ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1987

Seria: MECHANIKA z. 85 Nr kol. 1010

XI OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA TEORII MASZYN I MECHANIZMÓW

11th POLISH CONFERENCE ON THE THEORY OF MACHINES AND MECHANISMS

27—30. 04. 1987 ZAKOPANE

Wiesław OSTACHOWICZ, Jarosław SZWEDOWICZ

Katedra Mechaniki
i Wytrzymałości Materiałów
Politechnika Gdańska

OKRESOWY RUCH MANIPULATORA Z UWZGLĘDNIENIEM TARCIA SUCHEGO

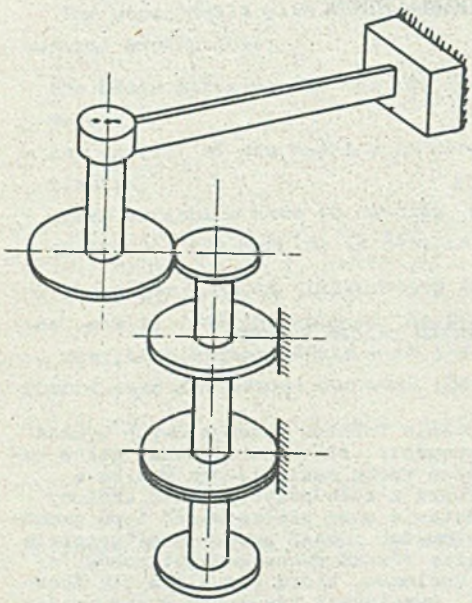
Streszczenie. Szerokie zastosowanie robotów przemysłowych wymaga dokładnego określenia ich pozycjonowania oraz kontrolowanie sił w całym cyklu pracy. Nieliniowość równań ruchu manipulatora wynika z dwóch zasadniczych przyczyn. Pierwszą z tych przyczyn jest złożony łańcuch kinematyczny, który przedstawia sobą nieliniowość typu geometrycznego. Drugą przyczyną nieliniowości równań ruchu są siły tarcia. W pracy przedstawiono metodę analizy równań ruchu manipulatorów z uwzględnieniem wpływu sił tarcia Coulomba, którą przybliża się funkcją ciągłą Rooney, Deravi (1982). Uwzględnia się także występowanie chwilowych obszarów zahamowań. Model fizyczny manipulatora sprowadzamy do układu elementów skończonych i brył nieodkształcalnych. W pracy przedstawiono także analizę ruchu manipulatora z zastosowaniem zasady Gaussa. Model fizyczny jest przedstawiony jako łańcuch brył sztywnych połączonych parami kinematycznymi piątej klasy.

1. Wprowadzenie

Współczesne roboty przemysłowe stawiają przed konstruktorami duże wymagania w zakresie dokładności ich pozycjonowania. Drugim istotnym problemem jest kontrolowanie wielkości sił w całym cyklu pracy. Dynamiczny model manipulatora opisują nieliniowe równania różniczkowe, których nieliniowość wynika z dwóch zasadniczych powodów. Pierwszą przyczyną nieliniowości tych równań jest złożony łańcuch kinematyczny, a więc jest to nieliniowość typu geometrycznego. Drugą przyczyną nieliniowości równań ruchu są siły tarcia. Wspomniane przyczyny występują jednocześnie, co stwarza duże trudności w rozwiązywaniu zagadnienia. Naturalną konsekwencją tych trudności jest użycie techniki komputerowej do analizy tych zagadnień.

W pracy przedstawiono metodę analizy równań ruchu manipulatorów z uwzględnieniem wpływu sił tarcia Coulomba. Uwzględniono przy tym występowanie chwi-

lowych obszarów zahamowań. Trudności, jakie pojawiają się w tym przypadku, były przedmiotem badań Den Hartoga (1931) oraz opisane są w pracy Marui i Kato (1984). Przyjmując podane wyżej założenia dokonano analizy układu w niskim zakresie częstości drgań. Model fizyczny manipulatora sprowadzamy do układu elementów skończonych i brył nieodkształcalnych. Prosty przykład modelowania układu rzeczywistego elementami skończonymi i sztywnymi bryłami przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1

Koło zębate przekładni i wirnik silników elektrycznych modelujemy nieodkształcalnymi bryłami, wały i ramię manipulatora - elementami skończonymi. Tarcie Coulomba występuje w łożyskach silników i przekładni a także w przegubach manipulatora. W modelu fizycznym układu uwzględniono występowanie luzów międzyzębnych w przekładniach a także w sprzęgłach.

Momenty napędowe silników elektrycznych są ograniczone z uwagi na natężenie prądu.

Siły tarcia suchego (Coulomba) opisujemy przybliżoną funkcją ciągłą (Rooney, Deravi, 1982):

$$F = -\mu\,|N|\,\tanh(b\dot{x}), \tag{1}$$

gdzie:

μ - współczynnik tarcia,

N - siła normalna w płaszczyźnie kontaktu,

b - współczynnik opisujący szerokość pasma, w którym siła tarcia jest zależna od prędkości.

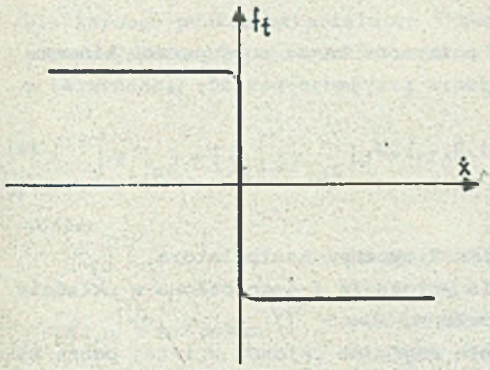
2. Równania ruchu manipulatora robota

Równania ruchu układu są tworzone według ogólnie przyjętych zasad. W pierwszym etapie określamy macierze poszczególnych elementów: $[M_e]$ - bezwładności, $[C_e]$ - tłumienia, $[K_e]$ - sztywności oraz $[F]$ - wektor sił uogólnionych. Równania ruchu manipulatora przyjmują postać:

$$[M]\,\ddot{q} + [C][\dot{q}] + [K][q] = [F] - [F_r], \tag{2}$$

gdzie:

$[q]$ - wektor współrzędnych uogólnionych,
$[K]$ - macierz globalna sztywności układu,
$[C]$ - macierz globalna tłumienia układu,
$[M]$ - macierz globalna bezwładności układu,
$[F_r]$ - wektor sił tarcia opisany zależnością (1) w układzie globalnym.



Rys. 2

Inny sposób analizy ruchu manipulatora robota podali Popow, Vereschagin i Zienkiewicz (1978). Model fizyczny manipulatora przedstawiony jest jako łańcuch nieodkształcalnych brył połączonych między sobą parami kinematycznymi. Z każdym dowolnym i-tym ciałem sztywnym związany jest lokalny, kartezjański układ współrzędnych $0_i x_i y_i z_i$, który opisany jest w globalnym kartezjańskim układzie współrzędnych Oxyz macierzą transformacji $[T_i]_{4x4}$, o postaci:

$$[T_i] = [T_{ir}] \cdot [T_{i\alpha}], \tag{3}$$

gdzie:

$$[T_{ir}] = \begin{bmatrix} [E]_{3x3} & [R_i]_{3x1} \\ [\emptyset]_{1x3} & 1 \end{bmatrix} \tag{3a}$$

jest macierzą przesunięcia lokalnego układu współrzędnych względem globalnego układu współrzędnych. Wektor R_i przyjmuje postać:

$$[R_i] = \begin{bmatrix} r_{xi} \\ r_{yi} \\ r_{zi} \end{bmatrix} \tag{3b}$$

Składowe tego wektora określają położenie początku lokalnego układu współrzędnych względem układu globalnego. Macierz $[T_{i\alpha}]$ przyjmuje postać:

$$[T_{i\alpha}] = \begin{bmatrix} [C_i]_{3x3} & [\emptyset]_{3x1} \\ [\emptyset]_{1x3} & 1 \end{bmatrix} \tag{3c}$$

Jest to macierz obrotu lokalnego układu współrzędnych względem układu globalnego, przy czym:

$$[C_i] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix}, \tag{3d}$$

gdzie α_i, β_i, γ_i (i=1,3) są kątami pomiędzy osiami lokalnego i globalnego układów współrzędnych.

Przyjmując, że ciała sztywne (człony) połączone są ze sobą parami kinematycznymi klasy piątej, równanie sprzężenia przyjmuje postać:

$$[T_i] = [T_{i-1}][A_{i,i-1}]\ (q_i) \qquad i=1,2,\ldots,N, \tag{4}$$

gdzie:

N - liczba członów w modelu fizycznym manipulatora,

$[A_{i,i-1}]_{4x4}$ - macierz, która określa położenie i-tego członu w układzie lokalnym (i-1)-tego członu,

$[q_i]$ - określa przemieszczenie względne członów w i-tej parze kinematycznej.

3. Algorytm analizy ruchu manipulatora robota

Macierz położenia $[A_{i,i-1}]$ ma podobną strukturę do macierzy transformacji $[T_i]$:

$$[A_{i,i-1}] = \begin{bmatrix} [c]_{3x3} & [a]_{3x1} \\ [\emptyset]_{1x3} & 1 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

gdzie:

$[c]_{3x3}$ - macierz cosinusów kierunkowych osi układu współrzędnych i-tego członu względem układu współrzędnych (i-1)-tego członu,

$[a]_{3x1}$ - wektor położenia początku układu współrzędnych (i-1)-tego członu.

Elementy manipulatora traktujemy jako zbiór punktów materialnych, które w dowolnej chwili opisują współrzędne jednorodne:

$$[r_n] = [r_{xn}, r_{yn}, r_{zn}, 1]^T, \tag{6}$$

gdzie:

r_{xn}, r_{yn}, r_{zn} - są rzutami promienia wodzącego punktu n na osie układu współrzędnych Oxyz.

Na każdy z tych punktów mogą działać siły zewnętrzne, które także przedstawiono w postaci wektora o czterech składowych:

$$[F_n] = [F_{xn}, F_{yn}, F_{zn}, \emptyset]^T, \tag{7}$$

gdzie:

F_{xn}, F_{yn}, F_{zn} - są rzutami siły F_n na osie układu współrzędnych Oxyz.

Dla każdego punktu materialnego i-tego ciała sztywnego, możemy obliczyć wektor przyspieszeń tego punktu w globalnym układzie współrzędnych. Korzystamy z zależnońci:

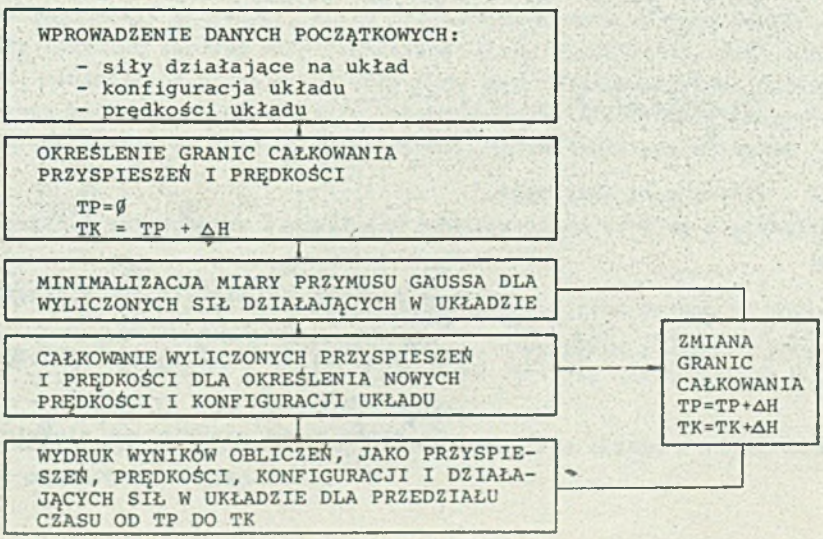
$$[\ddot{r}_{i,n}] = [\ddot{T}_i]\,[\varrho_{i,n}], \tag{8}$$

gdzie:

$[\ddot{T}_i]$ - druga pochodna względem czasu macierzy transformacji i-tego ciała sztywnego,

$[\varrho_{i,n}] = [\varrho_{xn}, \varrho_{yn}, \varrho_{zn}, 1]^T$ - współrzędne jednorodne n-tego punktu materialnego względem lokalnego i-tego układu współrzędnych ciała sztywnego.

Do rozwiązania postawionego wyżej zagadnienia wykorzystano zasadę przymusu Gaussa. Dla określonej konfiguracji i prędkości układu obliczamy przyspieszenia korzystając z minimalizacji miary przymusu uwzględniając warunki nałożone przez więzy układu. Całkując obliczone w ten sposób przyspieszenie otrzymujemy nowe prędkości i konfigurację układu w danej chwili czasu. Powtarzając obliczenia dla kolejnych przedziałów czasu możemy określić ruch manipulatora. Na tej podstawie zbudowano algorytm programu komputerowego, który przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3

Miarę przymusu układu punktów materialnych i-tego ciała sztywnego określa związek:

$$Z_i = \frac{1}{2} \sum_n m_n \left([\ddot{r}_{i,n}] - \frac{[F_{i,n}]}{m_n}\right)^T \left([\ddot{r}_{i,n}] - \frac{[F_{i,n}]}{m_n}\right), \tag{9}$$

gdzie:

m_n - masa n-tego punktu materialnego,
$[F_{i,n}]$ - wektor sił działających na n-ty punkt materialny,
$[r_{i,n}]$ - wektor przyspieszeń n-tego punktu materialnego w globalnym układzie współrzędnych.

Iloczyn skalarny macierzy, które występują w związku (9), przedstawiono w postaci śladu macierzy kwadratowej. Jest ona iloczynem tych macierzy. Odrzucając te składniki wyrażenia, które są niezależne od przyspieszeń, otrzymujemy następujący zapis miary przymusu Gaussa:

$$Z_i = \frac{1}{2} \sum_n m_n \operatorname{tr} \left\{ \left([\ddot{r}_{i,n}] - \frac{[F_{i,n}]}{m_n}\right) \left([\ddot{r}_{i,n}] - \frac{[F_{i,n}]}{m_n}\right)^T \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left\{\sum_n m_n [\ddot{r}_{i,n}][\ddot{r}_{i,n}]^T\right\} - \operatorname{tr}\left\{\sum_n [F_{i,n}][\ddot{r}_{i,n}]^T\right\} + \ldots \tag{10}$$

Podstawiając do związku (10) wyrażenie (8) otrzymano zależność na miarę przymusu dla całego układu:

$$Z = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left\{[\ddot{T}_i] \left(\sum_n m_{i,n} [\varrho_{i,n}] \cdot [\varrho_{i,n}]^T\right) [\ddot{T}_i]^T\right\} -$$

$$- \operatorname{tr}\left\{\sum_n [F_{i,n}] [\varrho_{i,n}]^T [\ddot{T}_i]^T\right\} + \ldots, \tag{11}$$

gdzie l - liczba ciał sztywnych.

Siły działające na i-te ciało sztywne przedstawia następująca macierz kwadratowa:

$$[\Phi_i] = \sum_n [F_{i,n}][\varrho_{i,n}]^T = \begin{bmatrix} \sum_n F_{xin}\varrho_{xin} & \sum_n F_{xin}\varrho_{yin} & \sum_n F_{xin}\varrho_{zin} & \sum_n F_{xin} \\ \sum_n F_{yin}\varrho_{xin} & \sum_n F_{yin}\varrho_{yin} & \sum_n F_{yin}\varrho_{zin} & \sum_n F_{yin} \\ \sum_n F_{zin}\varrho_{xin} & \sum_n F_{zin}\varrho_{yin} & \sum_n F_{zin}\varrho_{zin} & \sum_n F_{zin} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \tag{12}$$

Masowy moment bezwładności i-tego ciała sztywnego opisuje związek $\sum_n m_{in,}[\varrho_{i,n}][\varrho_{i,n}]$, który następnie przedstawiamy w postaci macierzy kwadratowej:

$$[H_i] = \sum_n m_{i,n}[\varrho_{i,n}][\varrho_{i,n}]^T = \begin{bmatrix} I_{xxi} & I_{xyi} & I_{xzi} & S_{xi} \\ I_{yxi} & I_{yyi} & I_{yzi} & S_{yi} \\ I_{zxi} & I_{zyi} & I_{zzi} & S_{zi} \\ S_{xi} & S_{yi} & S_{zi} & m_i \end{bmatrix} \tag{13}$$

gdzie:

$m_i = \sum_n m_{i,n}$ - masa i-tego ciała sztywnego członu,

$S_{\alpha i} = \sum_n m_{i,n}[\varrho_{\alpha in}]$ - masowy moment statyczny względem płaszczyzny prostopadłej do osi x_α, $\alpha = \{x,y,z\}$,

$I_{\alpha\alpha i} = \sum_n m_{i,n}[\varrho_{\alpha in}]^2$ - masowy moment bezwładności względem osi x_α, $\alpha = \{x,y,z\}$,

$I_{\alpha\beta i} = \sum_n m_{i,n}[\varrho_{\alpha in}][\varrho_{\beta in}]$ - masowy moment dewiacyjny względem płaszczyzn prostopadłych do osi x_α oraz x_β, $\alpha = \{x,y,z\}$, $\beta = \{x,y,z\}$.

W tym przypadku miarę przymusu Gaussa dla układu ciał sztywnych przedstawiono w postaci:

$$Z = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left\{[\ddot{T}_i][H_i][\ddot{T}_i]^T - \operatorname{tr}\ [\Phi_i][T_i]^T\right\} + \ldots, \tag{14}$$

gdzie: l - liczba ciał sztywnych.

Przez pojęcie sił aktywnych, które przedstawione są w postaci macierzy $[\Phi_i]$ należy rozumieć zarówno siły zewnętrzne, np. siły ciężkości, siły wyporu, jeżeli manipulator pracuje pod wodą itp., jak i siły wewnętrzne, powstające w parach kinematycznych, np. siły napędowe, siły tarcia. Dalej rozpatrzono tylko takie siły w parach kinematycznych, które spełniają warunek:

$$[\Phi_i]^G = -[\Phi_{i-1}]^G, \tag{15}$$

gdzie:

$[\Phi_i]^G$ - macierz sił działających na i-ty człon opisane w globalnym układzie współrzędnych,

$[\Phi_{i-1}]^G$ - macierz sił działających na (i-1)-ty człon opisane w globalnym układzie współrzędnych.

Siły działające na i-ty człon opisane w globalnym układzie współrzędnych można przedstawić w postaci:

$$[\Phi_i]^G = [\Phi_i][T_i]^T. \tag{16}$$

Korzystając z warunku (14) można wykazać, że do miary przymusu Gaussa należy dodać sumę:

$$\sum_{j=1}^{p} M_j \ddot{\varphi}_j, \tag{17}$$

gdzie:

- p - oznacza liczbę par kinematycznych VI klasy występujących w układzie opisanych względnym kątem obrotu w parze kinematycznej,
- M_j - odpowiada momentom rozwijanym na wale silnika lub wale członu połączonym w j-tej parze kinematycznej VI klasy (z uwzględnieniem momentu pochodzącego od siły tarcia),
- $\ddot{\varphi}_j$ - oznacza przyspieszenie względne w j-tej parze kinematycznej VI klasy między członami, których względne przemieszczenie opisane jest kątem obrotu φ_j.

W przypadku gdy bardziej przydatne okażą się inne współrzędne uogólnione (np. $q_1,\ldots,q_m$) związane z pierwotnym układem współrzędnych równaniem

$$\varphi_j = f_j(q_1,\ldots,q_m), \quad j=1,2,\ldots,p, \tag{18}$$

lub

$$\ddot{\varphi}_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} q_i + \ldots, \tag{19}$$

to do miary przymusu Gaussa należy zamiast sumy (17) dodać wyrażenie:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{p} M_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}\right) \ddot{q}_i = \sum_{i=1}^{m} Q_i \ddot{q}_i, \tag{20}$$

gdzie:

- m - liczba par kinematycznych w układzie,
- Q_i - siły uogólnione odniesione do współrzędnych uogólnionych q_i.

Różniczkując dwukrotnie względem czasu równanie sprzężenia (4) otrzymamy związki liniowe względem przyspieszeń:

$$[\ddot{T}_{i,j}] = [\ddot{T}_{(i-1),j}][A_j] + [B_j][\ddot{q}_j] + [C_j], \quad \begin{matrix} i=1,\ldots,n, \\ j=1,\ldots,m_i \end{matrix} \tag{21}$$

gdzie:

$$[B_j] = [T_{(i-1),j}] \frac{d[A_j]}{d\,q_j},$$

$$[C_j] = 2[\dot{T}_{(i-1),j}] \frac{d[A_j]}{d\,q_j}[\dot{q}_j] + [T_{(i-1),j}] \frac{d^2[A_j]}{d\,q_j^2}[\dot{q}_j]^2,$$

n - liczba członów występujących w mechanizmie,

m - liczba kinematycznych par w układzie.

Na każdy człon mogą działać siły zewnętrzne opisane macierzami $[\Phi_1,\ldots,\Phi_n]$ oraz siły działające w każdej parze kinematycznej, które odnosimy do współrzędnych uogólnionych $q_1,\ldots,q_m$ (według związku (20)), otrzymując wówczas siły uogólnione $Q_1,\ldots,Q_m$ działające w każdej parze kinematycznej. W rozpatrywanej chwili czasu wszystkie siły, prędkości i konfigurację mechanizmu traktujemy jako zadane i wówczas miarę przymusu określa związek:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}\left\{\frac{1}{2}[\ddot{T}_i][H_i][\ddot{T}_i]^T - [\Phi_i][\ddot{T}_i]^T\right\} - \sum_{j=1}^{m} Q_j\ddot{q}_j, \tag{22}$$

gdzie:

n - liczba członów w układzie,

m - liczba par kinematycznych w układzie.

4. Uwagi końcowe

Rozwiązanie powyższego problemu ze względu na $q_1,\ldots,q_m$ wydaje się niewystarczające, ponieważ w macierzy $[\ddot{T}_i]$ znajduje się dwanaście parametrów określających przyspieszenie i-tego ciała sztywnego w globalnym układzie kartezjańskim. Przyspieszenia ciała sztywnego określone są tylko 6 parametrami. Konsekwencją tego jest fakt, że elementy macierzy T_i są od siebie zależne, ale związki między nimi nie są określone warunkami sprzężenia (4). Jednak w szczególnych przypadkach rozwiązań nie wymaga się tak dokładnych określeń przyspieszeń ciała sztywnego. Dotyczy to mechanizmów, dla których wartości przyspieszeń $\ddot{q}_1,\ldots,\ddot{q}_m$ określają przyspieszenia ciał sztywnych $[\ddot{T}_i]$, $i=1,\ldots,n$. W tym przypadku miara przymusu Z w ostatecznym wyniku zależy tylko od przyspieszeń współrzędnych uogólnionych.

LITERATURA

[1] DEN HARTOG, J.P. 1931. Forced vibrations with combined Coulomb and viscous friction. Trans. ASME, APM-53-9, 107-115.

[2] MARUI, E. and S. KATO 1984. Forced vibration of a base-excited signale--degree-of-freedom system with Coulomb friction. Trans. of ASME, vol, 106, Dec. 1984, 280-285.

[3] ROONEY,G.T. and P. DERAVI 1982. Coulomb friction in mechanism sliding joints. Mechanism and Machine Theory, vol. 17, 3, 207-211.

[4] POPOV, E.P., A.F. VERESCHAGIN and S.L. ZIENKIEWICZ 1978. "Manipulatory robotów", Nauka, Moskwa.

ЭФФЕКТ ТРЕНИЯ КУЛОМБА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ПРОМЫШЛЕННЫХ РОБОТОВ

Р е з ю м е

В анализе приняты во внимание, выступающие в моделях промышленных роботов, силы трения Куломба. Учитывается также выступание пространств задержания движения. Модель робота представляется конечными элементами и жёсткими телами. Силы трения приняты согласно с работой Ронея (1982). Во второй частьи работы используется принцип Гауоса для рассматривания механизма, состоящего из совокупности жёстких тел, образующих между собой и другими неподвижными телами кинематические пары.

THE EFFECT OF COULOMB FRICTION IN PERIODIC MOTION OF INDUSTRIAL ROBOTS

S u m m a r y

In the paper the forced vibrations of manipulators are considered including the influence of Coulomb friction. The analysis is based on the new simple idea of stopping region. Using this technique, the behaviour of the system in the low frequency range is examined. The real system is modeled by finite elements and rigid bodies. To obtain a noniterative method of solution the first step is to formulate the friction velocity relationship in a continuous form. The equations of a motion of the system are formed in compliance with the generally accepted principles. In the second part of the paper another method is showed. The solution of the equations of a motion is based on Gauss principle. A manipulator is modeled as chain of rigid bodies, which are joined by kinematic pairs.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Józef Wojnarowski

Wpłynęło do redakcji: 5.XI.1986 r.