ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1987

Seria: MECHANIKA z. 85 Nr kol. 1010

XI OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA TEORII MASZYN I MECHANIZMÓW

11th POLISH CONFERENCE ON THE THEORY OF MACHINES AND MECHANISMS

27—30. 04. 1987 ZAKOPANE

Jan ODERFELD

Politechnika Warszawska

O SYNTEZIE POLIOPTYMALNEJ

Streszczenie. W referacie omawia się przypadek projektowania maszyny, w której obowiązują następujące założenia ogólne:

- struktura maszyny jest dana i nie podlega zmianie;
- wszelki wariant maszyny jest scharakteryzowany przez wartości n zmiennych decyzyjnych;
- zmienne te mają spełniać m więzów typu nierówności;
- jakość maszyny jest określona przez p funkcji celu.

Celem referatu jest przedstawienie na przykładach niektórych trudności związanych z przypadkiem: $p > 1$. Pierwszy przykład dotyczy współczynnika nierównomierności biegu w maszynie wirnikowej, a drugi - głównych wymiarów roweru.

1. Uwagi wstępne

Korzenie optymizącji sięgają połowy XVII wieku, jednakże jej stan współczesny jest niemal w całości dorobkiem ostatnich 40 lat. Mniej więcej tyle samo liczy sobie historia współczesnych zastosowań technicznych, wśród nich synteza optymalna maszyn.

Najprostsze zadanie takiej syntezy ma następujący schemat. Struktura maszyny jest ustalona i nie podlega dyskusji. Każdy z możliwych wariantów maszyny jest scharakteryzowany przez wektor n wartości zmiennych decyzyjnych, mogą to być odmiany materiałów, wymiary, temperatura eksploatacji itd. Na tę zmienne nakłada się m więzów o różnej postaci funkcyjnej; w najprostszym przypadku są to nierówności. Mogą one dotyczyć geometrii maszyny, jej dynamiki, ekonomiki itd.

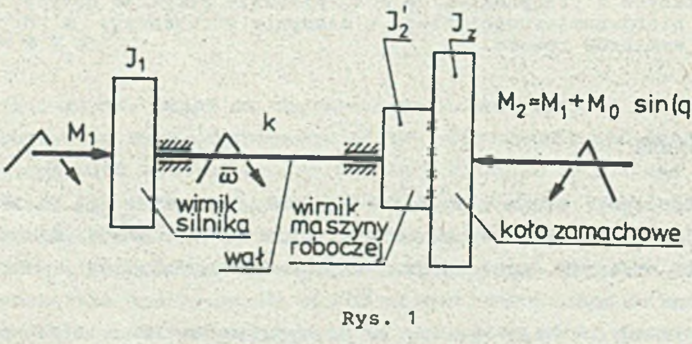
Zbiór wszystkich wektorów zmiennych decyzyjnych takich, że każdy spełnia wszystkie więzy, nazywa się obszarem dopuszczalnym.

Aby porównać ze sobą warianty maszyny, tworzy się p funkcji celu, których argumentami są zmienne decyzyjne. Funkcje celu wyrażają pogląd konstruktbra na różne aspekty maszyny; mogą na przykład opisywać masę maszyny, koszty inwestycji, roczny koszt eksploatacji, trwałość itd. Łatwymi transformatorami funkcji celu można doprowadzić je do takiej postaci, że pożądane są ich możliwie małe (lub duże) wartości. Tak więc za optymalny skłonni jesteśmy uznać ten wariant maszyny, dla którego wszystkie p funkcji celu osiąga ich minima (lub maksyma) globalne na obszarze dopuszczalnym.

Najczęściej przyjmuje się $p=1$. Ograniczenie się do jednej tylko funkcji celu ma dla konstruktora ten walor, że może zlecić rozwiązanie syntezy optymalnej informatykowi. Ma jednak tę wadę, że bardzo często jedyna funkcja celu nie wystarcza do porównywania wariantów maszyny. Jeśli $p > 1$, mówimy o polioptymizacji, a w odniesieniu do budowy maszyn o syntezie polioptymalnej. Występują w niej trudności metodyczne, których na ogół nie można by pokonać bez udziału konstruktora. Celem niniejszego referatu jest zilustrowanie na paru przykładach [1] niektórych trudności i roli konstruktora w ich pokonywaniu. Nie jest natomiast celem omawianie a nawet tylko przegląd algorytmów komputerowych, gdyż w tym zakresie istnieje w kraju obszerne piśmiennictwo.

2. Układ zespołu wirującego

Na rys. 1 pokazano model zespołu wirującego złożonego z silnika i maszyny roboczej połączonej z silnikiem za pomocą sprzęgła o skończonej sztywności skrętnej.



Rys. 1

Komentarz do rys. 1 (oznaczenia i wielkości liczbowe):

M_1 - moment obrotowy czynny

M_2 - moment obrotowy bierny (tłumienie pominięto)

$\bar{\omega}$ - środkowa prędkość obrotowa

k - sztywność skrętna

I (z indeksami) - biegunowe momenty bezwładności

Dane: $M_0 = 50$ Nm, $\bar{\omega} = 30$ rd . s^{-1}, $I_1 = 1{,}5$ kgm^2, $I_2 = 0{,}5$ kgm^2, $q=1$.

Obszar dopuszczalny:

$$1 \leqslant I_z \leqslant 6 \text{ kg . m}^2 \qquad 65 \leqslant k \leqslant 185 \text{ N . m . rd}^{-1} \tag{1}$$

Nierównomierność biegu tego zespołu daje się opisać dwiema funkcjami celu, a mianowicie wskaźnikami: δ_1 silnika i δ_2 maszyny roboczej. Ich definicja jest zwykła:

$$\frac{\text{prędkość max - prędkość min}}{\bar{\omega}} \tag{2}$$

Wskaźniki δ_1 i δ_2 są funkcjami zmiennych decyzyjnych: k, I_z, na które nałożono więzy (1).

Zadanie syntezy optymalnej ma postać:

$$\delta_1 = \text{min. glob.}, \qquad \delta_2 = \text{min. glob.} \tag{3}$$

pod warunkiem (1).
Zgodnie z oznaczeniami w rozdz. 1 mamy tu:

$$n = 2, \quad m = 2, \quad p = 2$$

Aby nie rozpraszać uwagi Czytelników na nieistotne szczegóły, pomijam funkcyjne zależności δ_1, δ_2 od k. I_z, a również analizę, która jest wprawdzie prosta, ale dość żmudna. Okazuje się, że w modelu opisanym na rys. 1 zarówno δ_1, jak δ_2 maleją monotonicznie, gdy k maleje i gdy I_z rośnie. Wskutek tego rozwiązanie ostateczne ma postać (4):

$$\left.\begin{aligned} &k = 65 \text{ N . m . rd}^{-1} && I_z = 6 \text{ kg . m}^2 \\ &\text{min. glob. } \delta_1 = 0{,}000875 && \text{min. glob. } \delta_2 = 0{,}0173 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Jest to sytuacja wyjątkowo prosta, bo znaleziono taką parę zmiennych decyzyjnych k, I_z, że obie funkcje celu osiągają jednocześnie swe minima globalne zgodnie z wymaganiem (3). Wystarczyłoby jednak zmienić w modelu jedną tylko liczbę, mianowicie zamiast obszaru dopuszczalnego (1) przyjąć:

$$1 \leqslant I_z \leqslant 6 \text{ kg . m}^2 \qquad 65 \leqslant k \leqslant \underset{\text{tu zmiana}}{1500} \text{ N . m . rd}^{-1}, \tag{5}$$

aby otrzymać sytuację konfliktową.
Okazuje się, że teraz otrzymuje się zamiast (4) wynik (6):

$$\left.\begin{array}{ll} k = 65\ \mathrm{N\,.\,m\,.\,rd^{-1}} & I_z = 6\ \mathrm{kg\,.\,m^2} \\ \text{min. glob. } \delta_1 = 0{,}000875 & \delta_2 = 0{,}0173 \\ \hline k = 1350\ \mathrm{N\,.\,m\,.\,rd^{-1}} & I_z \text{ - dowolne} \\ \delta_1 = 0{,}0740 & \text{min, glob. } \delta_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Konflikt polega na tym, że teraz w obszarze dopuszczalnym nie ma takiego punktu, żeby w nim obie funkcje celu osiągały swe minima globalne. Nie jest więc spełnione wymaganie (3).

Konfliktu nie można usunąć żadnym zabiegiem informatycznym. Konieczna jest tu modyfikacja pierwotnego zadania syntezy. Można to zrobić wieloma sposobami. Można by na przykład zachować (1), (2), (4), ale zamiast (3) przyjąć (7):

$$\delta_1 = \text{min. glob.}, \qquad \delta_2 \leqslant 0{,}03 \qquad (7)$$

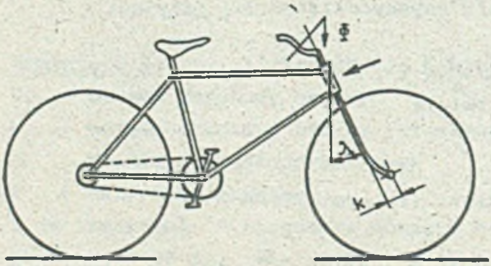
Wtedy rozwiązanie ostateczne staje się bezkonfliktowe i przyjmuje postać (8):

$$\begin{array}{ll} k = 65\ \mathrm{N\,.\,m\,.\,rd^{-1}} & I_z = 6\ \mathrm{kg\,.\,m^2} \\ \text{min. glob. } \delta_1 = 0{,}000875 & \delta_2 = 0{,}0173 < 0{,}03 \end{array} \qquad (8)$$

Opisane postępowanie jest ilustracją rozpowszechnionego zabiegu, który polega na zmniejszeniu liczby p funkcji celu kosztem zwiększenia liczby m nierówności. Praktyczna poprawność tego zabiegu zależy od tego, czy trafnie ustalono górny kres dodanej nierówności. Oczywiście tylko konstruktor może podejmować odpowiednie decyzje.

Rower

Na rys. 2 pokazano schemat roweru. Zadanie syntezy dotyczy optymalnego doboru parametrów konstrukcyjnych λ, k. Przystępując do tego zadania, konstruktor zbudował teoretyczny model, uwzględniający - przy pewnych założeniach upraszczających - cztery wymagania:



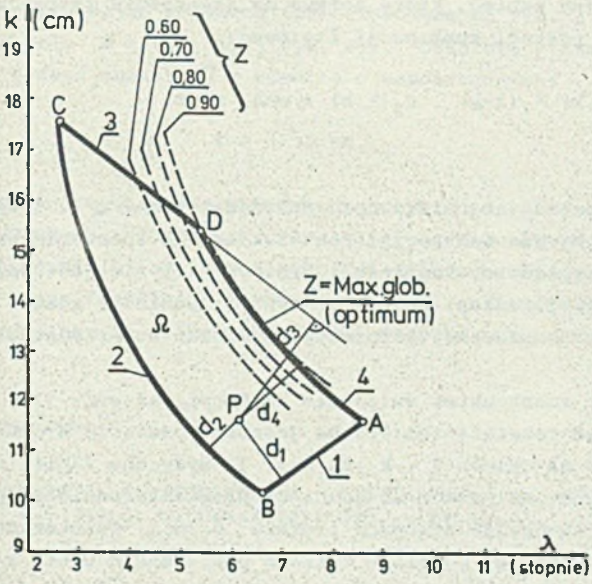
Rys. 2

1 - Stateczność, rozumianą jako zdolność układu do likwidowania niezamierzonego skręcenia przedniego koła względem ramy o kąt Φ.

2 - Szybkość tego działania.

3 - Obciążenie ramy ze szczególnym uwzględnieniem sił w okolicy strzałki na rys. 2.

4 - Komfort jazdy, rozumiany jako warunek, by zamierzona zmiana kąta Φ nie wymagała dużej siły.



Rys. 3

Pomijając założenia i analizę, przypuśćmy że jako wynik konstruktor otrzymał rysunek 3 o następującym znaczeniu. W każdym punkcie P wewnątrz obszaru Ω, ograniczonego czterema łukami 1, 2, 3, 4 i na brzegu, są zadowalająco uwzględnione wszystkie cztery wymagania wymienione poprzednio. W każdym punkcie poza obszarem co najmniej jedno z wymagań nie jest spełnione.

Ponadto z analizy wynika, że każde z wymienionych wymagań, rozpatrywane oddzielnie, jest spełnione z tym większym zapasem, im odległość d_i punktu P od odpowiedniego łuku brzegu jest większa. Dlatego konstruktor sformułował zagadnienie syntezy w postaci:

$$\left.\begin{array}{l} d_i(\lambda,k) = \text{max. glob.} \quad (i=1,2,3,4) \\ P(\lambda,k) \in \Omega \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Zwróćmy uwagę, że rola odległości d_i w sformułowaniu czterech funkcji celu we wzorach (9) jest umowna. Być może równie rozsądne byłoby operowanie odległościami od wierzchołków A, B, C, D lub jeszcze innymi miarami.

Pozostańmy jednak przy sformułowaniu (9). Zgodnie z oznaczeniami z rozdziału 1 jest to zadanie syntezy polioptymalnej z parametrami: h=2, m=4, p=4. Zadanie jest konfliktowe, bo na przykład zwiększenie zmiennej decyzyjnej d_2 zmniejsza d_4. Przypuśćmy, że po rewizji konstruktor uznał, że może zrezygnować z dwóch funkcji celu, mianowicie tych, które dotyczą wytrzymałości i komfortu, bo ze względu na te wymagania wystarczy, żeby punkt P należał do obszaru Ω, którego nawet nie trzeba zmniejszać. Tak więc zadanie syntezy zredukowało się do:

$$\left.\begin{array}{ll} d_1(\lambda,k) = \text{max. glob.} & d_2(\lambda,k) = \text{max. glob.} \\ P(\lambda,k) \in \Omega & \end{array}\right\} \quad (10)$$

To jednak jeszcze nie usuwa konfliktu, bo na obszarze Ω (rys. 3) wymaganie d_1 = max. glob. jest spełnione w punkcie C, a wymaganie d_2 = maxglob. - gdzieś na łuku CD lub może DA. W tej sytuacji informatyk mógłby podsunąć konstruktorowi kolejny zabieg, który polega na stworzeniu zastępczej funkcji celu $Z(\lambda,d)$ w postaci kombinacji liniowej:

$$\left.\begin{array}{l} Z(\lambda,k) = \alpha \cdot d_1(\lambda,k) + (1-\alpha) \cdot d_2(\lambda,k) = \text{max. glob.} \\ P(\lambda,k) \in \Omega \end{array}\right\} \quad (11)$$

gdzie α oznacza wagę spełniającą nierówność podwójną $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Znaczenie wagi α jest jasne. Wyraża ona pogląd konstruktora na znaczenie poszczególnych funkcji celu. Oczywiście, kombinacja liniowa (11) nie jest jedyną możliwą postacią zastępczej funkcji celu. Konstruktor powinien zdawać sobie z tego sprawę, a jeśli to konieczne, informatyk powinien mu przedstawić inne możliwości.

Przypuśćmy jednak, że konstruktor świadomie zaakceptował wzór (11) i wybrał wagę $\alpha = 0{,}2$. Przed rozwiązaniem trzeba jeszcze poświęcić trochę uwagi zagadnieniu podziałek na osiach λ, k na rys. 3. Były one zupełnie dowolne i gdyby je zmieniono, to obszar Ω doznałby przekształcenia afinicznego, które na ogół nie zachowuje stałości ilorazu d_2/d_1. Wskutek tego manipulując podziałkami można by zupełnie zmienić preferencje ujęte w wartości wagi α. Ponadto przekształcenie afiniczne na ogół nie jest równokątne. Ponieważ zaś odległości d_1, d_2 mają być z założenia prostopadłe do łuków brzegu, to po zmianie podziałek mogłyby ulegać zmianie punkty, w których linie poprowadzone z punktu P prostopadłe do brzegu przebijają ten brzeg. Łącznie więc wybór podziałek ma na ogół wpływ na wynik optymizacji według wzoru (11). Można go osłabić za pomocą normalizacji zmiennych. Można na przykład podzielić każdą ze zmiennych d_1, d_2 przez jej największą wartość na obszarze Ω. W ten sposób zamiast (11) otrzymalibyśmy wzór (12):

$$\left.\begin{array}{l} Z(\lambda,k) = \alpha \dfrac{d_1(\lambda,k)}{d_{1,max}} + (1-\alpha) \dfrac{d_2(\lambda,k)}{d_{2,max}} = \text{max. glob.} \\ P(\lambda,k) \in \Omega \end{array}\right\} \quad (12)$$

Pozostaje już tylko rozwiązać efektywnie zadanie (12). Można to zrobić różnie: graficznie, analitycznie lub numerycznie. Zwróćmy uwagę, że zagadnienie podziałek i normalizacji jest jednakowe w każdej z tych metod. Przyjmijmy dla prostoty, że wybrano metodę graficzną i że na rys. 3 zmierzono $d_{1,max}$ = 8,5 cm, $d_{2,max}$ = 2,4 cm oraz że konstruktor zdecydował się na wartość $\alpha = 0,2$. Wtedy zastępcza funkcja celu ze wzoru (12) przybiera postać:

$$Z = 0,0235\, d_1 + 0,333\, d_2 = \text{max. glob.} \tag{13}$$

gdzie d_1, d_2 mierzy się w centymetrach na rys. 3.

Korzystając ze wzoru (13) zbudowano na rys. 3 warstwice zastępczej funkcji celu $Z = 0,6,\ 0,7,\ 0,8,\ 0,9$. Ostatnia z nich jest praktycznie styczna do brzegu obszaru Ω w punkcie o współrzędnych:

$$\lambda = 6,7°; \qquad k = 13,5 \text{ cm}.$$

Jest to rozwiązanie optymalne, oczywiście ważne tylko przy wszystkich poczynionych założeniach. Pamiętajmy, że wynik syntezy polioptymalnej, a nawet wszelkiej syntezy optymalnej zależy od sposobu, w jaki przetłumaczono na język formalny potoczne wyrażenie: najlepsza maszyna. Dlatego synteza optymalna to tylko dobra rada; decyzja ostateczna należy do konstruktora.

LITERATURA

[1] MORECKI A., ODERFELD J.: Teoria maszyn i mechanizmów, Rozdziały 5.6 i 8.8 (autor J. Oderfeld), PWN, w druku.

О ПОЛИОПТИМАЛЬНОМ СИНТЕЗЕ

Р е з ю м е

В докладе представлен случай проектирования машины, в которой приняты следующие общие допущения:

- заданная структура машины, которая не подвергается изменениям,
- любой вариант машины определяется значением n решающих переменных,
- эти переменные должны выполнять m связей типа неравенств,
- качество машины определено через p функций критериев.

Идеей этого реферата является представление на конкретных примерах некоторых трудностей, связанных со случаем: $p > 1$.

Первый пример касается коэффициента неравномерности хода роторной машины, а второй - главных размеров велосипеда.

ON POLYOPTIMAL SYNTHESIS

S u m m a r y

The paper deals with the designing of the machine under the following general assumptions:

- the basic structure of the machine is given and its change is not considered;
- any variant of the machine is characterized by values of n decision variables;
- these variables have to satisfy m inequality constraints;
- quality of the machine is defined by p objective functions.

The paper aims at illustrating some difficulties connected with the case: $p > 1$, and the role of the designer in overcoming them.

The first example deals with the coefficients of speed variation of rotors, and the second one with the main dimensions of a bicycle.

Recenzent: Prof. Adam Morecki

Wpłynęło do Redakcji 21.I.1987 r.