[s_4(s_2c_3 + c_2s_3) + c_4(s_2s_3 - c_2c_3)] - l_3(s_2c_3 + c_2s_3) - l_2s_2$$

$$p_z = \lambda_5 n_z - l_3\sin\sigma - l_2s_2$$

gdzie: $\tau = \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4$ $\qquad \sigma = \Theta_2 + \Theta_3$.

Po dokonaniu przekształceń matematycznych otrzymuje się:

$$\operatorname{tg}\Theta_1 = p_y/p_x \qquad \operatorname{tg}\Theta_5 = -m_z/l_z \qquad \sin(\Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4) = -n_y/s_1$$

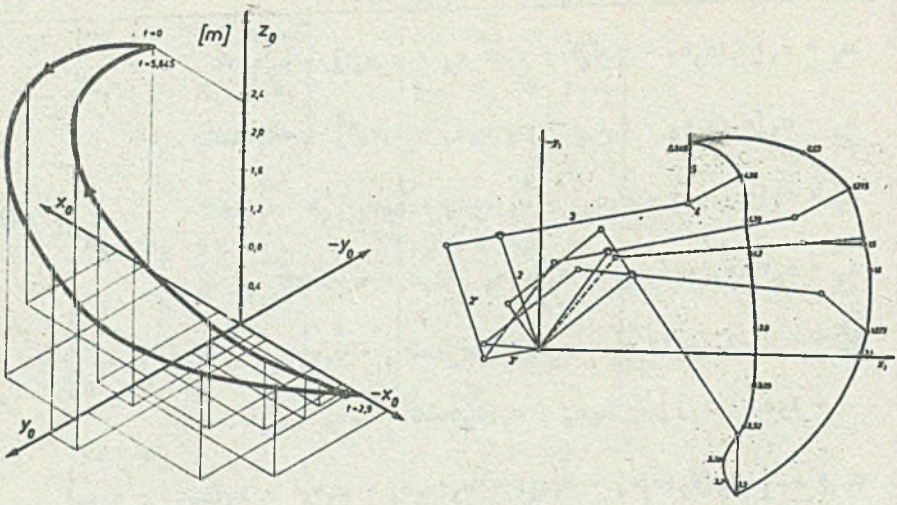
$$\sin(\Theta_2 + \Theta_3 \pm \operatorname{arctg} B/A) = C/\sqrt{A^2 + B^2} \qquad \sin\Theta_2 = A - l_3\sin(\Theta_2 + \Theta_3)/l_2 \tag{6}$$

gdzie: $A = \lambda_5 n_z - p_z$, $B = (p_x - \lambda_5 n_x - c_1 l_1)/c_1$,

$C = (l_3^2 - l_2^2 + A^2 + B^2)/2l_3$.

Przykład liczbowy: dla rozpatrywanego manipulatora robota IRB-60 dane są współrzędne środka chwytaka i jego orientacja w określonej chwili czasu, tzn. dane są wartości elementów macierzy:

$$T_{1,5} = \begin{bmatrix} 0{,}98430 & 0{,}17353 & 0{,}03489 & 0{,}08100 \\ -0{,}03134 & -0{,}02324 & 0{,}99923 & 2{,}31963 \\ 0{,}17361 & -0{,}98464 & -0{,}01746 & 0{,}69514 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$




Rys. 2a, b

Po wykonaniu obliczeń według wzorów (6) i odrzuceniu wartości niemożliwych dla rozpatrywanego manipulatora, otrzymano następujące rozwiązanie zadania odwrotnego:

$$\Theta_1 = 88°, \quad \Theta_2 = -50°, \quad \Theta_3 = 46°, \quad \Theta_4 = -85°, \quad \Theta_5 = 80°$$

## 3. Analiza prędkości i przyspieszeń

Analiza kinematyczna manipulatora obejmuje określenie wektorów prędkości i przyspieszeń poszczególnych członów w układach współrzędnych związanych z tymi członami.

Wektor opisujący położenie punktu związanego z chwytakiem wyznacza się według równania:

$$\underline{r}_{5,i-1} = A_i \underline{r}_{5,i} \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{7}$$

gdzie $\underline{r}_{5,i}$ - wektor opisujący położenie punktu związanego z chwytakiem w układzie współrzędnych "i".

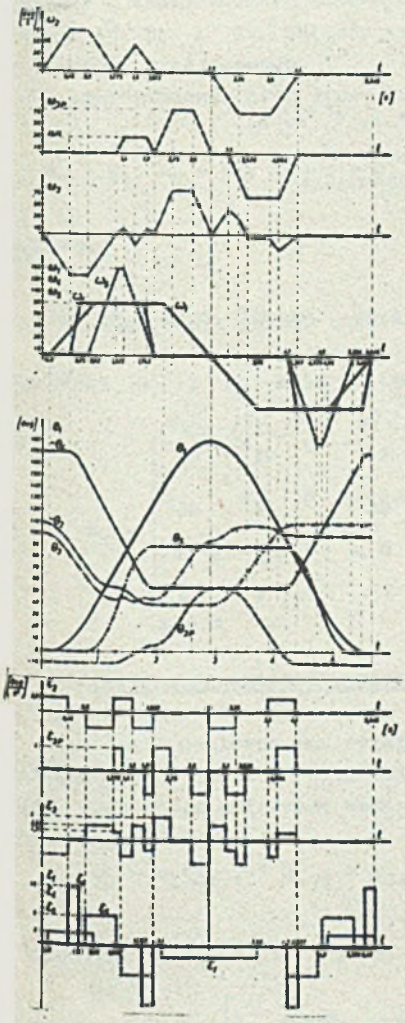
Wektory prędkości i przyspieszenia punktu chwytaka otrzymuje się jako pierwszą i drugą pochodną względem czasu wektora (7):

$$\begin{aligned} \underline{v}_{5,i-1} &= Q_i \underline{r}_{5,i-1} + A_i \underline{v}_{5,i} & \underline{v}_{5,5} &= 0 \\ \underline{a}_{5,i-1} &= q_i \underline{r}_{5,i-1} + A_i \underline{a}_{5,i} + 2Q_i A_i \underline{v}_{5,i} & \underline{a}_{5,5} &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie:

$Q_i$ - macierz, która spełnia równanie $\dot{A}_i = T_{Pi} = Q_i A_i$

$q_i$ - macierz, która spełnia równanie $\ddot{A}_i = T_{Di} = q_i A_i$.



Rys. 3

Wektory prędkości i przyspieszenia kątowego ogniw można wyznaczyć:

$$\underline{\omega}_i = \underline{\omega}_{i-1} + T_{1,i-1}\underline{\omega}_{i,i-1}$$

$$\underline{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i-1} + T_{Pi-1}\underline{\omega}_{i,i-1} + T_{1,i-1}\underline{\varepsilon}_{i,i-1} \tag{9}$$

gdzie:

$$\underline{\omega}_{i,i-1} = [0 \quad 0 \quad \dot{\Theta}_i \quad 0]^T$$

$$\varepsilon_{i,i-1} = [0 \quad 0 \quad \ddot{\Theta}_i \quad 0]^T$$

$\dot{\Theta}_i$, $\ddot{\Theta}_i$ - prędkość i przyspieszenie kątowe pary obrotowej "i".

Macierze $T_{1,i-1}$ obliczane są według algorytmu:

$$T_{i-1,k} = A_{i-1}T_{i,k}$$

$$k = 5 \text{ to } i = 2, 3, 4, 5$$

$$k = 4 \text{ to } i = 2, 3, 4. \tag{10}$$

gdzie:

$$T_{i,k} = A_i \ldots A_k.$$

Pochodne macierzy oblicza się według wzorów:

$T_{P1} = Q_1 T_{1,i}$ następne pochodne

$$T_{Pi} = \sum_{i-1}^{5} a_i \tag{11}$$

gdzie:

$$a_1 = Q_1 T_{1,i} \qquad a_{k+1} = T_{1,k} Q_{k+1} T_{k-1,i} \qquad i = 2...5 \qquad k = 1...(i-1).$$

Współrzędne wektora prędkości punktu $0_i$ w układzie współrzędnych związanym z ogniwem "i" wyznacza się ze wzorów

$$\underline{v}_{i,i} = T_{0i,1} T_{Pi} \underline{r} \qquad \underline{r} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{12}$$

gdzie:

$$T_{0i,1} = T_{0i,i} T_{0i-1,1} \qquad T_{0i,i} = A_i^{-1} \qquad i = 2, 3, 4, 5.$$

Współrzędne wektora przyspieszenia obliczamy:

$$\underline{a}_{i,i} = T_{0i,1} T_{Di} \underline{r} \tag{13}$$

$T_{Di}$ – druga pochodna macierzy $T_{1,i}$ obliczana według algorytmu:

$$T_{Dk} = q_1 T_{1,i} + \sum_2^5 e_k + 2Q_1 \sum_2^5 f_k + 2A_1 Q_2 \sum_3^5 g_k + 2T_{1,2} Q_3 \sum_4^5 h_k + j \tag{14}$$

gdzie:

$$e_k = T_{1,k-1} q_k T_{k,i} \qquad f_k = T_{1,k-1} Q_k T_{k,i} \qquad i = 1 \quad \text{to} \quad k = 1$$

$$g_k = T_{2,k-1} Q_k T_{k,i} \qquad h_k = T_{3,k-1} Q_k T_{k,i} \qquad i = 2 \quad \text{to} \quad k = 2$$

$$j = 2T_{1,3} Q_4 A_4 Q_5 A_5 \qquad \qquad .....$$

Współrzędne wektora prędkości kątowej ogniwa:

$$\underline{\omega}_{i,i} = T_{0i,1} \underline{\omega}_i \tag{15}$$

Przyspieszenia:

$$\underline{\varepsilon}_{i,i} = T_{0i,1} \underline{\varepsilon}_i \tag{16}$$

Łatwo zauważyć, że w układzie czworoboku przegubowego zachodzą następujące zależności:

$$\underline{\omega}_{3P,3P} = \underline{\omega}_{3,3} \qquad \underline{\varepsilon}_{3P,3P} = \underline{\varepsilon}_{3,3}$$

oraz

$$\underline{\omega}_{2P,2P} = \underline{\omega}_{2,2} \qquad \underline{\varepsilon}_{2P,2P} = \underline{\varepsilon}_{2,2}$$

Należy więc wyliczyć tylko wektory prędkości i przyspieszeń członów 3P i 2P, zgodnie z zamieszczonym schematem obliczeń, uwzględniając macierze przekształceń $B_1$ i $B_2$ układów współrzędnych związanych z parami obrotowymi czworoboku przegubowego.

W zamieszczonym algorytmie należy dokonać następujących "wymian":

$$A_2 = B_1,\ A_3 = B_2,\ T_{02,2} = B_1^{-1},\ T_{03,3} = B_2^{-1},\ Q_2 = Q_{3P},\ q_2 = q_{3P},$$

wówczas:

$$\underline{v}_{3P,3P} = \underline{v}_{2,2},\ \underline{a}_{3P,3P} = \underline{a}_{2,2},\ \underline{v}_{2P,2P} = \underline{v}_{3,3},\ \underline{a}_{2P,2P} = \underline{a}_{3,3}.$$

Macierze $B_1$ i $B_2$ mają postać:

$$B_1 = \begin{bmatrix} c_{3P} & -s_{3P} & 0 & -l_{3P}c_{3P} \\ s_{3P} & c_{3P} & 0 & -l_{3P}s_{3P} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 & l_2c_3 \\ -s_3 & c_3 & 0 & -l_2s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 4. Analiza dynamiczna manipulatora

Analiza dynamiczna manipulatora obejmuje określenie wektorów pędu $\underline{p}_i$, momentów pędu (krętu) $\underline{H}_{0i}$, sił bezwładności $\underline{F}_i$ i momentów sił bezwładności $\underline{M}_{0i}$, które obliczamy według poniżej zestawionych wzorów:

$$\underline{p}_i = m_i(\underline{v}_{i,i} + \underline{\omega}_{i,i} \times \underline{r}_{Si}) \qquad \underline{r}_{Si} = [x_{Si}\ \ y_{Si}\ \ z_{Si}\ \ 1]^T$$

$$\underline{H}_{0i} = [J]_{0i}\underline{\omega}_{i,i} + m_i(\underline{r}_{Si} \times \underline{v}_{i,i})$$

$$\text{gdzie: } [J]_{0i} = m_i \begin{bmatrix} k_{ix}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{iy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_{iz}^2 \end{bmatrix} \qquad k_{ij}^2 = J_{ij}/m_i \tag{17}$$

$$\underline{F}_i = \dot{\underline{p}}_i + \underline{\omega}_i \times \underline{p}_i$$

$$\underline{M}_{0i} = \dot{\underline{H}}_{0i} + \underline{\omega}_{i,i} \times \underline{H}_{0i} + \underline{v}_{i,i} \times \underline{p}_i$$

gdzie:

$\underline{r}_{Si}$ - wektor położenia środka masy ogniwa "i" względem układu "i",
$[J]_{0i}$ - macierz tensora bezwładności ogniwa.

Równania równowagi dynamicznej ogniwa "i" w układzie związanym z tym ogniwem przy uwzględnieniu zasady D'Alemberta są następujące:

$$A_i^{-1}\underline{R}_{i-1,i} + \underline{F}_i + \underline{R}_{i+1,i} = 0$$

$$A_i^{-1}(\underline{M}_{i-1,i})_{0i-1} + \underline{M}_{0i} + (\underline{M}_{i+1,i})_{0i} + A_i^{-1}(\underline{r}_{0i})_i \times A_i^{-1}\underline{R}_{i-1,i} = 0 \tag{18}$$

$\underline{R}_{i-1,i}$ - wektor siły oddziaływania ogniwa "i-1" na ogniwo "i",
$(\underline{M}_{i-1,i})_{0i-1}$ - wektor momentu sił oddziaływania ogniwa "i-1" na ogniwo "i" względem punktu $0_{i-1}$.

Mając wartości sił oraz momentów sił bezwładności (17) i korzystając z równań równowagi dynamicznej (18), można obliczyć wartości momentów napędowych w parach obrotowych.

Równania równowagi ogniwa "5" są następujące:

$$T_{05,5}\underline{R}_{45} + \underline{F}_5 = 0$$

$$T_{05,5}\underline{M}_{4504} + \underline{M}_{05} + T_{05,5}\,\underline{r} \times T_{05,5}\underline{R}_{45} = 0 \tag{19}$$

Z równań (19) otrzymano:

$$\underline{M}_{45x4} = (\underline{M}_{05y} + \lambda_5\underline{F}_{5x})s\Theta_5 - (\underline{M}_{05x} - \lambda_5\underline{F}_{5y})c\Theta_5 ,$$

$$\underline{M}_{45y4} = (\lambda_5\underline{F}_{5y} - \underline{M}_{05x})s\Theta_5 - (\underline{M}_{05y} + \lambda_5\underline{F}_{5x})c\Theta_5, \quad \underline{M}_{45z4} = \underline{M}_{05z} \tag{20}$$

$$\underline{R}_{54x} = \underline{F}_{5x}c\Theta_5 - \underline{F}_{5y}s\Theta_5, \ \underline{R}_{54y} = \underline{F}_{5x}s\Theta_5 - \underline{F}_{5y}c\Theta_5, \ \underline{R}_{54z} = \underline{F}_{5z}$$

Równania równowagi ogniwa "4" mają postać:

$$T_{04,4}\underline{R}_{34} + \underline{F}_4 + \underline{R}_{54} = 0$$

$$T_{04,4}\underline{M}_{3403} + \underline{M}_{04} + \underline{M}_{5404} + T_{04,4}\underline{r} \times T_{04,4}\underline{R}_{34} = 0 \tag{21}$$

Stąd otrzymano:

$$\underline{M}_{34x3} = (\underline{M}_{45x4} - \underline{M}_{04x})c\Theta_4 + (\underline{M}_{04z} - \underline{M}_{45z4})s\Theta_4$$

$$\underline{M}_{34y3} = (\underline{M}_{45x4} - \underline{M}_{04x})s\Theta_4 - (\underline{M}_{04z} - \underline{M}_{45z4})c\Theta_4, \quad \underline{M}_{34z3} = \underline{M}_{04y} - \underline{M}_{45y4} \tag{22}$$

$$\underline{R}_{43x} = (\underline{F}_{4x} + \underline{R}_{54x})c\Theta_4 - (\underline{F}_{4z} + \underline{R}_{54z})s\Theta_4$$

$$\underline{R}_{43y} = (\underline{F}_{4x} + \underline{R}_{54x})s\Theta_4 + (\underline{F}_{4z} + \underline{R}_{54z})c\Theta_4, \quad \underline{R}_{43z} = -(\underline{F}_{4y} + \underline{R}_{54y})$$

Równania równowagi ogniwa "3":

$$T_{03,3}\underline{R}_{23} + \underline{F}_3 + \underline{R}_{43} + B_{03}\underline{R}_{2P3} = 0$$

$$T_{03,3}\underline{M}_{2302} + \underline{M}_{03} + \underline{M}_{4303} + T_{03,3}\underline{r} \times T_{03,3}\underline{R}_{23} + B_{03}\underline{r} \times B_{03}\underline{R}_{2P3} = 0 \tag{23}$$

Z równań (23) otrzymano:

$$\underline{R}_{2P3x} = \left[\underline{M}_{34z3} - \underline{M}_{03z} - l_3(\underline{F}_{3y} + \underline{R}_{43y})\right]/l_{3P}s\Theta_3$$

$$\underline{R}_{32y} = (\underline{F}_{3x} + \underline{R}_{43x})s\Theta_3 + (\underline{F}_{3y} + \underline{R}_{43y})c\Theta_3, \quad \underline{R}_{32z} = \underline{F}_{3z} + \underline{R}_{43z} \tag{24}$$

$$\underline{M}_{23x2} = (\underline{M}_{03y} - \underline{M}_{34y3} - l_3\underline{R}_{32z})s\Theta_3 + (\underline{M}_{34x3} - \underline{M}_{03x})c\Theta_3$$

$$\underline{M}_{23y2} = (\underline{M}_{34x3} - \underline{M}_{03x})s\Theta_3 + (\underline{M}_{34y3} - \underline{M}_{03y} + l_3\underline{R}_{32z})c\Theta_3$$

Równania równowagi ogniwa "2":

$$T_{02,2}\underline{R}_{12} + \underline{F}_2 + \underline{R}_{32} = 0$$

$$T_{02,2}\underline{M}_{1201} + \underline{M}_{02} + \underline{M}_{3202} + T_{02,2}\underline{r} \times T_{02,2}\underline{R}_{12} = 0 \qquad \underline{M}_{32z2} = 0 \tag{25}$$

Z równań (25) otrzymano:

$$\underline{M}_{12y1} = (\underline{M}_{23x2} - \underline{M}_{02x})s\Theta_2 - \left[\underline{M}_{02y} - l_2(\underline{F}_{2z} + \underline{R}_{32z})\right]c\Theta_2$$

$$\underline{M}_{12z1} = -\underline{M}_{02z} - l_2(\underline{F}_{2y} + \underline{R}_{32y}), \quad \underline{R}_{21z} = \underline{F}_{2z} + \underline{R}_{32z} \tag{26}$$

Równania równowagi ogniwa "3P":

$$B_{01}\underline{R}_{13P} + \underline{F}_{3P} + \underline{R}_{2P3P} = 0$$

$$B_{01}\underline{M}_{13P01} + \underline{M}_{03P} + B_{01}\underline{r} \times B_{01}\underline{R}_{13P} = 0 \quad \text{ponieważ} \quad \underline{M}_{2P3P03P} = 0 \tag{27}$$

Z równań (27) otrzymano:

$$\underline{R}_{3Pz1} = \underline{F}_{3Pz} + \underline{R}_{2P3Pz}$$

$$\underline{M}_{13Py1} = -\underline{M}_{03Px}s\Theta_{3P} - \left\{\underline{M}_{03Py} + \left[l_{3P}(\underline{F}_{3Pz} + \underline{R}_{2P3Pz})\right]\right\} c\Theta_{3P} \tag{28}$$

$$\underline{M}_{13Pz1} = -\underline{M}_{03Pz} + l_{3P}(\underline{F}_{3Py} + \underline{R}_{2P3Py})$$

Reakcje $\underline{R}_{2P3Py}$ i $\underline{R}_{2P3Pz}$ obliczono z równania równowagi sił ogniwa "2":

$$B_{02}\underline{R}_{3P2P} + \underline{F}_{2P} + \underline{R}_{32P} = 0 \tag{29}$$

Z równania (29) otrzymano:

$$\underline{R}_{2P3Py} = (\underline{R}_{2P3x} - \underline{F}_{2Px})s\Theta_3 + \underline{F}_{2Py}c\Theta_3, \quad \underline{R}_{2P3Pz} = \underline{F}_{2Pz}$$

$$\underline{R}_{2P3y} = \underline{R}_{2P3z} = 0 \tag{30}$$

Mając wartości momentów napędowych ogniw "2" i "3P", można obliczyć wartości sił działających na śruby napędowe ze wzorów:

$$F_{D2} = M_{12z1}/l_{3P}\sin\varepsilon \qquad F_{D3P} = M_{13Pz1}/l_{3P}\sin\gamma \tag{31}$$

gdzie:

$\chi = 90° + \Theta_{3P} - \alpha, \qquad \varepsilon = 180° + \Theta_2 - \beta$

$\alpha = \mathrm{arctg}(w_2 - l_{3P}\cos\Theta_{3P})/(w_1 + l_{3P}\sin\Theta_{3P})$

$\beta = \mathrm{arctg}(w_2 + l_{3P}\sin\Theta_2)/(w_1 + l_{3P}\cos\Theta_2)$

$w_1$, $w_2$ - odległość między parą obrotową śruby napędowej a parą obrotową $0_2$, mierzona w kierunku pionowym, poziomym.

Ogniwo "1"

Ogniwo "1" obciążone jest dwoma dodatkowymi reakcjami, działającymi w parach obrotowych umocowania śrub napędowych. W tym celu wprowadzono dwa układy współrzędnych, których osie "z" są usytuowane w osiach ww. par.

Kierunek osi "z" w obu układach jest jednakowy i zgodny z kierunkiem osi $z_1$, natomiast osie "x" są prostopadłe do osi śrub i przy pionowym ustawieniu śrub, posiadają kierunek zgodny z kierunkiem osi $x_1$. Macierze przekształceń tych układów współrzędnych do układu $x_1\ y_1\ z_1$ uzyskano w wyniku dwukrotnego przekształcenia i wprowadzono następujące oznaczenia macierzy wynikowych: $C_2$ - macierz przekształceń układu związanego z parą obrotową śruby napędowej ogniwa "2" do układu $0_1$, $C_{3P}$ - macierz przekształceń układu związanego z parą obrotową śruby napędowej ogniwa "3P" do układu $0_1$.

Równania równowagi ogniwa "1" mają postać:

$$T_{01,1}\underline{R}_{01} + C_{02}\underline{F}_{D2} + C_{03P}\underline{F}_{D3P} + \underline{F}_1 + \underline{R}_{21} + \underline{R}_{3P1} = 0$$

$$T_{01,1}\underline{M}_{0100} + \underline{M}_{01} + \underline{M}_{2101} + \underline{M}_{3P101} + T_{01,1}\underline{r} \times T_{01,1}\underline{R}_{01} + \tag{32}$$

$$+ C_{02}\underline{r} \times C_{02}\underline{F}_{D2} + C_{03P}\underline{r} \times C_{03P}\underline{F}_{D3P} = 0$$

Z równań (32) otrzymano:

$$\underline{M}_{01z} = \underline{M}_{01y} - \underline{M}_{12y1} - l_1(\underline{F}_{1z} + \underline{R}_{21z} + \underline{R}_{3P1z}) + 0{,}5w_3(F_{D2}\sin\beta +$$

$$- F_{D3P}\sin\alpha)$$

$w_3$ - odległość między osiami śrub.

Przykład liczbowy: dla rozpatrywanego manipulatora przyjęto dane, które zestawiono poniżej:

$t = 1{,}5$ s

$l_{3P} = 0{,}36$ m

$w_1 = 0{,}26$ m

$w_2 = 0{,}46$ m

$w_3 = 0{,}625$ m

| Nr członu / Jednost. | | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Theta$ | deg | 90 | -51,38 | -5,36 | 46,02 | -90 | 90 |
| $\dot{\Theta}$ | $\frac{1}{s}$ | 1,57 | 0,56 | 0,5 | -0,06 | 1,57 | 2,1 |
| $\ddot{\Theta}$ | $\frac{1}{s^2}$ | 0 | 2,5 | 0 | -2,5 | 0 | -5 |
| $x_s$ | m | -0,125 | -0,56 | -0,17 | -0,708 | 0 | 0 |
| $y_s$ | m | 0,301 | -0,05 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $z_s$ | m | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,041 | -0,009 |
| $J_x$ | $kgm^2$ | 45 | 28 | 1,11 | 0,634 | 0,266 | 0,0712 |
| $J_y$ | $kgm^2$ | 37 | 92 | 11,37 | 22,03 | 0,217 | 0,677 |
| $J_z$ | $kgm^2$ | 44 | 105 | 11,24 | 21,622 | 0,152 | 0,646 |
| m | kg | 282 | 220 | 143 | 30 | 18 | 33 |

Stosując wzory (17) otrzymano następujące wyniki:

| ogniwo | 5 | 4 | 3 | 3P | 2 | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_{ix}$ | -197 | -24,36 | -210 | 74 | | -93,5 | N |
| $F_{iy}$ | -212 | -35,21 | 30,5 | -160 | -254 | | N |
| $F_{iz}$ | -580 | -191,6 | 55 | -5 | 194 | 0 | N |
| $M_{0ix}$ | -1,37 | 1,53 | 0,11 | -29,3 | -23 | 0 | Nm |
| $M_{0iy}$ | 1,73 | 1,0 | 38 | -5,0 | 87 | 0 | Nm |
| $M_{0iz}$ | 1,38 | -0,29 | -23 | 24,1 | 238 | 54,19 | Nm |

Według wzorów (19)÷(33) otrzymano następujące wartości momentów dynamicznych w parach obrotowych i sił osiowych na śrubach napędowych:

$$M_{45z4} = -1{,}38 \text{ Nm}, \quad M_{34z3} = 84{,}43 \text{ Nm}, \quad M_{12z1} = -688 \text{ Nm}$$

$$M_{13Pz1} = -392 \text{ Nm}, \quad M_{01z0} = -366 \text{ Nm},$$

$$F_{D2} = -1972 \text{ N}, \quad F_{D3P} = -1148 \text{ N}.$$

## 5. Wnioski

Przedstawiona w pracy macierzowa metoda analizy manipulatora daje możliwość symulacji komputerowej kinematyki i dynamiki układu z członami sztywnymi. Otrzymane zależności dla manipulatora robota IRb-60 są typowe dla wielu stosowanych w praktyce.

Stosując metodę macierzową otrzymano siły i momenty oddziaływania elementów par kinematycznych w postaci jawnych wyrażeń analitycznych, które dają możliwość wyznaczenia obciążeń ekstremalnych.

## LITERATURA

[1] DUFFY J.: Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators. Ed. Arnold, London 1979.

[2] ILIJEW M.J., KNAPCZYK J.: Wektorowa metoda analizy położeń manipulatora z sześcioma parami obrotowymi. Materiały X Ogólnopolskiej Konferencji Naukowo-Dydaktycznej TMM, Warszawa 1984, s. 46÷52.

[3] LITVIN F.L., PARENTI CASTELLI V., PHILLIPS R.H.: Manipulators: Execution of Prescribed Trajectories, special Link Positions and Versions of Assembly. Mechanism and Machine Theory, vol. 21, No 2, pp. 173÷185, 1986.

[4] PAUL R.: Robot Manipulators: Mathematics Programming and Control. MIT Press, Masachusetts, 1981.

[5] PENNOCK G.R., YANG A.T.: Dynamic Analysis of Multi-Rigid-Body Open-Chovin System. Trans. ASME, Journal of Mechanisms, Transm. and Autom. in Design., vol. 105, 1983, pp. 28÷34.

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАНИПУЛЯТОРА С ПЯТЬЮ ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ ПАРАМИ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ ДЛЯ ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ

Р е з ю м е

В работе представлен матричный метод кинематического и динамического анализа манипулятора с 5 вращательными кинематическими парами при использовании квадратных матриц 4x4 трансформации, введенных Денавитом и Тартенбергом. Разработана вычислительная процедура для реализации заданной траектории точки и ориентации схвата. Определены в явном виде силы и моменты реакций в кинематических парах вызванных инерционными свойствами звеньев. Представлены числовые примеры кинематического и динамического анализа манипулятора робота.

KINEMATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF FIVE-ROTARY-PAAR MANIPULATOR BY MEANS OF A MATRIX METHOD FOR A FIXED MOTION TRAJECTORY

S u m m a r y

In this paper we present matrix method of kinematic and dynamic analysis of the 5 R manipulator based on transformation matrices 4 x 4 proposed by Denavit and Hartenberg. A simple computation procedure has been worked out for the execution of the trajectory and orientation of the gripper. Next we present a systematic procedure to determine, in closed-form expression, the joint forces and for torques, reaction forces and moments exerted on each link in the system.

We illustrate the procedure with two numerical examples for a IRb-60 R5 manipulator.

Recenzent: Prof. zw. dr inż. Adam Morecki

Wpłynęło do redakcji 17.XI.1986 r.