ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1987

Seria: MECHANIKA z. 85 Nr kol. 1010

XI OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA TEORII MASZYN I MECHANIZMÓW

11th POLISH CONFERENCE ON THE THEORY OF MACHINES AND MECHANISMS

27—30. 04. 1987 ZAKOPANE

Maciej KRAWCZAK
Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

METODA SUBOPTYMALNEGO STEROWANIA ZDECENTRALIZOWANEGO W SYSTEMACH ROBOTYKI

Streszczenie. Nieliniowy model robota-manipulatora może być traktowany jako zbiór połączonych podsystemów. Każdy z podsystemów odpowiada jednemu stopniowi swobody. Zakłada się, że model każdego podsystemu jest liniowym równaniem różniczkowym, a połączenia między podsystemami realizowane są przez nieliniowe funkcje stanu. Zatem każdy podsystem może być traktowany jako liniowy system z nieliniowym zaburzeniem regularnym. Do znalezienia sterowań suboptymalnych wykorzystano teorię zaburzeń. Zmienną sprzężoną do stanu każdego podsystemu rozwinięto w zbieżny szereg funkcyjny. W konsekwencji otrzymano zbiór różniczkowych równań Riccatiego oraz ciąg rekurencyjnych quasi-liniowych równań różniczkowych cząstkowych. Jeżeli człony sprzęgające podsystemy są wielomianami, to rozwiązania równań quasi-liniowych też są wielomianami ze względu na stan. W pracy podano szereg twierdzeń.

1. Wprowadzenie

W pracy rozważa się zagadnienie sterowania robotem-manipulatorem traktowanym jako duży system mechaniczny. Podobnie jak w pracy [10], synteza sterowania składa się z dwóch etapów. W pierwszym etapie wyznaczane jest sterowanie optymalne, programowe dające trajektorię programową przy założeniu, że nie oddziałują żadne zakłócenia na system. W drugim etapie poszukuje się sterowań realizujących śledzenie trajektorii programowej, przy założeniu, że albo model systemu nie jest idealny, albo na system działają zakłócenia. Tak więc w drugim etapie rozpatruje się model odchyleniowy systemu.

Model odchyleniowy dynamiki układu mechanicznego o N stopniach swobody jest reprezentowany przez układ nieliniowych równań różniczkowych. Zakłada się, że każdy ze stopni swobody może być opisany liniowym równaniem różniczkowym, w którym występuje człon nieliniowy (traktowany jako regularne zaburzenie). Każdy stopień swobody stanowi zatem podsystem, a występujące człony nieliniowe sprzęgają dany podsystem z pozostałymi.

Ta specyfika modelu systemu mechanicznego została wykorzystana w niniejszej pracy, w której przedstawiono metodę regularnego zaburzenia.

Zagadnienie dwóch liniowych podsystemów sprzężonych ze sobą liniowo zostało rozpatrzone w pracy [5]. Suboptymalne sterowania dla tego problemu zostały otrzymane poprzez aproksymację odpowiednich równań Riccatiego.

W przypadku układów nieliniowych znalezienie sterowań optymalnych jest albo bardzo trudne, albo wręcz niemożliwe, dlatego większość wysiłków poświęcono na znalezienie sterowań suboptymalnych. Część metod, np. [1, 3], aproksymuje rozwiązanie równania Hamiltona-Jacobiego-Bellmana, druga część, np. [6, 8, 9], oparta jest na aproksymacji wektora sprzężonego do wektora stanu.

W tej pracy rozwija się w szereg funkcyjny zmienne sprzężone do wektora stanu każdego podsystemu. Przyjęto, że wskaźniki jakości każdego podsystemu są kwadratowymi funkcjonałami ze względu na stan i sterowanie podsystemu. Zastosowanie teorii zaburzeń pozwoliło otrzymać zbiór N różniczkowych równań Riccatiego oraz rekurencyjny ciąg quasi-liniowych równań cząstkowych. Następnie założono, że nieliniowe człony zaburzające są wielomianami ze względu na stan podsystemów. Udowodniono, że w takim przypadku rozwiązania quasi-liniowych równań cząstkowych też są wielomianami ze względu na stan podsystemów. Udowodniono również twierdzenie o aproksymacji wskaźników jakości, a także twierdzenie o rzędzie aproksymacji wskaźników jakości.

2. Sformułowanie zagadnienia

Załóżmy, że każdy stopień swobody manipulatora opisany jest następującym modelem odchyleniowym:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + \varepsilon f_i(x,t), \qquad i = 1,\dots,N, \tag{1}$$

gdzie:

$x_i(t) = z_i(t) - z_i^o(t)$,

$z_i(t)$ - stan aktualny,

$z_i^o(t)$ - stan programowy,

$u_i(x,t)$ - sterowanie,

A_i, B_i są macierzowymi funkcjami ciągłymi, f_i realizuje sprzężenia między podsystemami, zaś ε jest parametrem skalarnym.

Następnie zakłada się minimalizację wskaźnika jakości:

$$J = \sum_{i=1}^{N} J_i, \tag{2}$$

gdzie:

$$J_i = \frac{1}{2} x'(T) Q_{if} x(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (x_i' Q_i x_i + u_i' R_i u_i) dt \tag{3}$$

gdzie Q_{if}, Q_i i R_i spełniają warunki regulatora liniowo-kwadratowego [4]. Łatwo zauważyć, że $\varepsilon > 0$, ponieważ podsystemy są połączone ze sobą. Warunki konieczne optymalności prowadzą do [6]:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + \varepsilon f, \qquad x_i(0) = x_i^o \tag{4}$$

$$\dot{p}_i = -Q_i x_i - A_i' p_i - \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)' p_j, \qquad p_i(T) = Q_{if} x_i(T) \tag{5}$$

a dla rozpatrywanego przypadku bez uwzględniania ograniczeń na sterowania i stany sterowania mają postać:

$$u_i = -R_i^{-1} B_i p_i \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\ldots,N. \tag{6}$$

Podstawiając (6) do (4)-(5) otrzymujemy następujący zbiór regularnie zaburzonych zagadnień dwubrzegowych:

$$\dot{x}_i = A_i x_i - B_i R_i^{-1} B_i' p_i + \varepsilon f_i \qquad x_i(0) = x_i^o \tag{7}$$

$$\dot{p}_i = Q_i x_i - A_i' p_i - \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)' p_j, \quad p_i(T) = Q_{if} x_i(T). \tag{8}$$

3. Aproksymacja sterowań

W pracy [6] pokazano, że zmienna sprzężona p_i może być rozwinięta w szereg funkcyjny:

$$p_i(x,t;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_i^{(k)}(x,t). \tag{9}$$

Różniczkując (9) wyraz po wyrazie otrzymujemy:

$$\dot{p}_i = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\partial p_i^{(k)}}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial p_j^{(k)}}{\partial t} \right]. \tag{10}$$

Podstawiając (7) i (9) do (10) otrzymujemy:

$$\dot{p}_i = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left\{ \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial p_i^{(k)}}{\partial x_j} \left[A_j x_j + \varepsilon f_j - S_j \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_j^{(k)} \right] + \frac{\partial p_j^{(k)}}{\partial t} \right\} \tag{11}$$

gdzie

$$S_i = B_i R_i^{-1} B_i'.$$

Po podstawieniu (9) i (11) do (8), a następnie porównując wyrazy stojące przy tej samej potędze parametru ε otrzymujemy:

dla $k = 0$ macierzowe równanie Riccatiego

$$\dot{P}_i = -P_i A_i' - A_i P_i - Q_i + P_i S_i P_i, \qquad P_i(T) = Q_{if}; \tag{12}$$

dla $k = 1,2,\ldots$

$$\frac{\partial p_i^{(k)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial p_i^{(k)}}{\partial x_j} (A_j - S_j P_j) x_j + (A_i - A_i P_i)' p_i^{(k)} = h_i^{(k)} \tag{13}$$

$$p_i^{(k)}(x,T) = 0 \qquad \forall x$$

gdzie:

$$h_i^{(k)} = \begin{cases} -p_i^{(k-1)} f_i - \sum\limits_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)' p_j^{(k-1)} x_j & \text{dla} \quad k = 1 \\ - \sum\limits_{j=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)' p_j^{(k-1)} + \frac{\partial p_i^{(k-1)}}{\partial x_j} f_j \right] + \sum\limits_{j=1}^{N} \sum\limits_{l=1}^{k-1} \frac{\partial p_i^{(l)}}{\partial x_j} S_j p_j^{(k-1)} & \text{dla} \quad k = 2,3,\ldots \end{cases} \tag{14}$$

Tak więc pokazaliśmy, że nieliniowe zagadnienie dwubrzegowe (7)-(8) może być rozwiązane poprzez rozwiązanie macierzowego równania różniczkowego Riccatiego (12) oraz ciągu quasi-liniowych cząstkowych równań różniczkowych.

Zakładając, że człon sprzęgający f_i, $i = 1,2,\dots,N$, jest wielomianem względem x, łatwo jest zauważyć, że $h_i^{(1)}$ jest także wielomianem względem x.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1

Jeżeli $f_i(x,t)$ jest wielomianem względem x, to rozwiązanie $p_i^{(k)}$ równania (13) dla $k = 1,2,\dots$ jest także wielomianem względem x.

Dowód

Wprowadzając oznaczenie, dla $k = 1,2,\dots,$

$$z^i = p_i^{(k)}$$

$$H^i = A_i - S_i P_i$$

$$v^i = h_i^{(k)}$$

$$y^i = x_i$$

możemy zapisać (13) następująco:

$$\frac{\partial z^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\sum_{j=1}^{N} y^{j\prime} H^{j\prime} z^j\right) = v^i \tag{15}$$

lub:

$$\frac{\partial z^i}{\partial t} + \frac{\partial z^i}{\partial y^i} H^i y^i = v^i - H^{\prime i} z^i - \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} y^{j\prime} H^{j\prime} z^j\right) \tag{16}$$

$$z^i(y,T) = 0 \quad \forall y, \qquad y = \{y^1, y^2, \dots, y^N\}'.$$

Równanie (16) możemy także zapisać w postaci skalarnej:

$$\frac{\partial z^i_\alpha}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{n} a^i_\beta \frac{\partial z^i_\beta}{\partial y^i_\beta} = b^i_\alpha, \qquad z^i_\alpha(y,T) = 0 \quad \forall y \tag{17}$$

gdzie:

$$b^i_\alpha = v^i_\alpha - \sum_{\gamma=1}^{n} H^i_{\gamma\alpha} z^i_\gamma - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \left[\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial z^j_\beta}{\partial y^i_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{n} H^j_{\beta\gamma} y^j_\gamma + \sum_{\gamma=1}^{n} H^j_{\gamma\alpha} z^j_\gamma \right] \tag{18}$$

przy czym $\alpha, \beta = 1,2,\ldots,n$, $H^i_{\alpha\beta}$ zaś jest elementem macierzy H^i, a z^i_α elementem wektora z^i.

Współczynniki a^i_β, $i = 1,2,\ldots,N$, $\beta = 1,2,\ldots,n$ zależą od t i y^i, a współczynniki b^i_α, $\alpha = 1,2,\ldots,n$ zależą od t, y^i oraz z^j, $j=1,2,\ldots,N$. Współczynniki a^i_β są takie same dla każdego β. Równania takie nazywane są równaniami z identyczną częścią zasadniczą ([2]). Stosownie do [2] całkowanie równań (17) jest równoważne całkowaniu następujących równań charakterystycznych:

$$dt = \frac{dy^i_\beta}{a^i_\beta} = \frac{dz^i_\alpha}{b^i_\alpha} \tag{19}$$

W postaci macierzowej równania charakterystyk mają postać:

$$\dot{y}^i = H^i y^i$$

$$\dot{z}^i = v^i - H'^i z^i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \left[\frac{\partial z^j}{\partial y^i} H^j y^j + H'^j z^j \right]. \tag{20}$$

Równanie (20) jest równaniem liniowym, a biorąc pod uwagę fakt, że v^i jest wielomianem względem y, więc rozwiązanie równania (13) także może być zapisane w formie wielomianu względem y. $\square$

W ten sposób problem rozwiązania równania quasi-liniowego (13) został sprowadzony do znalezienia współczynników odpowiedniego wielomianu ([7]).

4. Własności rozwiązania suboptymalnego

Ze względów praktycznych tylko kilka pierwszych wyrazów ciągu (13) może być wyznaczonych. Rozważmy sterowania suboptymalne, czyli:

$$\bar{u}_i = -R_i^{-1} B'_i \left[P_i x + \sum_{k=1}^{w_i} \varepsilon^k P_i^{(k)} \right], \quad i = 1,2,\ldots,N, \tag{21}$$

gdzie w_i oznacza rząd aproksymacji i-tego podsystemu.

Przytoczymy teraz trzy twierdzenia (bez dowodów) charakteryzujące własności sterowań suboptymalnych.

Twierdzenie 2

Jeżeli P_i jest rozwiązaniem równania (12), a $p_i^{(k)}$, $k = 1,2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,N$, jest rozwiązaniem równania (13), to wskaźnik jakości J_i (3) i-tego podsystemu ma następującą formę:

$$J_i = \frac{1}{2} x_i'(t) P_i(t) x_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k J_i^{(k)}[x(t),t] \tag{22}$$

gdzie $t \in [0,T]$, a $J_i^{(k)}$ jest rozwiązaniem równania:

$$\frac{\partial J_i^{(k)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} x_j'(A_j - S_j P_j)' \frac{\partial J_i^{(k)}}{\partial x_i} = q_i^{(k)} \tag{23}$$

przy czym

$$g_i^{(k)} = \begin{cases} -x_i' P_i f_i & \text{dla} \quad k = 1 \\ -\sum_{j=1}^{N} f_j' \dfrac{\partial J_i^{(k-1)}}{\partial x_j} - \dfrac{1}{2} \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{N} p_i'^{(l)} E_j p_j^{(k-l)} + \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{N} p_j'^{(k-l)} E_j \dfrac{\partial J^{(l)}}{\partial x_j} & \end{cases}$$

$$\text{dla} \quad k = 2,3,\ldots \tag{24}$$

W następnym twierdzeniu rozważa się rząd aproksymacji wskaźników jakości.

Twierdzenie 3

Jeżeli:

$$\bar{p}_i = P_i x_i + \sum_{k=1}^{w_i} \varepsilon^k p_i^{(k)}, \quad i = 1,2,\ldots,N \tag{25}$$

jest wyznaczone optymalnie aż do rzędu w_i, to wskaźnik jakości J_i jest optymalny aż do rzędu $2w_i$.

Dowód

Niech $\bar{p}_i$ jest rozwiązaniem równania (13) aż do rzędu w_i, to strategie $\bar{u}_i$ też są wyznaczone optymalnie aż do rzędu w_i. Podstawiając $\bar{u}_i$ do (3) można zaobserwować, że ze względu na występowanie kwadratowych form w (3) wskaźnik jakości J_i może być zapisany w formie:

$$J_i(\bar{u}_i) = J_i(u_i^*) + \mathcal{E}^{2w_i+1}\Lambda_i \tag{26}$$

gdzie u_i^* oznacza strategie optymalne $(w_i = \infty)$, a Λ_i oznacza resztę szeregu potęgowego. $\square$

Następne twierdzenie mówi o asymptotycznej własności sterowań suboptymalnych.

Twierdzenie 4

Sterowanie suboptymalne $\bar{u}_i$ ma następującą własność:

$$J_i(\bar{u}_i) = J_i(u_i^*) + O(\mathcal{E}^{2w_i+1}). \tag{27}$$

Dowody przytoczonych twierdzeń są podobne do dowodów odpowiednich twierdzeń zamieszczonych w pracy [6].

5. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono aproksymację optymalnych sterowań nieliniowego systemu podzielonego na podsystemy. Założono, że podsystemy te są liniowe, zaś człony sprzęgające są nieliniowe. Warunki konieczne optymalności dają układ nieliniowych zagadnień dwubrzegowych, których rozwiązania mogą być rozwinięte w szeregi potęgowe. W rezultacie otrzymano zbiór różniczkowych równań Riccatiego oraz ciąg quasi-liniowych różniczkowych równań cząstkowych.

Własności rozwiązań suboptymalnych przedstawiono jako tezy przedstawionych twierdzeń.

LITERATURA

[1] BALDWIN J.F., SIMS WILLIAMS J.H.: The use of a method of perturbations in the synthesis of closed-loop optimal control laws for nonlinear systems. Automatica, Vol. 5, 1969.

[2] COURANT R., HILBERT D.: Methods of mathematical physics. Interscience Publishers, N-Y, 1962.

[3] GARRARD W.L., McCLAMROCK N.H., CLARK L.G.: An approach to suboptimal feedback control of nonlinear systems. Int. J. Control, vol. 5, 1967.

[4] KALMAN R.E.: Contributions to the theory of optimal control. Boletin de la Sociedad, vol. 5, 1960.

[5] KOKOTOVIC P.V.: Feedback design of large linear systems, w J.B. Cruz (ed.): Feedback systems, McGraw-Hill, N-Y, 1972.

[6] KRAWCZAK M.: Suboptimal strategies for Nash nonlinear differential games, [w:] K. Malanowski i K. Mizukami (eds.): Analysis and algorithms of optimization problems, Springer, 1986.

[7] KRAWCZAK M.: Nash game with regular polynomial perturbation. Proceedings 12th IFIP Conference, Budapest 1985. Springer, 1986.

[8] KRAWCZAK M.: Nonlinear $\mathcal{E}$-coupling of large-scale linear systems. 4th IFAC/IFORS Symposium LSS.TA, Zurich 1986.

[9] NISHIKAWA Y., SANNOMIYA N., ITAKURA H.: Suboptimal design of a nonlinear feedback system. Automatica, vol, 7, 1971.

[10] VUKOBRATOVIC M., STOKIC D.: Contribution to suboptimal control of manipulation robots. IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-28, 1983.

МЕТОД СУБОПТИМАЛЬНОГО ДЕЦЕНТРАЛИЗИРОВАНОГО УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ РОБОТИКИ

Р е з ю м е

Нелинейную модель робота-манипулятора можно рассматривать как совокупность соединенных подсистем. Каждая подсистема соответствует одной степени свободы. Предполагаем, что каждая подсистема описана линейным дифференциальным уравнением. Связи между подсистемами осуществляются посредством нелинейных функций состояния. Следовательно, любую подсистему можно рассматривать как линейную в присутствии нелинейной регулярной пертурбации. Чтобы найти субоптимальное управление использована теория малого параметра. Для каждой подсистемы вычислено разложение в функциональный ряд переменной сопряженной к состоянию. В результате получена система уравнений Риккатего и последовательность рекурентных квази-линейных уравнений в частных производных. Решения этих квази-линейных уравнений являются многочленами, если только сопрягающие члены подсистем тоже многочлены. В работе доказан ряд теорем.

A METHOD OF SUBOPTIMAL DECENTRALIZED CONTROL IN ROBOTIC SYSTEMS

S u m m a r y

A nonlinear model of a robot-manipulator can be considered as a set of interconnected subsystems. Each subsystem is associated with one degree of freedom. It is assumed that the model of each subsystem is a linear differential equation while interconnections are nonlinear function of the system state.

Each subsystem is understood as a linear system with nonlinear regular perturbation. The theory of perturbation has been applied to find suboptimal control. The costate of each subsystem has been expanded in a convergent power series. The approach allows us to obtain a set of Riccati differential equations and series of coupled quasi-linear partial differential equations. It has been shown that the solution of these partial differential equations has a form of a polynomial provided that the perturbation terms are polynomials in the state. Several theorem have been included.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Witold Pedrycz

Wpłynęło do redakcji 7.XI.1986 r.