

**XI OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA TEORII MASZYN  
I MECHANIZMÓW****11th POLISH CONFERENCE ON THE THEORY OF MACHINES  
AND MECHANISMS****27—30. 04. 1987 ZAKOPANE**

Kazimierz MACZYŃSKI, Jerzy PŁOSA, Stanisław WOJCIECH

Instytut Mechaniczno-Konstrukcyjny  
Politechnika Łódzka, Filia w Bielsku-Białej**DYNAMIKA MECHANIZMU JARZMOWEGO Z UWZGLĘDNIENIEM PODATNOŚCI WAHACZA**

**Streszczenie.** W pracy rozważany jest ruch mechanizmu korbowo-jarzmowego posiadającego odkształcalny wahacz. Model zbudowany metodą sztywnych elementów skończonych umożliwia uwzględnienie drgań giętych oraz własności sprężysto-tłumiących wahacza. Przyjęto, że ruch mechanizmu wymuszony jest momentem  $M$  działającym na korbę. Ułożono równania ruchu oraz przedstawiono metodę i algorytm rozwiązania numerycznego.

W przykładach obliczeniowych przedstawiono ruch korby oraz przemieszczenia wybranego punktu wahacza dla różnych rodzajów momentu napędowego  $M(t)$  oraz różnych wartości tłumienia.

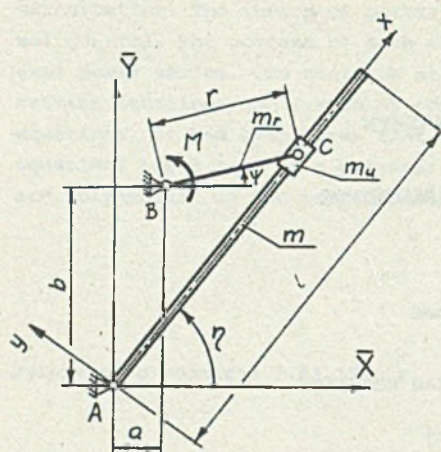
**1. Wstęp**

Problemy analizy dynamicznej mechanizmów dźwigniowych o podatnych ogniwach są w literaturze rozwiązywane głównie dla mechanizmów o stałych długościach ogniw (mechanizm korbowo-wahaczowy, mechanizm korbowo-suwowy itp.). Analiza dynamiczna mechanizmu jarzmowego napotyka na trudności nie występujące w analizie mechanizmów dźwigniowych o stałych długościach ogniw. Niżej przedstawia możliwość zastosowania metody sztywnych elementów skończonych do klasy mechanizmów o długościach ogniw zmiennych w czasie ruchu mechanizmu.

**2. Model mechanizmu**

Na rys. 1 przedstawiono schemat rozpatrywanego mechanizmu spełniającego założenia:

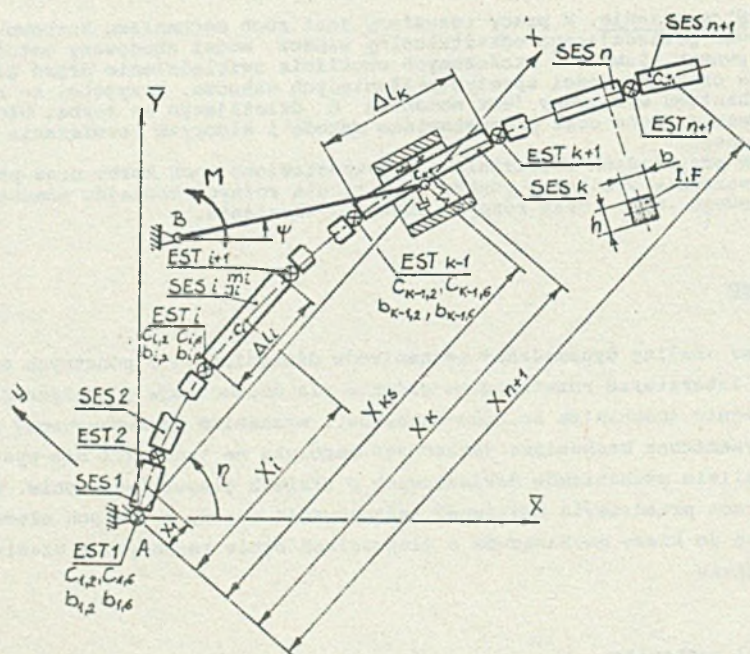
- pomija się tarcie i luzy w węzłach.



Rys. 1

- wahacz jest jednorodną belką pryzmatyczną o własnościach sprężysto-tłumiących,
- korba jest jednorodną belką pryzmatyczną sztywną,
- wymuszenie ruchu realizowane jest momentem przyłożonym do korby,
- ugięcia wahacza zawierają się w zakresie małych odkształceń sprężystych,
- pomija się wpływ odkształceń wzdłużnych wahacza na ruch mechanizmu.

Model przedstawiony na rys. 2 zbudowano metodą sztywnych elemen-



Rys. 2

tów skończonych [1], [4]. Korbę zamodelowano jako jeden SES połączony sztywnymi węzłami obrotowymi z ostoją i suwakiem, wahacz jako układ (n+1) sztywnych elementów skończonych, każdy o dwóch stopniach swobody, połączo-



nych ze sobą elementami sprężysto-tłumiącymi. Połączenie sztywnego suwaka z wahaczem realizowane jest za pośrednictwem elementu sprężysto-tłumiącego.

Zgodnie z oznaczeniami na rys. 2 przyjęto:

$$\Delta l_i = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{jeśli } 1 < i < n + 1, \\ \frac{1}{2n}, & \text{jeśli } i = 1 \text{ lub } i = n + 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$m_i = bh\rho\Delta l_i,$$

$$I_i = \frac{m_i [(\Delta l_i)^2 + h^2]}{12},$$

gdzie:

$\rho$  - gęstość materiału wahacza.

Posługując się modelem reologicznym Kelvina-Voigta [1], [2], określono:

$$\begin{aligned} b_{1,2} &= \frac{\bar{\eta}Fn}{I}, & c_{1,2} &= \frac{GFn}{I}, \\ b_{1,6} &= \frac{\eta In}{I}, & c_{1,6} &= \frac{EIn}{I}, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie:

- $\bar{\eta}, \eta$  - stałe tłumienia,
- $I$  - moment bezwładności przekroju,
- $E, G$  - moduły: Younga i Kirchhoffa,
- $b_{1,2}, b_{1,6}$  - współczynniki tłumienia poprzecznego i giętnego EST nr 1,
- $c_{1,2}, c_{1,6}$  - współczynniki sprężystości poprzecznej i giętnej EST nr 1.

### 3. Równania ruchu

Do opisu ruchu mechanizmu wykorzystano układ globalny  $\bar{XO}\bar{Y}$  (nieruchomy, związany z ostoją) i lokalny  $xoy$  (ruchomy, związany z wahaczem).

Z zależności kinematycznych [3] otrzymano:

$$x_{ks} = \sqrt{(a + r\cos\psi)^2 + (b + r\sin\psi)^2}, \quad (3)$$

$$\dot{\eta} = \kappa\dot{\psi} \quad (4)$$

$$\ddot{\eta} = \kappa\ddot{\psi} + \varepsilon\dot{\psi} \quad (5)$$

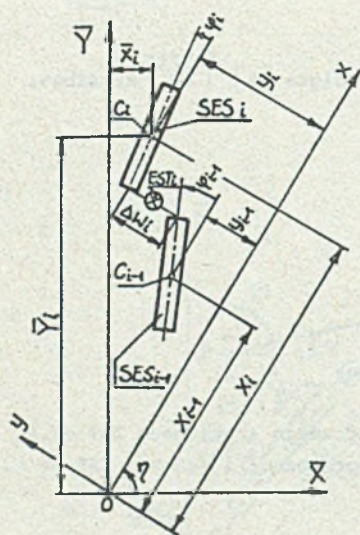
gdzie:

$$\dot{x} = \frac{1}{2} \frac{r^2 + r(a \cos \varphi + b \sin \varphi)}{x_{ks}},$$

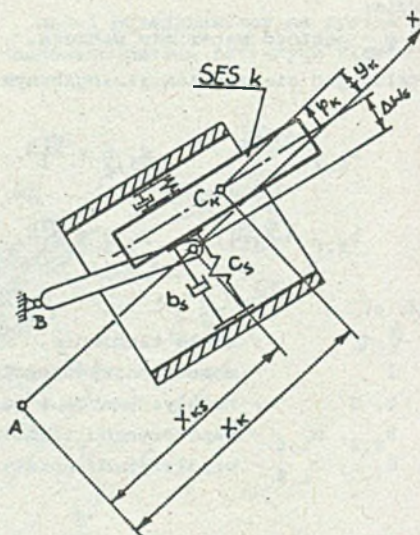
$$\varepsilon = \frac{r}{x_{ks}} (b \cos \varphi - a \sin \varphi) \left\{ x_{ks}^2 - 2[r^2 + r(a \cos \varphi + b \sin \varphi)] \right\}.$$

Równania różniczkowe ruchu mechanizmu wyznaczono z równań Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \quad (6)$$



Rys. 3



Rys. 4

Energie kinetyczna  $T$  i potencjalna  $V$  wahacza (rys. 3) wyrażone są wzorami:

$$T = \sum_{i=1}^{n+1} T_i, \quad (7)$$

gdzie:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (\dot{\bar{x}}_i^2 + \dot{\bar{y}}_i^2) + \frac{1}{2} J_i (\dot{\varphi} + \dot{\phi}_i)^2,$$

$$\bar{x}_i = x_i \cos \eta - y_i \sin \eta,$$

$$\bar{y}_i = x_i \sin \eta + y_i \cos \eta.$$



$$v = \sum_{i=1}^{n+1} v_i, \quad (8)$$

gdzie:

$$v_i = v_i^c + v_i^g,$$

$$v_i^c = \frac{1}{2} C_{1,6} (\varphi_i - \varphi_{i-1})^2 + \frac{1}{2} C_{1,2} (\Delta W_i)^2,$$

$$v_i^g = m_i g \bar{y}_i,$$

$$\Delta W_i = y_i - y_{i-1} - \frac{1}{2} \Delta l_i \varphi_i - \frac{1}{2} \Delta l_{i-1} \varphi_{i-1}.$$

Energia potencjalna podatnego połączenia suwaka z wahaczem (rys. 4) wyraża się wzorem:

$$v_s = \frac{1}{2} C_s (\Delta W_s)^2, \quad (9)$$

gdzie:

$$\Delta W_s = y_k - (x_k - x_{ks}) \varphi_k,$$

k - numer SES współpracujący z suwakiem.

Energie kinetyczną i potencjalną korby i suwaka określają wzory:

$$T_r = \frac{1}{6} m_r r^2 \dot{\psi}^2, \quad (10)$$

$$v_r = m_r g \left( \frac{1}{2} r \sin \psi + b \right), \quad (11)$$

$$T_u = \frac{1}{2} m_u (r \dot{\psi})^2, \quad (12)$$

$$v_u = m_u g (r \sin \psi + b). \quad (13)$$

Energia kinetyczna i potencjalna całego mechanizmu wyraża się więc:

$$T = \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ \frac{1}{2} m_i [y_i^2 \dot{\psi}^2 x_i^2 + (\dot{y}_i + x_i x \dot{\psi})^2] + \frac{1}{2} J_i (x \dot{\psi} + \dot{\varphi}_i)^2 \right\} \\ + \left( \frac{1}{6} m_r + \frac{1}{2} m_u \right) r^2 \dot{\psi}^2, \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 V = & \sum_{i=1}^{n+1} \left[ \frac{1}{2} C_{1,6} (\varphi_i - \varphi_{i-1})^2 + \frac{1}{2} C_{i,2} (y_i - y_{i-1} - \frac{1}{2} \Delta^1 \varphi_i - \frac{1}{2} \Delta^1 \varphi_{i-1})^2 \right. \\
 & + m_i g (x_i \sin \eta + y_i \cos \eta) \left. \right] + \frac{1}{2} C_s [y_k - (x_k - x_{ks}) \varphi_k] \\
 & + m_s g \left( \frac{1}{2} r \sin \psi + b \right) + m_u g (r \sin \psi + b). \quad (15)
 \end{aligned}$$

Ponieważ w przyjętym modelu tłumienie występuje tylko w wahaczu i jego połączeniu z suwakiem, funkcja dysypacji energii [2] wyraża się wzorem:

$$D = \sum_{i=1}^{n+1} (D_i) + D_s, \quad (16)$$

gdzie:

$$D_i = \frac{1}{2} b_{i,2} (\Delta \dot{w}_i)^2 + \frac{1}{2} b_{i,6} (\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1})^2,$$

$$D_s = \frac{1}{2} b_s (\Delta \dot{w}_s)^2,$$

przy czym  $\Delta w_i$ ,  $\Delta w_s$  określono zależnościami (8), (9).

Po przekształceniach otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 D = & \sum_{i=1}^{n+1} \left[ \frac{1}{2} b_{i,6} (\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1})^2 + \right. \\
 & + \frac{1}{2} b_{i,2} (\dot{y}_i - \dot{y}_{i-1} - \frac{1}{2} \Delta^1 \dot{\varphi}_i - \frac{1}{2} \Delta^1 \dot{\varphi}_{i-1})^2 \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{2} b_s [\dot{y}_k - x_k \dot{\varphi}_k - \dot{\varphi}_k (x_k - x_{ks}) + \frac{r}{x_{ks}} (b \cos \psi - a \sin \psi) \dot{\psi}]. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Podstawiając (14), (15), (17) do (6) otrzymuje się równania ruchu:

$$A \ddot{u} + B \dot{u} + C u = F; \quad (18)$$

gdzie:

$A = A(u)$  - macierz mas (rys. 5),

$B = B(u, \dot{u})$  - macierz tłumienia (rys. 6),

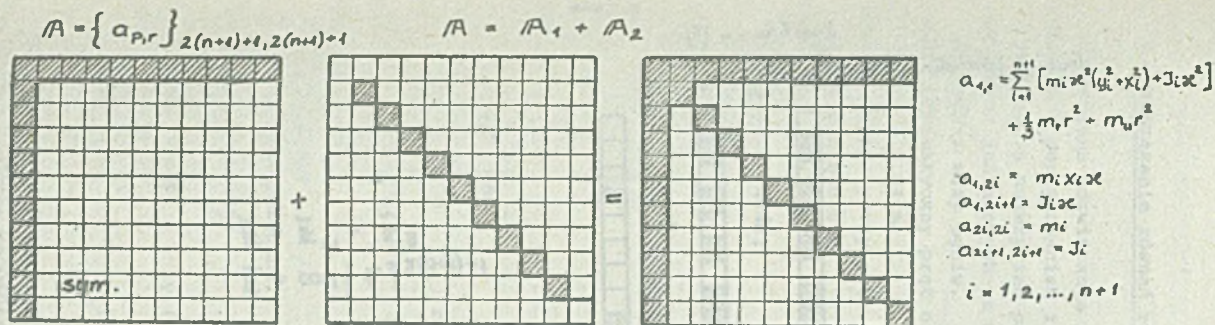
$C = C(u)$  - macierz sztywności (rys. 7),

$F = F(u)$  - wektor prawych stron (rys. 8),

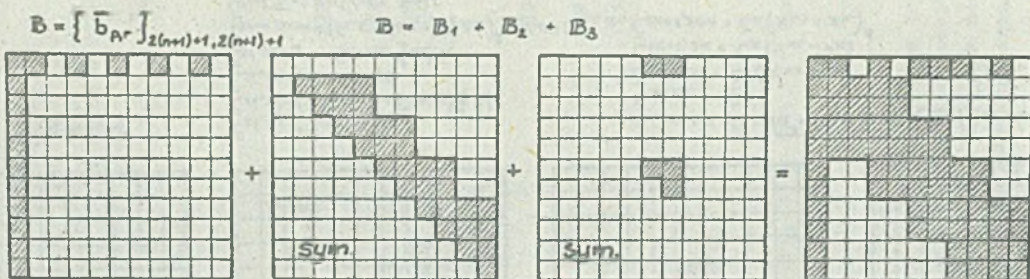
$u$  - wektor współrzędnych uogólnionych

$$u = [\psi, y_1, \varphi_1, y_2, \varphi_2, \dots, y_i, \varphi_i, \dots, y_{n+1}, \varphi_{n+1}]^T.$$





Rys. 5



$$\bar{b}_{1,1} = \psi \sum_{l=1}^{n+1} [m_l x_l \varepsilon (y_l^2 + x_l^2) + J_l x_l \varepsilon]$$

$$\bar{b}_{1,2i} = 2\psi m_i y_i x_i^2$$

$$\bar{b}_{2i,1} = \psi m_i (x_i \varepsilon - y_i x_i^2)$$

$$\bar{b}_{2i+1,1} = \psi J_i \varepsilon$$

$$\bar{b}_{2i,2i} = b_{1,2} + b_{i+1,2}$$

$$\bar{b}_{2i,2i+1} = (-b_{1,2} + b_{i+1,2}) \frac{1}{2} \Delta l_i$$

$$\bar{b}_{2i,2i+2} = -b_{i+1,2}$$

$$\bar{b}_{2i,2i+3} = b_{i+1,2} \frac{1}{2} \Delta l_{i+1}$$

$$\bar{b}_{2i+1,2i+1} = b_{1,2} (\frac{1}{2} \Delta l_i)^2 + b_{i+1,2} (\frac{1}{2} \Delta l_i)^2 + b_{i,2} + b_{i+1,2}$$

$$\bar{b}_{2i+1,2i+2} = -b_{i+1,2} \frac{1}{2} \Delta l_i$$

$$\bar{b}_{2i+1,2i+3} = b_{i+1,2} \frac{1}{2} \Delta l_i \Delta l_{i+1} - b_{i+1,2}$$

$$\bar{b}_{1,2i} = b_3 \psi x_i a$$

$$\bar{b}_{1,2i+1} = b_3 \psi x_i a (x_{i+1} - x_i)$$

$$\bar{b}_{2i,2i} = b_3$$

$$\bar{b}_{2i,2i+1} = b_3 (x_{i+1} - x_i)$$

$$\bar{b}_{2i+1,2i+1} = b_3 (x_{i+1} - x_i)^2$$

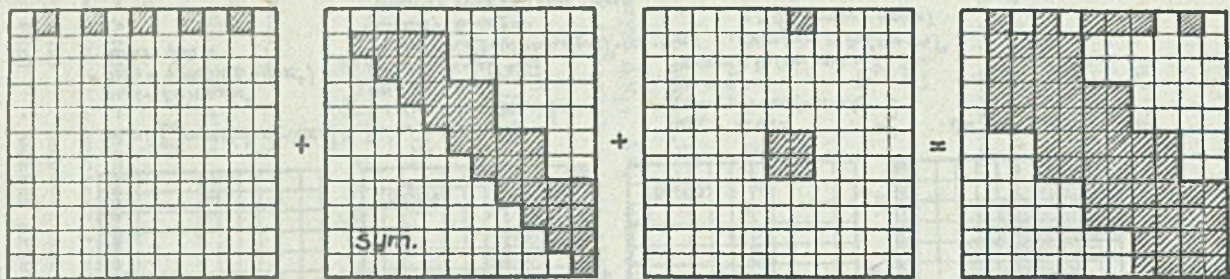
$$a = \int_{x_{i+1}}^x (b \cos \psi - a \sin \psi)$$

$$i = 1, 2, \dots, n+1$$

Rys. 6

$$C = \{ \bar{C}_{p,r} \}_{2(n+1)+1, 2(n+1)+1}$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$



$$\bar{C}_{i,2i} = -m_i g x_i \sin \varphi$$

$$\bar{C}_{2i,2i} = C_{i,2} + C_{i+1,2}$$

$$\bar{C}_{2i,2i+1} = (-C_{i,2} + C_{i+1,2}) \frac{1}{2} \Delta l_i$$

$$\bar{C}_{2i,2i+2} = -C_{i+1,2}$$

$$\bar{C}_{2i,2i+3} = C_{i+2,2} \frac{1}{2} \Delta l_{i+1}$$

$$\bar{C}_{2i+1,2i+1} = (C_{i,2} + C_{i+1,2}) \left( \frac{1}{2} \Delta l_i \right)^2 + C_{i,6} + C_{i+1,6}$$

$$\bar{C}_{2i+1,2i+2} = -C_{i+1,2} \frac{1}{2} \Delta l_i$$

$$\bar{C}_{2i+1,2i+3} = C_{i+1,2} \frac{1}{2} \Delta l_i \Delta l_{i+1} + C_{i+1,6}$$

$$\bar{C}_{i,2k+1} = C_s r \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\psi + \gamma) \left( \frac{1}{x_{ks}} (y_k - x_k \varphi_k) + \varphi_k \right)$$

$$\bar{C}_{2k,2k} = C_s$$

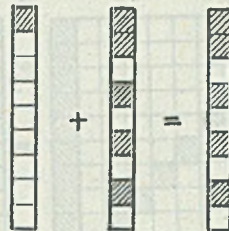
$$\bar{C}_{2k,2k+1} = C_s (X_{ks} - X_k)$$

$$i = 1, 2, \dots, n+1$$

$$\bar{C}_{2k+1,2k} = C_s (X_{ks} - X_k)$$

$$\bar{C}_{2k+1,2k+1} = C_s (X_{ks} - X_k)^2$$

Rys. 7



$$f_1^N = M$$

$$\underline{F} = \text{coll} \{ f_r \}_{2(n+1)+1}$$

$$\underline{F} = \underline{F}^M + \underline{F}^S$$

$$f_1^S = \left[ \sum_{i=1}^{n+1} (-m_i g x_i \cos \varphi) \right] - g r \cos \varphi \left( \frac{m r}{2} + m_w \right)$$

$$f_2^S = -m_i g \cos \varphi$$

Rys. 8



Równania (18) stanowią układ nieliniowych równań różniczkowych drugiego rzędu.

#### 4. Rozwiązanie równań ruchu

Numeryczne rozwiązanie równań ruchu uzyskano przy zastosowaniu metody Newmarka z postępowaniem iteracyjnym w każdym kroku całkowania [4].

Obliczenia numeryczne przeprowadzono przy podanych niżej wartościach liczbowych jednakowych we wszystkich zestawach danych do obliczeń.

Wymiary i masy ogniw.

korba: pryzmatyczny pręt o długości  $r = 0,2$  m i przekroju kwadratowym  $0,04$  m x  $0,04$  m

wahacz: pryzmatyczny pręt o długości  $l = 1$  m i przekroju kwadratowym  $0,016$  m x  $0,016$  m

suwak:  $m_u = 0,2$  kg.

Wymuszenie ruchu:

$$M_a(t) = \begin{cases} At^2 & \text{jeśli } t < \frac{1}{2} t_r \\ M_0 - A(t-t_r)^2, & \text{jeśli } \frac{1}{2} t_r \leq t < t_r \\ M_0 & \text{jeśli } t \geq t_r \end{cases} \quad (19)$$

lub

$$M_b(t) = \begin{cases} At^2 & \text{jeśli } t < \frac{1}{2} t_r \\ M_0 - A(t-t_r)^2, & \text{jeśli } \frac{1}{2} t_r \leq t < t_r \\ M_0 - B\dot{\psi} & \text{jeśli } t > t_r \end{cases} \quad (20)$$

gdzie:

$A, B$  - stałe

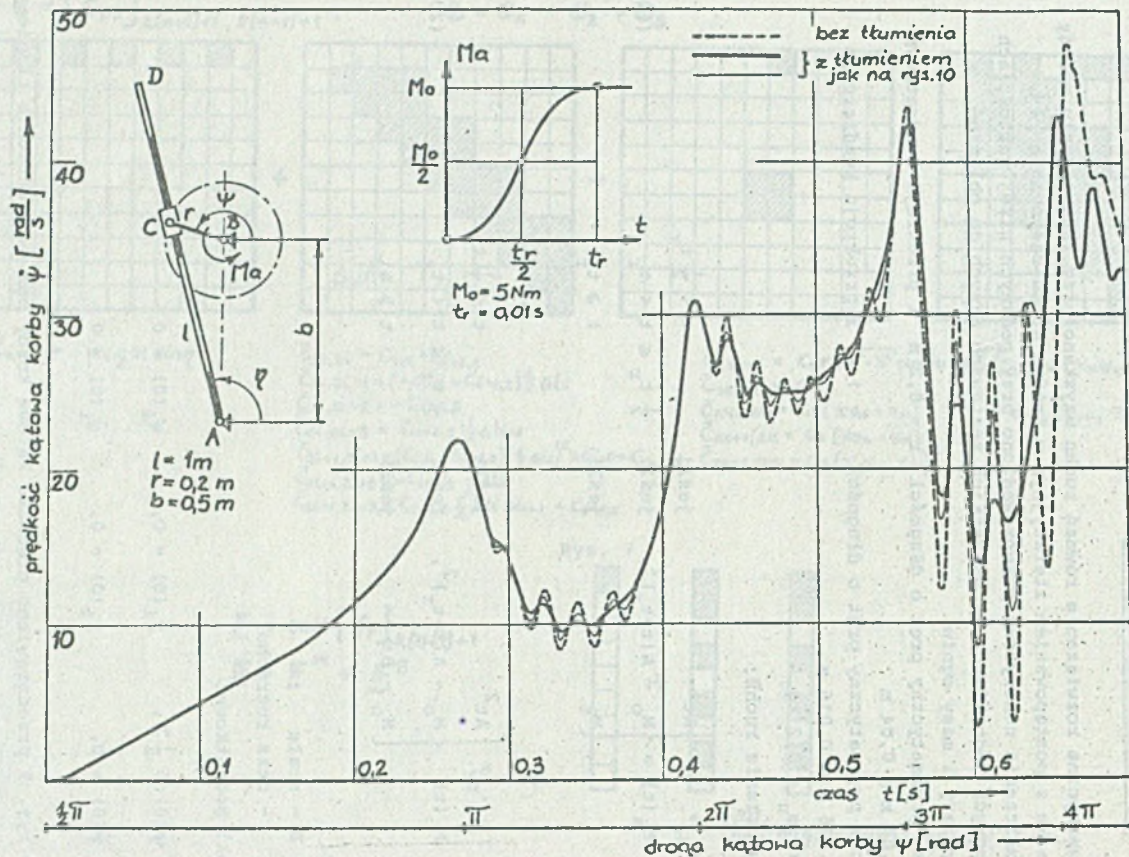
$t_r$  - czas rozruchu.

Warunki początkowe:

$$\psi(0) = \frac{1}{2} \pi, \quad y_1(0) = 0, \quad \varphi_1(0) = 0$$

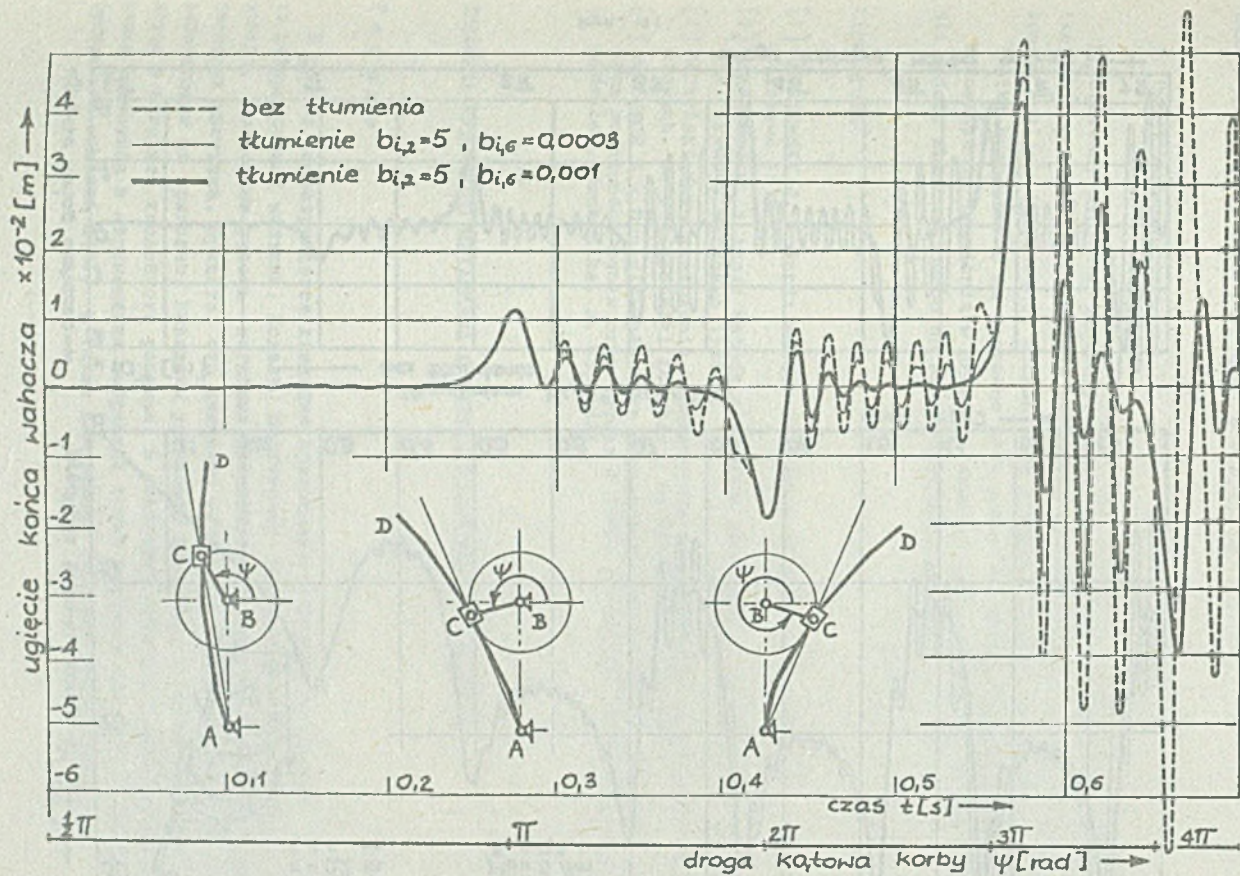
$$\dot{\psi}(0) = 0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0$$

Na rys. 9 przedstawiono prędkość kątową korby bez uwzględnienia tłumienia oraz z różnymi współczynnikami tłumienia wahacza przy momencie napędowym określonym wzorem (19), a na rys. 10 - ugięcia końca wahacza.

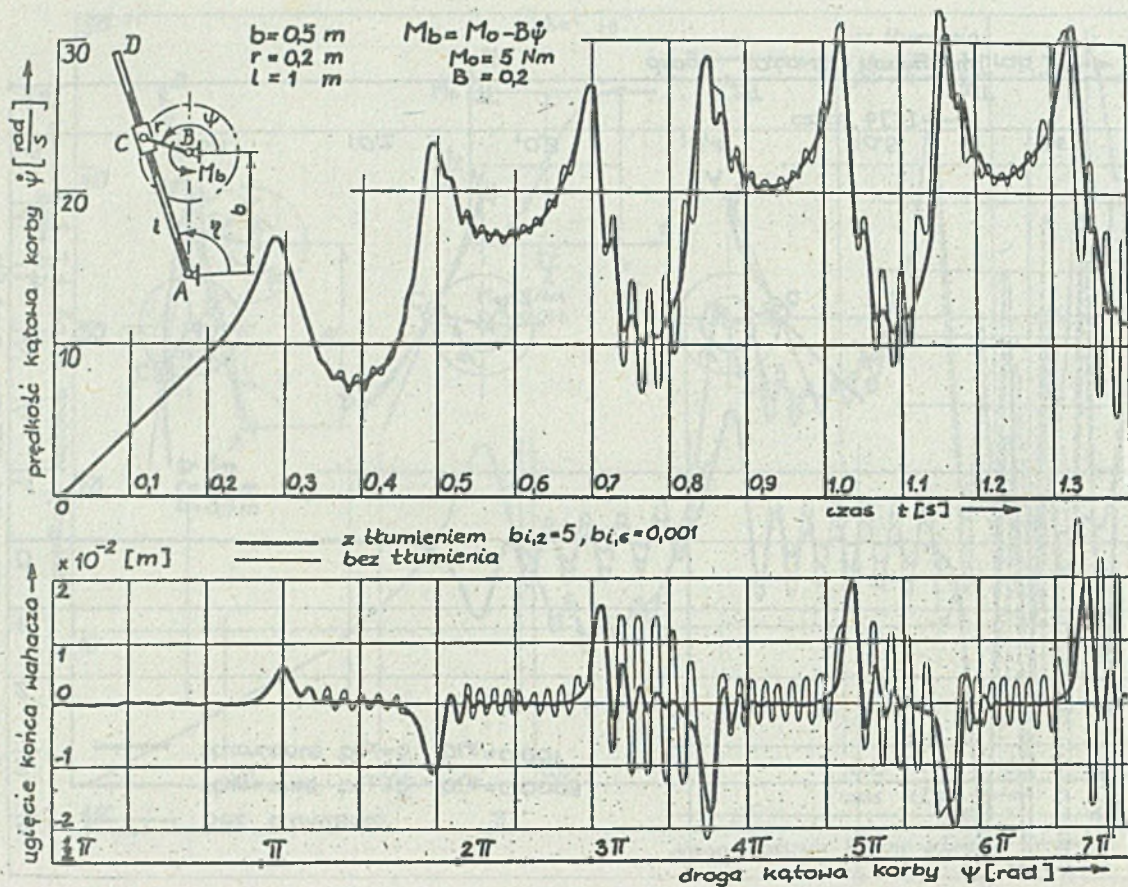


Rys. 9





Rys. 10



Rys. 11



Na rys. 11 przedstawiono wykresy prędkości katowej korby oraz ugięcia końca wahacza dla mechanizmu bez tłumienia i z tłumieniem, napędzanym momentem (20), przy czym przyjęto  $B = 0,2$ ,  $M_0 = 5$ .

### 5. Uwagi końcowe

Przeliczony przykład liczbowy, dzięki porównaniu z innymi tego typu pracami [4], pozwala uznać metodę sztywnych elementów skończonych za efektywny sposób analizy dynamicznej mechanizmów z dużymi ruchami unoszenia.

Wyniki uznać można za poprawne przy podziale wahacza już na cztery SES-y.

Wprowadzenie tłumienia w układzie stanowi istotny krok na drodze zbliżenia modelu obliczeniowego do rzeczywistości.

### LITERATURA

- [1] KRUSZEWSKI J. i inni: Metoda sztywnych elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1975.
- [2] GAWROŃSKI W. i inni: Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji. Arkady, Warszawa 1984.
- [3] MACZYŃSKI K.: Przełożenia kinematyczne podstawowych mechanizmów dźwigniowych. ZN Politechniki Łódzkiej, Mechanika, z. 60, 1980.
- [4] WOJCIECH S.: Dynamika płaskich mechanizmów dźwigniowych z uwzględnieniem podatności ogniów oraz tarcia i luzów w węzłach. ZN Politechniki Łódzkiej, Mechanika, z. 66, 1984.

### ДИНАМИКА КУЛИСНОГО МЕХАНИЗМА С УЧЁТОМ ПОДАТЛИВОСТИ МАЯТНИКА

#### Резюме

В работе рассматривается движение кривошипно-кулисного механизма, имеющего деформируемый маятник. Модель, полученная методом жёстких конечных элементов, позволяет учесть изгибные колебания, а также упруго-демпфирующих свойства маятника. Принято, что движение механизма вынуждено моментом  $M$ , действующим на кривошип. Выведены уравнения движения, а также представлен метод и алгоритм численного решения. В расчётных примерах представлено движение кривошипа и перемещения избранной точки маятника для разных видов приводного момента  $M(t)$ , а также для разных значений демпфирования.

THE DYNAMICS OF THE ROCKING-BLOCK LINKAGE  
WITH AN ELASTIC ROCKER

S u m m a r y

The movement of the rocking-block linkage with a flexible rocker has been considered in this paper. A model built by means of the finished rigid elements makes the transverse vibrations and the elastic-damping properties of the rocker take into consideration possible. The movement of the mechanism is forced by the torque  $M$  influencing the crank. The equations of movement have been arranged and the numerical solution method has been presented. The angular velocity of the crank and the displacement of a chosen point of the rocker in various kinds of the driving torque  $M(t)$  and various damping values have been computed and illustrated by diagrams.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Józef Wojnarowski

Wpłynęło do redakcji 11.XII.1986 r.